

УДК 532.59

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН НАД ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ПОДВОДНЫМ ЖЕЛОБОМ

БАХОЛДИН И. Б.

На основе нелинейного лучевого метода [1] получены автомодельные решения, описывающие набегание однородной уединенной волны на полубесконечный прямолинейный желоб. Ранее при исследовании набегания волны на желоб [2] условия на разрывах, имеющих в решениях, выводились из предположения о малости их интенсивности. Использование в данной работе условий на разрывах, получаемых при исследовании взаимодействия солитонов [3–5], дало возможность построить ряд новых решений, учесть эффекты отражения волн и образования зоны тени за желобом. Установлено, какие типы решений возникают в зависимости от соотношений между параметрами волны и относительной глубиной желоба. Для того чтобы автомодельные решения существовали при всех значениях параметров, потребовалось ввести ранее не встречавшийся [5–7] тип разрыва.

1. В соответствии с нелинейным лучевым методом предполагается, что длина волны солитона много меньше радиуса кривизны фронта и относительное изменение глубины жидкости на участке порядка длины волны мало. Тогда каждая точка фронта движется по нормали к нему со скоростью V , зависящей от плотности энергии E на единицу длины фронта и невозмущенной глубины h , при этом энергия участка фронта, заключенного в лучевой трубке, сохраняется [1]. Параметры волны определяются нелинейной системой гиперболического типа [2]

$$\frac{\partial}{\partial y} (E \cos \alpha) - \frac{\partial}{\partial x} (E \sin \alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin \alpha}{V} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos \alpha}{V} = 0 \quad (1.1)$$

$$V(E, h) = \sqrt{h} (1 + \frac{3}{8} E^2 / h^2)$$

где x, y — горизонтальная система координат; α — угол между касательной к фронту и осью x . Вместо параметра E ниже используется параметр $\beta = E^{1/2} / h$, имеющий смысл угла между характеристиками системы (1.1). Относительная амплитуда солитона равна $0,75\beta^2$. Величина β предполагается малой [5].

При решении системы (1.1) в некоторых случаях необходимо вводить разрывы, представляющие собой изломы фронта со скачком плотности энергии [2]. В [5] предложено использовать условия на разрывах, получаемые на основе исследования взаимодействия солитонов, фронты которых расположены под углом друг к другу [3, 4]. Тип взаимодействия зависит от значений β первого и второго солитонов и угла ψ между их фронтами. При $\psi = 1,5(\beta_1 + \beta_2)$ возникает конфигурация из трех солитонов. Их параметры связаны соотношениями

$$\beta_3 = \beta_2 - \beta_1, \quad \alpha_1 = \beta_2 - 0,5\beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_1 - 0,5\beta_2, \quad \alpha_3 = -0,5(\beta_1 + \beta_2) \quad (1.2)$$

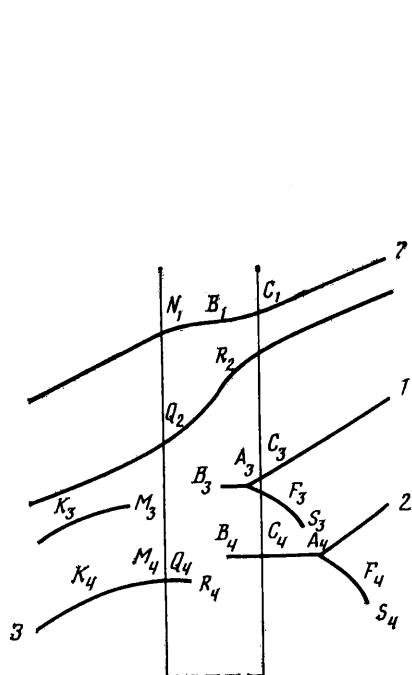
где величины α_i определены в системе координат, выбранной таким образом, что точка пересечения фронтов солитонов движется вдоль оси y , а первый солитон ($\beta_2 > \beta_1$) находится справа от нее. При $0 < \psi < 1,5(\beta_2 - \beta_1)$

и $\psi > 1,5(\beta_1 + \beta_2)$ возникают пересечения волн, т. е. конфигурации из четырех солитонов, в которых волны, движущиеся сзади, могут рассматриваться как продолжения передних волн, поскольку их параметры совпадают.

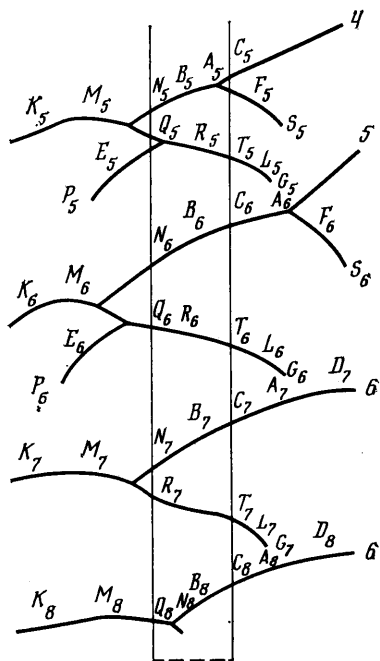
Излом фронта, составленный из фронтов передних двух волн трехсолитонных конфигураций и пересечений, можно рассматривать как разрыв. Наклон линии разрыва $U = dx/dy$ определяется из соотношения [2]

$$[\sin \alpha/V]U + [\cos \alpha/V] = 0 \quad (1.3)$$

В случаях разрывов типа трехсолитонной конфигурации и пересечения при $\psi > 1,5(\beta_1 + \beta_2)$ у волн, движущихся сзади, характеристики уходят от линии разрыва. Параметры этих волн определяются после нахождения решения для передних волн. Этих двух типов разрывов было достаточно



Фиг. 1



Фиг. 2

для нахождения решений некоторых модельных задач о набегаии волны на хребет и впадину [6-7].

В случае разрыва типа пересечения при $\psi < 1,5(\beta_2 - \beta_1)$ у второй волны одна характеристика приходит на линию разрыва и одна уходит. Решение для передних волн не может быть найдено независимо от решения для волн сзади. Ниже показано существование решений с таким разрывом.

2. Пусть при $y > 0$ рельеф дна имеет вид $h = h(x)$, $dh/dx < 0$, при $0 < x < l$, $dh/dx > 0$ при $-l < x < 0$, $h(x) = h_0$ при $|x| > l$. Такой рельеф моделирует прямолинейный желоб. В области $y < 0$ расположен конец желоба. На желоб справа ($\alpha_0 > 0$) набегают однородная уединенная волна с прямолинейным фронтом.

В [6, 7] рассмотрены автомодельные решения, параметры которых зависят от полярного угла $\varphi = \arctg(x/y)$, описывающие набегаии однородной волны на полубесконечный хребет с линейчатым рельефом ($h = h(\varphi)$). Случай прямолинейного полубесконечного хребта рассматривался в этих работах как частный случай хребта с линейчатым рельефом. Аналогичный подход можно применить для исследования решений о набегаии на желоб. Автомодельные решения формируются при значитель-

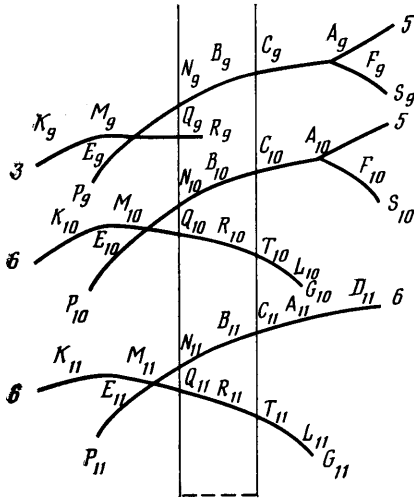
ном по сравнению с шириной желоба и размерами его конечной зоны удаления волны от конца желоба. Как и в случае хребта, решения содержат однородные участки, разрывы, линии которых прямые, проходящие через конец желоба, а также участки стационарных решений над желобом и центрированных простых волн вне его [2], описываемые уравнениями [7]

$$\alpha\beta^3=C_1, \quad H+\alpha^2+3/4\beta^2=C_2 \quad (2.1)$$

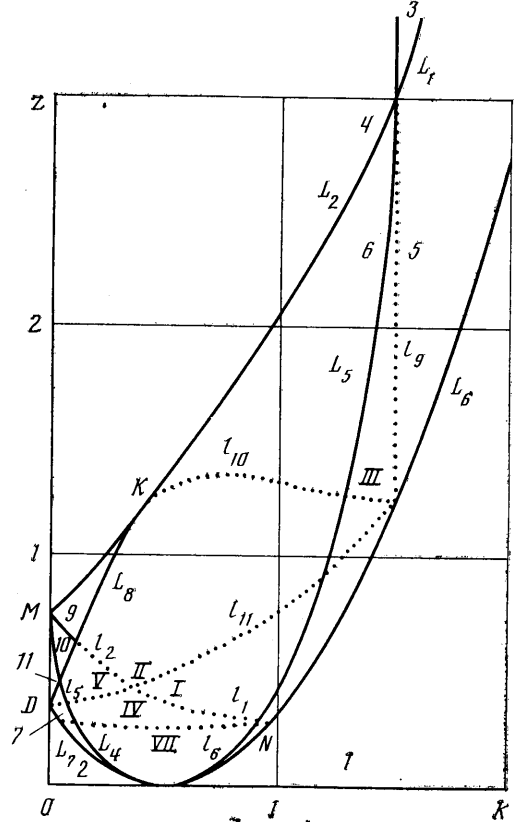
$$\alpha\pm 1,5\beta=C_3, \quad \alpha+\varphi=\pm 0,5\beta \quad (2.2)$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые константы, $H=(h-h_0)/h_0$ — относительная глубина, которая предполагается малой. Параметры стационарных решений (2.1) не зависят от y . Среди них имеются дозвуковые решения, в которых характеристики расположены по разные стороны от изолинии глубины, величина β уменьшается, а величина α увеличивается при увеличении глубины, и сверхзвуковые — с противоположными свойствами.

В [7] исследованы автомодельные решения, описывающие набегание полубесконечной уединенной волны на перепад



Фиг. 3



Фиг. 4

глубины, для краткости именуемый впадиной. Желоб можно представить в виде двух перепадов глубины, а затем использовать результаты, полученные для перепада, для построения решений о набегании на желоб. Имеется 11 типов решений. Фронты волн их изображены на фиг. 1—3. В тех случаях, когда справа или слева от середины желоба решение совпадает с решением для перепада, указан тип этого решения, при этом справа сохранены те же буквенные обозначения точек, разделяющих различные участки фронта, что и в [7]. Кривые AD, KM, PE, FS, LG соответствуют центрированным простым волнам, кривые NB, RT и QR — участкам сверх- и дозвуковых стационарных решений.

На фиг. 4 показано расположение областей различных типов решений на плоскости параметров $k=\alpha_0/\beta_0$ и $z=H/\beta_0^2$, где H — относительная глубина на середине желоба. Определяющие параметры выбраны с учетом закона подобия автомодельных решений [7]. Области пронумерованы

арабскими цифрами. Их границы показаны сплошными линиями, среди них имеются кривые L_1, L_2, L_4, L_5, L_6 , уравнения которых приведены в [7]. В области между кривыми L_4 и L_7 помимо решений, указанных на фиг. 4, имеются решения типов 2 и 8.

Кривые L_4 и L_6 определяют относительную глубину, при которой выходят на звуковую точку ($\alpha = \beta/2$) решения (2.1) со значениями параметров α_0 и β_0 при $H=0$. Поэтому в областях, расположенных ниже кривых L_6 и L_4 , существуют решения типов 1 и 2, в которых над желобом имеются сверх- и дозвуковое решение соответственно и нет возмущений вне желоба.

Для построения решений остальных типов можно принять, что правее середины желоба решение совпадает с решением для перепада, а затем найти решение слева. В случаях, когда волна справа не доходит до середины желоба, решение слева можно найти независимо от решения справа, воспользовавшись результатами для перепада. Так, в решении типа 3 волна слева не доходит до края желоба и заканчивается центрированной простой волной (кривая K_3M_3 на фиг. 1). В решении типа 4 слева решение соответствует типу 3 для перепада.

В области, заключенной между кривыми L_1, L_2 и L_6 , справа решение для перепада выходит на середине желоба на звуковую точку. Стационарные дозвуковые решения (кривые A_5B_5, CB на фиг. 2) можно продолжить слева сверхзвуковыми стационарными решениями (кривые BN), как это делалось в [2], а затем соединить их слева с однородной волной. В соответствии с (2.1) и (1.3) в этих решениях скорости точки пересечения фронта с краями желоба справа и слева должны совпадать. Сравнение скоростей показало, что соединение возможно только через центрированные простые волны (кривые KM) и разрыв типа трехсолитонной конфигурации. В решении типа 8 разрыв расположен на склоне желоба, слева от линии разрыва находится дозвуковое стационарное решение (кривая Q_8N_8).

В области между кривыми L_4 и L_7 имеются три решения типов 2, 7, 8. При исследовании набегания волны на хребет также было выявлено три решения, одно из которых неустойчивое [7]. Для желоба неустойчивым решением является решение типа 8, поскольку оно содержит трехсолитонную конфигурацию, разделяющую сверх- и дозвуковые стационарные решения таким образом, что уклон дна направлен в ту сторону, где решение сверхзвуковое. Неединственность автомодельного решения о набегании волны на желоб, так же как и в случае хребта [7], связана с учетом стадии формирования автомодельного решения на конце желоба.

Кривая L_7 соответствует решению промежуточного типа между типами 7 и 8. Разрыв в нем находится на краю желоба. Для построения графика кривой L_7 была выписана определяющая это решение система из уравнений типа (1.2), (2.1), (2.2), так же как это делалось для нахождения уравнений кривых L_1-L_6 [7], а затем решена численно. Кривой L_4 соответствует решение промежуточного типа между типами 2 и 8 с разрывом нулевой интенсивности на середине желоба. Решения промежуточного типа между типами 2 и 7 нет.

3. Решения типов 5, 6, 7 формально, т. е. рассматривая только передний фронт, можно построить во всей области, заключенной между кривыми L_1, L_2 и L_6, L_7 . Однако слева от желоба в этих решениях имеется волна, отделившаяся от переднего фронта в трехсолитонной конфигурации. Она может взаимодействовать с желобом (см. фиг. 2). На фронте этой волны могут возникать разрывы, линии которых расположены левее линии разрыва на переднем фронте. В этом случае решений указанных выше типов не существует, в связи с чем для этих решений необходимо исследовать отделившуюся волну.

Для исследования взаимодействия отделившейся волны с желобом были использованы результаты для перепада глубины [7]. Решения ти-

пов 1-3, описывающие набегание полубесконечной волны на перепад, описывают также набегание полубесконечной волны на желоб, так как волна в них не доходит до края склона. Чтобы получить решения типов 4-7, описывающие набегание полубесконечной волны на желоб, необходимо принять, что до середины желоба решение совпадает с решением для перепада, а затем продолжить его стационарным сверхзвуковым решением и закончить центрированной простой волной вне желоба. На фиг. 2 для отделившейся волны показаны фронты, соответствующие решениям типов 4, 5, 7.

Области различных типов решений для отделившейся волны на фиг. 4 пронумерованы римскими цифрами, их границы показаны пунктирными линиями. В области $k > 1,5$ отделившаяся волна с желобом не взаимодействует. Нумерация кривых l_i , разделяющих различные области, сохранена такой же, как и кривых L_i в [7], кривые l_{10} и l_{11} соответствуют прямым $\alpha_0 = 0$ и $1,5\beta_0$. Для построения графиков кривых l_i были численно решены системы уравнений, составленные из уравнений, определяющих решение для переднего фронта, соотношений (1.2), связывающих параметры на переднем фронте с параметрами отделившейся волны, и уравнений кривых L_i [7] для параметров отделившейся волны. Значения параметра k в точках пересечения кривых l_i с кривыми L_7, L_2, L_6 (точки D, K, N на фиг. 4), уравнение кривой l_2 и уравнения кривых l_{10}, l_{11} в области между кривыми L_5 и L_6 находятся аналитически

$$D : k=0; \quad K : k=\frac{3}{2}(2-\sqrt{3}); \quad N : k=[\frac{1}{6}(\sqrt{2}+\sqrt{20})]^2$$

$$l_2 : z=\frac{3}{4}(1-\frac{2}{3}k)^2; \quad l_{11} : z=(1-\sqrt{3}/3)(k^2+\frac{3}{4})$$

$$l_{10} : z=\left(k_1^2 + \frac{3}{4} - \sqrt{2}k_1\right) \frac{(1+k^2)}{(1+k_1^2)}, \quad k_1 = \frac{(k+1,5)}{(2k-1)}$$

Было установлено, что в решениях, соответствующих точкам K и N , линия разрыва на отделившейся волне совпадает с линией разрыва на переднем фронте. Поэтому через эти точки проходит кривая L_8 , отделяющая область DMK (см. фиг. 4), в которой решений типа 6 и 7 не существует. Воспользовавшись соотношениями (1.2), можно установить, что при слиянии линий разрывов в решениях, соответствующих кривой L_8 , возникает конфигурация из четырех солитонов, в которой параметры волн спереди и сзади совпадают. При этом выполняется равенство $\alpha_1 - \alpha_2 = 1,5(\beta_2 - \beta_1)$, где индексами 1 и 2 обозначены параметры передних волн справа и слева от линии разрыва. Такая конфигурация может рассматриваться как пересечение, в котором $\psi = 1,5(\beta_2 - \beta_1)$.

Для получения решений типов 9, 10, 11 (см. фиг. 3) справа и слева решения строились независимо как решения о набегании полубесконечной волны на желоб. Для области параметров DMK при пересечении фронтов этих решений выполняется неравенство $\alpha_1 - \alpha_2 < 1,5(\beta_2 - \beta_1)$. Кривая, разделяющая области решений типа 9 и 10, описывается тем же уравнением, что и l_2 .

Ранее [5] указывалась невозможность существования разрывов типа пересечения при $\psi < 1,5(\beta_2 - \beta_1)$ в связи с их неэволюционностью, т. е. наличием только одного условия на разрыве (1.3) и уходящей характеристики во второй волне. В данном случае существование решения с таким разрывом возможно из-за того, что движущаяся сзади волна взаимодействует с желобом. В решении типа 9 имеется дополнительное решение $\alpha_2 = 0$. Необходимость выполнения неравенства $\alpha = \beta/2$ на середине желоба в решениях типов 10 и 11 приводит к условию [7].

$$\alpha_2^2 + \frac{3}{4}\beta_2^2 - \sqrt{2}|\alpha_2|\beta_2^3 = H$$

Таким образом, при набегании волны на желоб во всех случаях, кроме решений типов 1 и 2, амплитуда волны за желобом меньше, чем в набе-

гающей волне. В случае решения типа 3 за желобом образуется зона тени. Перед желобом, а также над ним амплитуда может быть как понижена, так и повышена, возможно частичное и полное отражение волны.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth. Pt 2 // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46. Pt 3. P. 611—622.
2. *Куликовский А. Г., Реутов В. А.* Распространение нелинейных волн над полубесконечными подводными впадинами и хребтами // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1980 № 2. С. 53—61.
3. *Miles J. W.* Obliquely interacting solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. Pt 1. P. 157—169.
4. *Miles J. W.* Resonantly interacting solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. Pt 1. P. 171—179.
5. *Бахолдин И. Б.* Разрывы переменных, характеризующих распространение уединенных волн в слое жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1984. № 3. С. 87—93.
6. *Бахолдин И. Б.* Распространение уединенных волн над подводными хребтами // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985. № 1. С. 86—93.
7. *Бахолдин И. Б.* Автомодельные решения, описывающие распространение уединенных волн над подводными хребтами и впадинами // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985. № 5. С. 137—144.

Москва

Поступила в редакцию
16.XII.1986