

УДК 533.6.011

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КАНАЛОВ И ПОЛОСТЕЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С ГОЛОВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

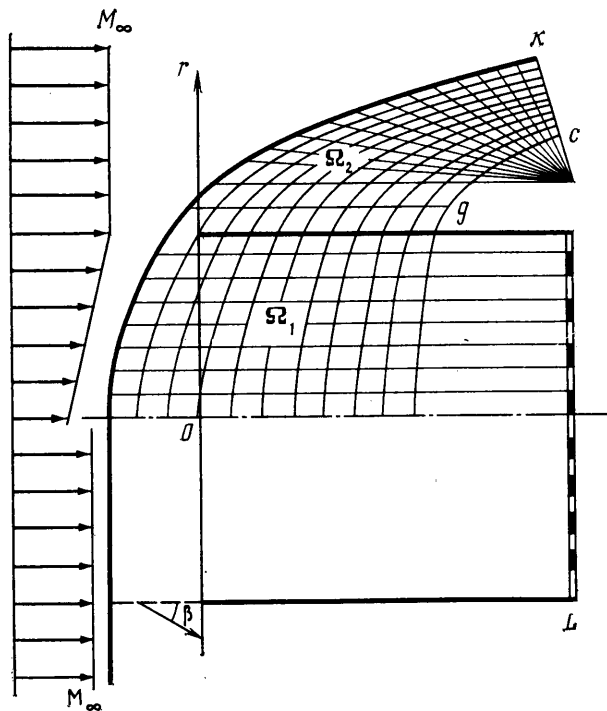
ГРИНЬ В. Т., СЛАВЯНОВ Н. Н., ТИЛЛЯЕВА Н. И.

Анализ устойчивости обтекания цилиндрического канала (с протоком и без протока) сверхзвуковым потоком невязкого и нетеплопроводного газа проведен с использованием двух математических моделей. Первая — модель в распределенных параметрах (МРП) — основана на интегрировании системы двумерных нестационарных уравнений Эйлера с выделением головной ударной волны. Вторая — модель в сосредоточенных параметрах (МСП) — описывает состояние газа параметрами, осредненными по объему, связанному с движущейся ударной волной. Это позволяет свести задачу к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Простой учет эффектов двумерности и запаздывания распространения возмущений в объеме делает МСП адекватно передающей основные свойства стационарного и нестационарного обтекания, которые получены с использованием МРП при несоизмеримо больших затратах машинного времени. Анализ устойчивости с применением линеаризованной МСП показал, что существует критическая длина полости, начиная с которой обтекание в однородном сверхзвуковом потоке становится неустойчивым. Схемная вязкость, присущая численной реализации МРП, либо вязкость реального потока стабилизируют течение до определенного уровня неравномерности в набегающем потоке, свыше которого происходит «жесткое» возбуждение колебаний. Это подтверждают расчетные [1] и экспериментальные [2] исследования. Качественные результаты, полученные в рамках МСП, существенно дополняют имеющиеся представления об обтекании полостей, полученные ранее из физических и численных экспериментов с МРП. Для канала с протоком увеличение расхода газа через канал приводит к постепенному затуханию колебаний.

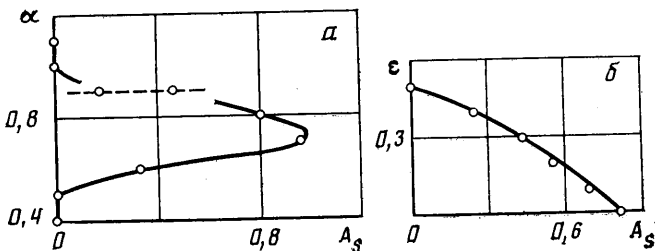
Одно из первых и немногочисленных расчетных исследований по проблеме возникновения автоколебательных режимов в полостях, проведенное в [1], показало, что математическое моделирование этого явления можно проводить в рамках двумерных уравнений газодинамики невязкого и нетеплопроводного газа. Неустойчивость возникает в достаточно глубоких полостях (глубина примерно равна или больше диаметра полости), если в набегающем потоке имеется стационарная неравномерность полного давления. Если же поток однороден, то даже сильные начальные возмущения затухают и устанавливается стационарный режим.

Получение периодического нестационарного решения при стационарных граничных условиях в рамках уравнений Эйлера — результат всегда привлекательный, но требующий тщательной проверки. Тем более что в ряде расчетных исследований в тех случаях, когда в экспериментах наблюдалась сильная неустойчивость, реализовывалось стационарное решение [3]. И наоборот, когда заведомо существует стационарный режим, в расчетах получался незатухающий колебательный процесс [4]. В данной работе постановка задачи (исходные уравнения и граничные условия в набегающем потоке) была полностью идентична [1]. Различие было лишь в методе интегрирования уравнений. В [1] применялась разностная схема 2-го порядка аппроксимации без выделения головной ударной волны, а в данной работе — схема 1-го порядка, но с выделением ударной волны. Подробности, касающиеся исходной системы уравнений, их разностной реализации и алгоритма выделения ударной волны, приведены в [5, 6].

1. Схема обтекания цилиндрического канала (полости) сверхзвуковым потоком идеального газа в приближении МРП показана на верхней половине фиг. 1. Направление оси x цилиндрической системы координат выбрано совпадающим с осью цилиндра, а начало координат совмещено с плоскостью входа в канал. В общем случае набегающий поток неравномерный.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчетная область включает поле течения внутри и вне канала и ограничена поверхностью ударной волны, участками поверхностей gc и ck , от которых требуется лишь, чтобы они были достаточно удалены от кромки входа в канал и соответствующим образом ориентированы в пространстве, так чтобы проекция скорости газа на внешнюю нормаль к ним была больше местной скорости звука. Внутри канала в сечении $x=L$ ставится условие протекания через перфорированную стенку, обеспечивающее критическую скорость истечения из отверстий [7]. В таком случае расход газа через канал регулируется параметром ϵ — относительной площадью отверстий ($\epsilon=0$ соответствует условию непротекания). Остальные границы области образованы непроницаемыми образующими цилиндра и осью симметрии. Как и в [1], неравномерность набегающего потока задается линейным распределением продольной компоненты скорости u по r

$$u = \begin{cases} (1-\alpha)u_\infty r/r_e + \alpha u_\infty, & 0 \leq r \leq r_e \\ u_\infty, & r > r_e \end{cases}$$

где $\alpha = u_0/u_\infty$, а u_0 , u_∞ и r_e — заданные константы. Давление p и плотность ρ принимаются постоянными и равными значениям в набегающем потоке.

Расчетная сетка, показанная на фиг. 1, связана с головной ударной

волной и существенно трансформируется в процессе ее движения. Для выбора числа ячеек расчетной сетки были воспроизведены некоторые варианты расчетов из [1]. При этом для $\varepsilon=0$ сравнивались осциллограммы давления на дне полости. При достаточно больших значениях неравномерности α , когда возникали автоколебания, полная воспроизводимость результатов достигалась на сетке с числом ячеек 240 в области Ω_1 и 300 в Ω_2 . На более грубой сетке, содержащей соответственно 120 и 195 ячеек, автоколебательный характер процесса сохранялся, хотя амплитуда колебаний уменьшалась на 20–25%. Наконец, увеличение числа ячеек соответственно до 540 и 600 не вело к сколько-нибудь заметному отличию результатов от первого варианта сетки.

Таким образом, при неоднородном набегающем потоке наблюдается потеря устойчивости течения. При равномерном набегающем потоке независимо от начальных условий (как и в [1]) со временем устанавливалось стационарное обтекание. Тем не менее есть основание полагать, что в таких ситуациях граница устойчивости определяется схемной вязкостью в численных экспериментах или реальной вязкостью в физических экспериментах и, следовательно, зависит от числа Рейнольдса Re . В частности, в экспериментах [2] такая зависимость проявлялась при приближении к $Re=10^5$. Так, течение в [2], будучи не чувствительным к малым возмущениям, имевшимся в эксперименте на турбулентных режимах ($Re>10^5$), после перехода к меньшим Re становилось неустойчивым.

Результаты расчетов с использованием МРП, показывающие изменение амплитуды колебаний ударной волны $A_s=(x_{smax}-x_{smin})/2$ в зависимости от параметров α и ε , приведены на фиг. 2. На фиг. 2, а дана зависимость A_s от α для $M_\infty=3$, $L=2$, $\varepsilon=0$ и $r_e=1$. Здесь и далее за масштаб длины взят радиус полости. В расчетах α изменялось от 1,1 до 0,4 с шагом 0,1 (точки на фиг. 2, а) и для каждого α расчеты проводились при двух различных начальных условиях. В первом случае перед входом в полость на расстоянии $x_s=-0,75$ располагался прямой фронт ударной волны, а параметры за ней принимались равными параметрам покоящегося газа с давлением и плотностью за прямым скачком. Во втором случае в качестве начального бралось поле течения, рассчитанное установлением по времени для равномерного набегающего потока, т. е. при $\alpha=0$.

Как показали расчеты, для всех α , кроме $\alpha=0,9$, реализовалось единственное решение — стационарное или автоколебательное. При $\alpha=0,9$ решение зависело от начальных условий, причем первым отвечал режим с большей амплитудой, а вторым — с меньшей. Частота колебаний в обоих случаях была практически одинакова. Двухзначность амплитуды колебаний при одинаковой частоте, как будет видно из разд. 2, может иметь место, если рассматриваемые значения α , ε и L отвечают границе устойчивости, а при численном исследовании, когда периодический режим определяется сопоставлением соседних максимумов колебаний, — при α , ε и L , близких к указанной границе (штриховая прямая). В расчетах выход на режим автоколебаний фиксировался по контролю решения на 8–10 периодах. Приближение к границе устойчивости сопровождалось уменьшением декремента нарастания (затухания) колебаний.

На фиг. 2, б дана зависимость амплитуды установившихся колебаний от ε при $M_\infty=3$, $L=2$, $r_e=1$ и $\alpha=0,8$. Значение ε изменялось от 0 до 0,6 с шагом 0,1. В этих расчетах протекание через перфорацию «включалось» внезапно в один и тот же момент времени при установившихся автоколебаниях, которые имели место при отсутствии протекания через канал ($\varepsilon=0$). Отметим, что при $\varepsilon=0,6$ стационарный режим обтекания достигался практически на одном периоде колебаний, тогда как при $\alpha=0,5$ существовал длительный колебательный процесс с малым декрементом затухания. Наконец, как и в [1], в неглубоких полостях ($L\leq 1$) при любых значениях α устанавливались свои стационарные режимы без автоколебаний.

2. В приближении МСП рассматривался объем $\Omega(t)$, ограниченный поверхностью ударной волны, звуковой поверхностью, стенками канала и выходным сечением. Состояние потока в $\Omega(t)$ описывается средними по объему значениями давления p , плотности ρ и скорости u . Перед ударной волной задается равномерный сверхзвуковой поток со скоростью u_∞ . На боковых стенках канала выполняется условие непротекания. Через звуковую поверхность газ вытекает со звуковой скоростью под углом β к оси x . В конечном сечении $x=L$ либо газ вытекает с критической скоростью, либо для тела без протока (полости) ставится условие непротекания. В первом случае предполагается наличие критического сечения, площадь которого составляет часть ($\epsilon \ll 1$) площади поперечного сечения канала.

Запишем уравнение сохранения массы и полной энергии в объеме $\Omega(t)$ с подвижной границей – ударной волной

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} A d\Omega - A_{\infty} \frac{d\Omega}{dt} = - \oint_{\Gamma} \mathbf{B} n d\gamma$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = (1+\nu) \int_0^{r_s} \left(\frac{D}{\cos \theta} - u_{\infty} \right) r^{\nu} dr \quad (2.1)$$

$$A = \left| \begin{array}{c} \rho \\ \rho(e+u^2/2) \end{array} \right|, \quad \mathbf{B} = \left| \begin{array}{c} RU \\ RU(i+U^2/2) \end{array} \right|$$

Здесь Γ – граница $\Omega(t)$; R, U, i – значения плотности, скорости и удельной энтальпии $e+p/\rho$ на границах объема; e – удельная внутренняя энергия; D – скорость элемента ударной волны относительно газа; θ – угол между нормалью к элементу ударной волны и направлением набегающего потока; r_s – радиус звуковой точки на ударной волне; $\nu=0$ или 1 соответственно для плоского и осесимметричного течений. К (2.1) добавляются уравнения состояния, которые в случае совершенного газа с показателем адиабаты κ имеют вид

$$e = p/(\kappa-1)\rho, \quad i = \kappa p/(\kappa-1)\rho$$

Упростим (2.1), предположив, что скорость газа в объеме мала и поэтому можно пренебречь слагаемыми, содержащими u^2 . Далее, будем полагать, что параметры на границах, входящие в правые части уравнений (2.1), и скорость ударной волны D в каждый момент времени зависят только от средних параметров в объеме. Тем не менее такая модель все еще незамкнута, так как требует знания формы ударной волны, звуковой линии и распределения угла β на ней. Дальнейшее упрощение достигается заменой истинной звуковой поверхности отрезком цилиндра, образующая которого соединяет кромку полости с ударной волной, а самой ударной волны – плоской поверхностью $x=x_s$, как показано на нижней половине фиг. 1. С учетом сказанного после осреднения по объему $\Omega(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} = [(1-\rho)(D-M_{\infty}) + m_{\infty} - m_* - (\nu+1)R_e V_e x_s] (L+x_s)^{-1}$$

$$\frac{dp}{dt} = \left[(p_{\infty} - p)(D-M_{\infty}) + m_{\infty} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{\infty}^2 \right) - m_* \frac{\kappa+1}{2} A_*^2 - (\nu+1) \frac{\kappa p}{\rho} R_e V_e x_s \right] (L+x_s)^{-1} \quad (2.2)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = D - M_{\infty}$$

Здесь индексы e и звездочка приписаны соответственно параметрам на цилиндрической границе за ударной волной и в критическом сечении на дне полости. Параметры обезразмерены отнесением плотности к ρ_{∞} , скорости – к a_{∞} , линейных размеров, как и ранее, – к радиусу канала r_a , времени – к r_a/a_{∞} , давления – к $\rho_{\infty} a_{\infty}^2$; M_{∞} – число Маха набегающего потока, m_{∞} – расход газа, втекающий в объем через ударную волну, $m_* = R_* A_* F_*$ – расход газа, вытекающий через критическое сечение. Вытекание за ударной волной происходит с сохранением энтропии, которую приобретает газ после прохождения через ударную волну. Поэтому параметры с индексом

ϵ и звездочка определяются следующим образом:

$$R_\epsilon = \rho \left(\frac{A_\epsilon}{a} \right)^{2/(\kappa-1)} \quad A_* = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{1/2} a, \quad R_* = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{1/(\kappa-1)} \rho$$

Условие на движущейся ударной волне дает зависимость скорости ударной волны и скорости звука за ней от параметров в объеме

$$D = \left(\frac{\kappa+1}{2} p + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right)^{1/2}, \quad a_s = \left[\frac{(\kappa+1) + (\kappa-1)\kappa p}{(\kappa-1) + (\kappa+1)\kappa p} \kappa p \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

В силу выписанных соотношений решение системы (2.2) зависит от параметра β , который в стационарном случае в рамках МСП не зависит от длины канала L . Стационарное решение (2.2) сводится к простому соотношению

$$x_s = \frac{m_\infty(1-\varphi)}{(\nu+1)R_\epsilon V_\epsilon} \quad (2.4)$$

с коэффициентом расхода $\varphi = m_*/m_\infty$. Средние по объему величины, входящие в R_ϵ и V_ϵ , на стационарном режиме определяются из условий на ударной волне и зависят (при фиксированном κ) только от M_∞ . Из (2.4) следует линейная зависимость отхода ударной волны по φ . Подтверждение линейного характера зависимости $x_s = x_s(\varphi)$ расчетами по существенно более строгой модели [8] позволяет выбрать значение β для правильной аппроксимации соотношением (2.4) всего диапазона режимов обтекания от $\varphi=0$ до 1 при фиксированном M_∞ . При этом коэффициент сопротивления полости или канала (при $\epsilon \neq 0$) вычисляется по формуле

$$C_x = [p_{0s}(1-\varphi) + p_s\varphi - p_\infty](1-\varphi)/M_\infty^2 \quad (2.5)$$

где p_s и p_{0s} — соответственно давление и давление торможения за ударной волной. Отметим, что результаты, полученные с использованием (2.5), практически совпадают с полученными приближенным методом Г. И. Тагановым; последние же сравниваются в [8] с результатами двумерного расчета.

Стационарные режимы, аппроксимируемые (2.4), можно получить и в процессе установления, интегрируя по времени систему (2.2). При этом выяснилось, что в случае внезапного изменения величины ϵ уравнения (2.2), не дают удовлетворительного описания эволюции течения по времени: процесс установления по времени при «сильном» изменении граничных условий в противоположность аналогичным результатам МРП протекает без заметных колебаний параметров. Чтобы ликвидировать указанный дефект МСП, дополним (2.3) еще одной дифференциальной связью

$$\tau \frac{dp_s}{dt} = p - p_s \quad (2.6)$$

которая имеет ясный физический смысл: изменение давления непосредственно за ударной волной p_s релаксирует к среднему давлению p в полости с временем релаксации $\tau = 2(L+x_s)/a$. Теперь в условие на движущейся ударной волне (2.3) вместо среднего давления p войдет определяемое уравнением (2.6) давление непосредственно за ударной волной p_s . Как будет видно из дальнейшего, система нелинейных уравнений (2.2) и (2.6) наряду с устойчивыми затухающими колебательными решениями при определенных значениях параметров задачи дает периодически колеблющееся (автоколебательное) решение.

Применительно к задаче обтекания полости ($\varphi=0$) была рассмотрена еще более простая модель, чем описываемая уравнениями (2.2) и (2.6): вместо уравнения энергии из (2.2) использовалось равенство скорости звука в объеме и скорости звука за ударной волной, т. е. $a=a_s$. Результаты расчетов, полученные с применением обеих моделей, на всех режимах (устойчивых и автоколебательных) практически не различались.

3. Линеаризованные уравнения последней модели разд. 2 имеют вид

$$\frac{d\Delta p}{dt} + z_1\Delta p_s + z_2\Delta p + z_3\Delta x_s = 0 \quad \frac{d\Delta x_s}{dt} - z_4\Delta p_s = 0, \quad (3.1)$$

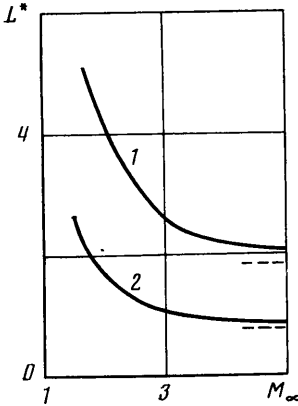
$$\frac{d\Delta p_s}{dt} - z_5(\Delta p - \Delta p_s) = 0$$

$$z_1 = \frac{a_s^2(\rho_s - 1)(\kappa + 1)}{4M_\infty L_\Sigma}, \quad z_2 = \frac{\kappa m_\infty}{2\rho_s L_\Sigma}$$

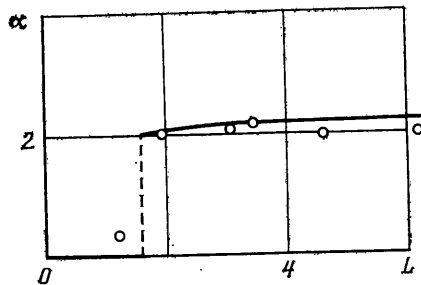
$$z_3 = \frac{\theta \rho_s a_s^3}{L_\Sigma}, \quad z_4 = \frac{\kappa + 1}{4M_\infty}, \quad z_5 = \frac{a_s}{2L_\Sigma}$$

$$\theta = (\nu + 1) \frac{2 \sin \beta}{2 + (\kappa - 1) \sin \beta}, \quad L_\Sigma = L + x_s$$

Подчеркнем, что все коэффициенты z_i в (3.1) положительны. Согласно критерию Рауса — Гурвица [9], для устойчивости «динамической системы» (3.1), характеристическое уравнение которой имеет вид



Фиг. 3



Фиг. 4

мы» (3.1), характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\lambda^3 + \lambda^2(z_2 + z_5) + \lambda(z_2 z_5 + z_1 z_5) + z_3 z_4 z_5 = 0$$

требуется выполнение следующих неравенств:

$$z_2 + z_5 > 0, \quad z_5(z_2 + z_1) > 0, \quad z_3 z_4 z_5 > 0$$

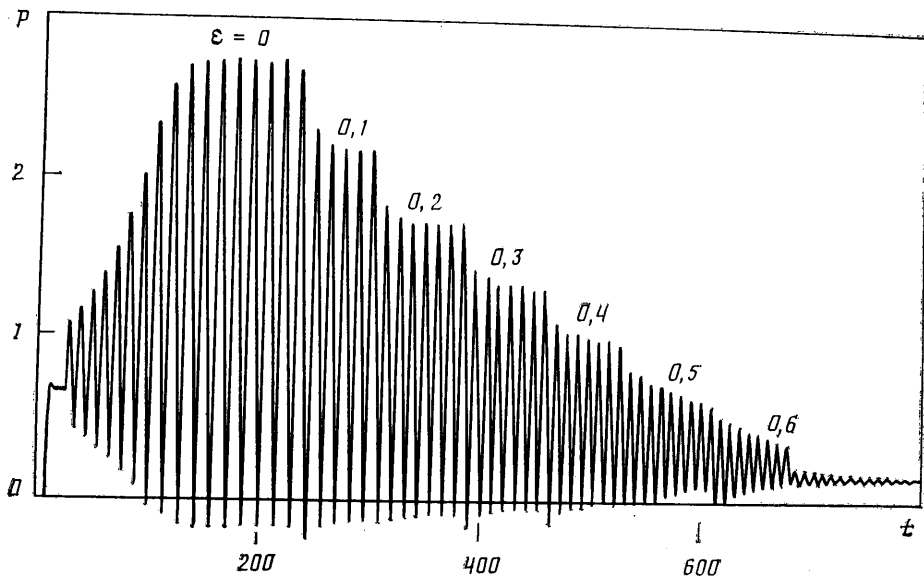
$$\begin{vmatrix} z_2 + z_5 & 1 \\ z_3 z_4 z_5 & z_5(z_1 + z_2) \end{vmatrix} > 0$$

Из-за положительности коэффициентов z_1, \dots, z_5 первые три из выписанных неравенств выполняются всегда. Последнее неравенство после подстановки коэффициентов приобретает вид

$$(1 + \kappa\mu/\eta) [(\kappa + 1)(\rho_s - 1)/2 + \kappa/\xi] - (\kappa + 1)^2/(\kappa - 1)\eta\mu - L\theta\rho_s(\kappa + 1) > 0 \quad (3.2)$$

$$\mu = 1 + \frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_\infty^2}, \quad \eta = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} - \frac{1}{M_\infty^2}, \quad \xi = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{M_\infty^2} \quad (3.2)$$

Из вида неравенства (3.2) следует, что оно может выполняться лишь при ограниченных значениях параметра L — длины канала (полости). Это определяет критическую длину полости L^* , при которой течение теряет устойчивость. При фиксированном β значение L^* зависит только от M_∞ , причем с увеличением M_∞ критическая длина уменьшается. На фиг. 3 показаны зависимости $L^* = L^*(M_\infty)$ для плоского и осесимметричного течений (соответственно кривые 1 и 2). В области над кривыми течение неустойчиво и в нелинейной динамической системе возникают автоколебания. В пределе при $M_\infty \rightarrow \infty$ значение L^* асимптотически стремится к величине, зависящей от β (штриховые линии). Важно отметить, что неустой-



Фиг. 5

чивость в рассматриваемой динамической системе возникает из-за введения релаксационного уравнения (2.6). Без этого динамическая система остается абсолютно устойчивой при любом изменении определяющих параметров.

Важно, что величина L^* , определяемая из линейного анализа, близка к значению критической длины полости, которая получена в [1] и выше в приближении МСП. В [1] приведены значения максимального и минимального давления на дне полости, которые реализуются в процессе автоколебаний при обтекании полостей различной длины неравномерным потоком с фиксированным M_∞ , где

$$M_\infty^2 = 2(a_\infty r_e^2)^{-1} \int_0^{r_e} ru^2 dr$$

Число Маха M_∞ фиктивного однородного потока введено в [1] для обобщения результатов численных экспериментов как мера неравномерности набегающего потока.

На фиг. 4 дана зависимость относительной амплитуды колебаний давления A_p ($A_p = (p_{\max} - p_{\min})/p_{st}$, где p_{st} — давление в полости «малой» длины, обтекание которой всегда устойчиво) от L . Сплошной линией показаны результаты, полученные с использованием МСП (уравнения (2.2), (2.6)), а значками — результаты, содержащиеся в [1]. Эти результаты в [1] получены для неравномерного сверхзвукового потока с линейным профилем скорости, изменяющейся от $M_\infty = 3$ при $r_e = 1$ до $M = 2,4$ на оси. Среднее значение M_∞ фиктивного однородного потока равно 2,79. Для МСП сначала было реализовано стационарное обтекание полости с числом $M_\infty = 3$. При этом использовалась абсолютно устойчивая МСП (без уравнения (2.6)). А затем вносилось возмущение — число M_∞ мгновенно уменьшалось до значения $M_\infty = 2,79$ с одновременным «включением» уравнения (2.6). Штриховой линией на фиг. 4 дана граница устойчивости $L^* = 1,6$, полученная в приближении МСП. Для значений $L < L^*$ колебания затухают и устанавливается новый стационарный режим обтекания. При $L > L^*$ амплитуда колебаний сначала растет, а после выхода на режим автоколебаний остается постоянной. Режим автоколебаний возникает после того, как ударная волна по мере возрастания амплитуды колебаний начинает за-

ходить внутрь полости. При $L=L^*$ реализуются режимы нейтральных колебаний, амплитуды которых зависят от начальных возмущений. Частота колебаний при этом была одинакова и близка к значению, определяемому по формуле $\omega = \sqrt{1/a_s/(L+x_s)}$. Частота автоколебаний в полостях при $L>L^*$ изменялась обратно пропорционально величине $L+x_s$ и хорошо соответствовала значениям, приведенным в [4].

Остановимся еще на одном результате, полученном с использованием МРП (фиг. 2, б) и подтвержденном расчетами на МСП. Если дно полости сделать проницаемым и организовать проток газа через полость, то по мере увеличения расхода газа амплитуда колебаний уменьшается. При некоторых значениях расхода течение становится абсолютно устойчивым. На фиг. 5 приведена осциллограмма процесса, в течение которого последовательно внезапно увеличивалась проницаемость дна ϵ . Эти результаты получены при $M_\infty=3$, $L=1,92$. Моменты очередного увеличения площади отверстий в дне хорошо видны на осциллограмме по изменению амплитуды колебаний скачка. Максимальная амплитуда соответствует обтеканию полости без протока ($\epsilon=0$). До $\epsilon=0,3$ включительно реализуются автоколебательные режимы со своей амплитудой.

Авторы признательны А. Н. Крайко, А. А. Осипову и Л. Г. Миллеру за полезные обсуждения и Г. В. Егоровой за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваграменко Я. А., Ляхов В. Н., Устинов В. М. Пульсирующий режим при натекании стационарного неоднородного потока на преграду // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 64—71.
2. Антонов А. Н., Шалаев С. П. Экспериментальное исследование нестационарного течения в полостях, обтекаемых сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 180—183.
3. Дубинская Н. В., Иванов М. Я. Численное исследование стационарных режимов взаимодействия сверхзвуковой недорасширенной струи с плоской преградой, расположенной перпендикулярно к ее оси // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 49—56.
4. Милешин В. И., Тилляева Н. И. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по обтеканию осесимметричных воздухозаборников на режимах с выбитой ударной волной // Уч. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 2. С. 135—141.
5. Тилляева Н. И. Численный метод расчета обтекания плоского воздухозаборника сверхзвуковым потоком на режимах с выбитой ударной волной // Уч. зап. ЦАГИ. 1979. Т. 10. № 2. С. 30—40.
6. Крайко А. Н., Макаров В. Е., Тилляева Н. И. К численному построению фронтов ударных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 3. С. 716—723.
7. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Миллер Л. Г. К распаду произвольного разрыва на перфорированной перегородке // ПМТФ. 1981. № 3. С. 95—103.
8. Тилляева Н. И. Расчет обтекания тела с протоком сверхзвуковым потоком газа на режимах с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 160—163.
9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.VII.1986