МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1987

УДК 532.527:534.2

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ВИХРЕВЫМ КОЛЬЦОМ

КОПЬЕВ В. Ф., ЛЕОНТЬЕВ Е. А.

На основе динамики жидкости исследуются механизмы генерации и рассеяния звука вихревым кольцом. Вихревое кольцо может служить простой динамической моделью крупномасштабных структур, наблюдаемых в сдвиговых течениях. Кроме того, оно, по-видимому, является наиболее простым для изучения вихревым объектом, который можно создать на опыте. Исследование рассеяния звука преследует также цель определения степени воздействия звука на вихрь, его избирательности в зависимости от таких параметров, как частота звука, угол падения волны и т. д.

Возмущенное движение рассматривается на фоне стационарного движения кольца. На основе линейной динамики несжимаемой жидкости определено возмущенное движение в ядре вихря. По теории Лайтхилла найдены два члена разложения по числу M дальнего звукового поля, порождаемого возмущениями в ядре. Вычислены звуковая мощность и направленность излучения, инкремент акустической неустойчивости. Показано, что рассеяние звука вихревым кольцом носит резонансный характер, определена амплитуда рассеяния вблизи резонанса. Воздействие звука на гидродинамическую структуру течения в ядре вихревого кольца оказывается особенно интенсивным вблизи резонансов и проявляется за время, малое по сравнению с характерным временем акустической неустойчивости.

Родственная задача об излучении звука вихрем Кельвина рассмотрена в [1, 2]. Акустическая неустойчивость вихря Кельвина впервые обнаружена в [1], а объяснение механизма неустойчивости дано в [2]. Резонансное рассеяние звука на таком вихре исследовалось в [2, 3]. В [2] показано, что комплексные собственные частоты, полученные в [1], соответствуют полюсам амплитуды рассеяния. Нерезонансное рассеяние звука на вихревом кольце рассмотрено в [4, 5].

1. Звуковое поле вихревого кольца. Рассматривается следующая задача: имеем тонкое вихревое кольцо радиуса a с ядром радиуса α ($\mu=\alpha/a\ll\ll 1$), которое движется с постоянной скоростью V_0 в безграничной среде. Пусть на ядро вихря наложены малые нестационарные возмущения, не нарушающие осевой симметрии течения, характерные частоты ω которых удовлетворяют условию акустической компактности вихря как целого: $\omega a/c_0\ll 1$, где c_0 — постоянная скорость звука. Ставится вопрос об определении этих возмущений и порождаемого ими звукового поля.

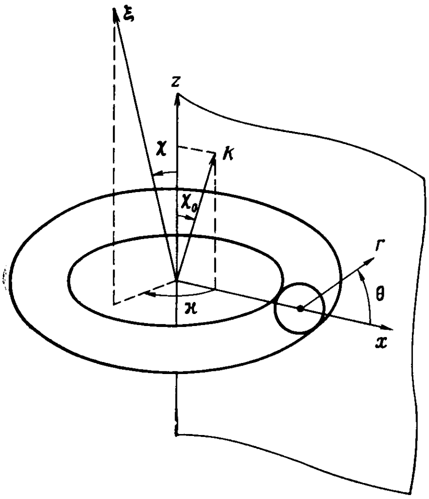
Звуковое давление p в дальнем поле определяется несжимаемым возмущенным движением только в ядре вихря, где сосредоточена завихренность [6]. Выражение для p представляет собой мультипольное разложение, два первых члена которого имеют вид

$$p(\xi,t)=\frac{[\dddot{Q}_{ij}]}{4\pi c_0{}^2\xi}\frac{\xi_i\xi_j}{\xi^2}+\frac{[\dddot{Q}_{ij}]}{4\pi c_0{}^2\xi}\frac{M_{0i}\xi_j+M_{0j}\xi_i}{\xi}-\frac{[\dddot{D}_{ijk}]}{4\pi c_0{}^3\xi}\frac{\xi_i\xi_j\xi_k}{\xi^3} \tag{1.1}$$

$$Q_{ij}(t)=\frac{\rho_0}{3}\int[\xi,\Omega]_i\xi_j\,d^3\xi,\qquad \mathbf{L}=[\Omega,\mathbf{v}]$$
$$D_{ijk}(t)=\frac{\rho_0}{2}\int[L_i\xi_j\xi_k+\delta_{ij}L_k\xi^2-2\delta_{ij}\xi_k(\xi,\mathbf{L})]\,d^3\xi \tag{1.2}$$

где ξ_i — координаты точки наблюдения в системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_0$, $\xi=\sqrt{\xi_i{}^2}$, $M_0=V_0/c_0$. Величины в квадратных скобках берутся в момент времени $t-R_1/c_0$, причем $R_1(1-M_0^2)=(M_0,\ \xi)-R^*$, $R^*=\sqrt{\xi^2(1-M_0^2)+(\mathbf{M}_0\xi)^2}$, ρ_0 — постоянная плотность, $\mathbf{v}$ — скорость несжимаемого течения в неподвижной системе отсчета, убывающая как ξ^{-3} на бесконечности. Входящие в (1.1) квадрупольный и октупольный моменты Q_{ij} и D_{ijk} определяются несжимаемым полем скорости в виде интегралов по области, в которой отлична от нуля завихренность $\mathbf{\Omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Перейдем теперь к определению величин, входящих в правые части формул (1.1), (1.2).

2. Возмущенное движение вихревого кольца. Определение точной формы поперечного сечения ядра кольца, согласующейся со стационарным характером движения, является довольно сложной задачей. Существенное упрощение получается при рассмотрении тонких вихревых колец, для которых форма ядра приблизительно круговая, а исходное стационарное и возмущенное нестационарное решения эффективно могут быть найдены разложением по малому параметру μ, характеризующему тонкость кольца.



Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости, вихревые линии в которой являются окружностями, заполняющими внутренность тора. В сечение вихревого кольца осевой плоскостью xz (см. фигуру) введем координаты r, θ, в которых граница области, где сосредоточена завихренность, описывается уравнением $r=\alpha f(\theta)$, $\alpha\ll a$. Пусть модуль вектора $\mathbf{\Omega}$ изменяется линейно с расстоянием x до оси симметрии кольца: $\Omega=|\mathbf{\Omega}|=\Omega_0 x/a$. Тогда в системе координат, где жидкость на бесконечности покоится, движение кольца заключается лишь в деформации и поступательном перемещении границы при неизменности распределения Ω внутри ядра. Эволюция границы вихря определяется в соответствии с тем, что она является жидкой поверхностью. Если ее уравнение записать в неявном виде $\Phi(r,\ \theta,\ t)\equiv r-\alpha f(\theta,\ t)=0$, то это динамическое условие можно представить соотношением [7]

$$\frac{d\Phi}{dt}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\Phi\right)\Bigg|_{r=\alpha f(\theta,t)}=0 \qquad (2.1)$$

$$v_x=\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad v_z=-\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (2.2)$$

$$\psi=-\frac{a}{2\pi}\int\Omega(x',z')B(x,z,x',z')\,dx'\,dz',\qquad k=\sqrt{1-k'^2} \qquad (2.3)$$

$$B=\frac{\sqrt{xx'}}{a}\left[\left(\frac{2}{k}+k\right)F(k)-\frac{2}{k}E(k)\right],\qquad k'^2=\frac{(x-x')^2+(z-z')^2}{(x+x')^2+(z-z')^2}$$

Здесь $F(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, ψ — функция тока. В силу зависимости $\Omega=\Omega_0 x/a$ функция тока (2.3) и скорость (2.2) являются функционалами только формы границы $f(\theta,\ t)$, а условие (2.1) оказывается замкнутым интегродифференциальным уравнением для $f(\theta,\ t)$. По известной $f(\theta,\ t)$ соотношения (2.2) позволяют определить эволюцию поля скорости во всем пространстве. Для определения же звукового поля (1.1), (1.2) достаточно знать поле скорости $\mathbf{v}$ только в ядре вихря, что является существенным упрощением.

Все величины будем искать в виде разложения по малому параметру ε, характеризующему отклонение от стационарного состояния, ограничиваясь лишь линейными по ε членами

$$r=\alpha f(\theta,t)=\alpha[f_0(\theta)+\varepsilon f_1(\theta,t)],\quad \psi=\psi_0(r,\theta)+\varepsilon\psi_1(r,\theta,t),$$
$$\mathbf{v}=\mathbf{U}(r,\theta)+\varepsilon\mathbf{u}(r,\theta,t)$$

Величины f_0, ψ_0, $\mathbf{U}$ характеризуют исходное стационарное состояние, существование которого доказано в [8]. При этом вычисления проводятся в системе отсчета, движущейся со скоростью кольца $\mathbf{V}_0$, которая сама подлежит определению. В свою очередь каждая из этих функций ищется в виде разложения по малому параметру μ тонкости кольца. Предварительно обезразмерим координату r, функцию тока ψ, скорость $\mathbf{v}$, время t и частоту ω соответственно величинами α, $^1/_2\Omega_0 a\alpha^2$, $^1/_2\Omega_0\alpha$, $2/\Omega_0$ и $^1/_2\Omega_0$, сохраняя для них прежние обозначения. В координатах r и θ компоненты скорости и функция тока связаны соотношениями

$$v_r=\frac{1}{r(1+\mu r\cos\theta)}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v_\theta=-\frac{1}{1+\mu r\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\tag{2.4}$$

В стационарном случае величины $\mathbf{V}_0$ и f_0, определяющие ψ_0 и $\mathbf{U}$, выбираются в соответствии с (2.1) так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$\left[U_r-\frac{U_\theta}{f_0(\theta)}\frac{\partial f_0}{\partial\theta}\right]\Bigg|_{r=f_0(\theta)}=0$$

$$V_{0z}=\frac{\mu}{2}\left[\ln\frac{8}{\mu}-\frac{1}{4}\right],\quad f_0(\theta)=1,\quad \psi_0=\frac{r^2}{2}+\frac{5}{8}\mu(r^2-1)r\cos\theta$$
$$U_r={}^5/_8\mu(1-r^2)\sin\theta,\quad U_\theta=-r-{}^5/_8\mu({}^7/_5r^2-1)\cos\theta$$

Здесь все величины выписаны с точностью до членов $O(\mu^2\ln\mu)$.

Рассмотрим нестационарные возмущения. Равенства (2.1), (2.4) в линейном по ε приближении дадут

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial t}-f_1\frac{\partial}{\partial r}\left(U_r-\frac{U_\theta}{r}\frac{\partial f_0}{\partial\theta}\right)-u_r+\frac{u_\theta}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial\theta}+\frac{U_\theta}{f_0}\frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right]\Bigg|_{r=f_0(\theta)}=0\tag{2.5}$$

$$\psi_1(r,\theta,t)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta',t)\,(1+\mu r'\cos\theta')B(r,\theta,r',\theta')r'\,dr'\,d\theta'\tag{2.6}$$

$$\int_0^{2\pi} f_1(\theta,t)f_0(\theta)\,[1+\mu f_0(\theta)\cos\theta]d\theta=0\tag{2.7}$$

Условие (2.7) — есть условие равенства объемов возмущенного и невозмущенного колец (изозавихренность). Соотношение (2.5) после подстановки в него u_r и u_θ (2.6), (2.4) дает эволюционное уравнение для возмущенной границы вихря. Зависящее от времени возмущенное решение ищем в виде $f_1(\theta,t)=f_1^{(0)}+\mu f_1^{(1)}+O(\mu^2\ln\mu)$. Условие нормировки (2.7) дает

$$\int_0^{2\pi} f_1^{(0)}\,d\theta=0$$

Тогда для функции тока ψ_1 член порядка $O(\mu\ln\mu)$ окажется равным нулю и для величин ψ_1 и $\mathbf{u}$ будут справедливы разложения

$$\psi_1(r,\theta,t)=\psi_1^{(0)}+\mu\psi_1^{(1)}+O(\mu^2\ln\mu)$$

$$\varphi_1^{(0)}(r,\theta,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1^{(0)}(\theta',t)\ln k_0'\,d\theta',\qquad k_0'^2=1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')$$

$$\psi_1^{(1)}(r,\theta,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1^{(1)}(\theta',t)\ln k_0'\,d\theta'+\frac{r\cos\theta}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1^{(0)}(\theta',t)\ln k_0'\,d\theta'+$$

$$+\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1^{(0)}(\theta',t)\cos\theta'\ln k_0'\,d\theta' \tag{2.8}$$

$$u_r=u_r^{(0)}+\mu u_r^{(1)}+O(\mu^2\ln\mu),\qquad u_\theta=u_\theta^{(0)}+\mu u_\theta^{(1)}+O(\mu^2\ln\mu)$$

$$u_r^{(0)}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\theta},\qquad u_r^{(1)}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\theta},\qquad u_\theta^{(0)}=-\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial r}$$

$$u_\theta^{(1)}=-\frac{\partial\psi_1^{(1)}}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial r}$$

Собирая теперь в уравнении (2.5) члены при одинаковых степенях μ, получим

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial t}-\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial\theta}+\frac{1}{2\pi}\fint f_1^{(0)}(\theta',t)\operatorname{ctg}\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial t}-\frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial\theta}+\frac{1}{2\pi}\fint f_1^{(1)}(\theta',t)\operatorname{ctg}\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'=R(\theta,t\,|\,f_1^{(0)}(\theta,t)) \tag{2.10}$$

$$R(\theta,t\,|\,f_1^{(0)}(\theta,t))=-\frac{\sin\theta}{4\pi}\fint f_1^{(0)}(\theta',t)\ln[1-\cos(\theta-\theta')]\,d\theta'+$$

$$+\frac{\cos\theta}{4}\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{4\pi}\fint f_1^{(0)}(\theta',t)\operatorname{ctg}\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'-$$

$$-\frac{3}{4\pi}\fint f_1^{(0)}(\theta',t)\cos\theta'\operatorname{ctg}\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'-\frac{5}{4}\sin\theta f_1^{(0)}$$

Черточка на знаке интеграла означает, что интеграл понимается в смысле главного значения, все интегралы берутся в интервале от 0 до 2π. Легко проверить, что

$$\fint e^{in\theta'}\operatorname{ctg}\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'=\frac{2\pi i\exp(in\theta)\,|n|}{n},$$

$$\fint e^{in\theta'}\ln[1-\cos(\theta-\theta')]\,d\theta'=-\frac{2\pi}{n}e^{in\theta}$$

Тогда уравнение (2.9) определяет набор собственных решений $f_1^{(0)}=\cos(n\theta+\omega_n t)$ с собственными частотами $\omega_n=n-1$, представляющих собой в этом приближении аналог кельвиновских возмущений плоского кругового вихря. С помощью уравнения (2.10) найдем добавки к каждому собственному решению $f_1^{(0)}$

$$f_1^{(1)}=\frac{n^2-9n+2}{8n}\cos[(n-1)\theta+\omega_n t]+\frac{n^2+n-2}{8n}\cos[(n+1)\theta+\omega_n t)] \tag{2.11}$$

Несмотря на малость $\mu f_1^{(1)}$ по сравнению с $f_1^{(0)}$, первый член в (2.11) и $f_1^{(0)}$ оказываются равноценными при вычислении звукового поля.

Теперь легко определить скорости в ядре вихря, определяемые функционалами (2.8). Выпишем окончательный результат только для гармоники $n=2$, так как для правильного вычисления звукового поля от следующих гармоник необходимо учитывать следующие члены разложения характеристик кольца по параметру μ:

$$r=\alpha[f_0(\theta)+\varepsilon f_1(\theta,t)],\quad f_0=1+O(\mu^2\ln\mu)$$

$$f_1(\theta,t)=\cos\left(2\theta+\frac{\Omega_0}{2}t\right)-\frac{3\mu}{4}\cos\left(\theta+\frac{\Omega_0}{2}\right)-\frac{\mu}{4}\cos\left(3\theta+\frac{\Omega_0}{2}t\right)\quad(2.12)$$

$$u_z=\varepsilon\frac{\Omega_0\alpha}{2}\left[\tau\cos\left(\theta+\frac{\Omega_0}{2}t\right)-\frac{\mu}{4}\tau^2\cos\frac{\Omega_0}{2}t+\frac{\mu}{2}\tau^2\cos\left(2\theta+\frac{\Omega_0}{2}t\right)\right]$$

$$u_x=\varepsilon\frac{\Omega_0\alpha}{2}\left[\tau\sin\left(\theta+\frac{\Omega_0}{2}t\right)-\frac{\mu}{4}\tau^2\sin\frac{\Omega_0}{2}t+\frac{\mu}{4}\tau^2\sin\left(2\theta+\frac{\Omega_0}{2}t\right)\right]$$

Величины f_1 и $\mathbf{u}$ выписаны с точностью до членов $\mu^2\ln\mu$, $\tau=r/\alpha$.

3. Вычисление звуковых полей и инкрементов. Для осесимметричных течений формула (1.1) существенно упрощается и принимает вид

$$p(\xi,t)=p_1+p_2=\frac{(1-3\cos^2\chi)}{4\pi c_0{}^2\xi}[I_1]+\frac{\sin^2\chi\cos\chi[I_2]+\cos^3\chi[I_3]-4V_0\cos\chi[I_1]}{4\pi c_0{}^3\xi}\quad(3.1)$$

$$I_1=-\frac{\pi\rho_0}{3}\frac{d^3}{dt^3}\int\Omega x^2z\,dx\,dz,\qquad I_2=\pi\rho_0\frac{d^3}{dt^3}\int\Omega x\left(v_xz^2-v_zzx-\frac{3}{2}v_xx^2\right)dx\,dz,$$

$$I_3=-\pi\rho_0\int\Omega x^2(v_xx+2v_zz)\,dx\,dz$$

где $\xi^2=x^2+z^2$, χ – угол между осью z и направлением на точку наблюдения ξ, кольцо движется в положительном направлении оси z. Первый член в формуле (3.1) определяет квадрупольное звуковое поле p_1, симметричное относительно плоскости кольца, второй дает добавки, приводящие к асимметрии излучения в этом направлении. Для гармоники $n=2$ квадрупольная часть звукового поля будет

$$p_1=\varepsilon\rho_0\frac{\pi}{2^5}\frac{\Omega_0{}^2a\alpha^2}{\xi}M_\alpha{}^2(3\cos^2\chi-1)\cos\left(\frac{\Omega_0}{2}t-\frac{R_1}{c_0}\right)[1+O(\mu\ln\mu,\varepsilon)]\quad(3.2)$$

где $M_\alpha=\Omega_0\alpha/2c_0$. Вычисления показывают, что главный вклад в асимметрию звукового поля дает первое слагаемое в p_2 и при указанной степени точности разложений (2.12), второе и третье слагаемые в числителе p_2 должны быть опущены, а для p_2 имеем выражение

$$p_2=\varepsilon\rho_0\frac{\pi}{2^5}\frac{\Omega_0{}^2a\alpha^2}{\xi}M_\alpha{}^2\beta\sin^2\chi\cos\chi\cos\left(\frac{\Omega_0}{2}t-\frac{R_1}{c_0}\right)[1+O(\mu\ln\mu,\varepsilon)]$$

где $\beta=2M_\alpha/\mu$. Отметим, что асимметрия излучения связана только с отличным от нуля значением октупольного момента D_{ijk}, так как влияние конвекции (третий член в числителе p_2) пренебрежимо мало.

Для потока энергии $\mathbf{N}$ и звуковой мощности W в движущейся среде справедливы выражения

$$\mathbf{N}=(\rho_0\mathbf{v}'+\rho'\mathbf{V}_0)\left(\frac{p'}{\rho_0}+\mathbf{V}_0\mathbf{v}'\right),\qquad W=\int\mathbf{Nn}\,ds$$

где $\mathbf{v}'$, ρ', p' – возмущения плотности, скорости и давления, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности удаленной сферы с элементом площади ds [9]. В используемом по μ приближении сразу получим $\mathbf{N}=p'\mathbf{v}'$ или с использованием комплексных выражений $\mathbf{N}=(p\bar{p}/2\rho_0c_0)\mathbf{n}$. Определим направленность излучения $F(\chi)$ как отношение $F(\chi)=\mathbf{Nn}/W$. Представляет интерес только угловая зависимость характеристики направленности $F(\chi)=(3\cos^2\chi-1+\beta\sin^2\chi\cos\chi)^2$. При вычислении суммарной мощности W учтем только квадрупольную часть звукового поля

$$W=\varepsilon^2\rho_0\frac{\pi^3}{5\cdot2^3}c_0{}^3a^2M_\alpha{}^8$$

Учет обратного влияния излучения звука для возмущений дискретного спектра приводит к сдвигу собственных частот в комплексную плоскость $\omega_n\to\omega_n+i\delta_n$ и сводится к вычислению энергии возмущений ΔT_n на основе линейной динамики несжимаемой жидкости и вычислению звуковой мощности W на основе теории Лайтхилла, а инкремент отдельной гармоники определяется по формуле $\delta_n = -W_n/2\Delta T_n$ [6, 10]. Для осесимметричных возмущений тонкого вихревого кольца энергия возмущений была вычислена в [10]: $\Delta T_n = -{}^1/_2\pi^2\varepsilon^2\alpha^4\rho_0\Omega_0^2 a(1-{}^1/_n)$. Так как ΔT_n отрицательна для всех n, то все гармоники акустически неустойчивы, а для $n=2$ инкремент $\delta_2 = (\pi/5\cdot 2^5\mu)\Omega_0 M_\alpha^5$. Порядок величины ΔT_n для всех гармоник приблизительно одинаков, поэтому величина инкрементов полностью определяется эффективностью соответствующей гармоники как источника звука. Выше отмечалось, что гармоника $n=2$ содержит квадрупольную составляющую в главном по μ приближении, поэтому она наиболее эффективна в смысле излучения и имеет максимальный инкремент.

4. Задача рассеяния. Обратимся теперь к задаче рассеяния звука акустически компактным вихрем, интересуясь при этом воздействием звука на вихрь. Рассмотрим сначала для выяснения сути дела более простую двумерную задачу о рассеянии плоской звуковой волны на вихре Кельвина.

В обозначениях, принятых выше для вихревого кольца, невозмущенный вихрь Кельвина имеет круговое ядро радиуса α с постоянным значением завихренности Ω_0; вне ядра течение потенциально. Будем считать, что все возмущения, порождаемые звуковой волной, малы и их можно рассматривать в линейном приближении, длина волны $\lambda \gg \alpha$, $M_\alpha = \Omega_0\alpha/2c_0 \ll 1$.

На бесконечности суммарное звуковое поле должно быть суперпозицией плоской и расходящейся цилиндрической волн. Так, потенциал возмущения ${}^1/_2\Omega_0\alpha^2\varphi(r, \theta, t)$ должен иметь на бесконечности вид

$$\varphi = \varepsilon\varphi_0\left[e^{ikr\cos\theta} + \frac{F(\theta)}{\sqrt{2\pi kr}}e^{ikr}\right], \quad k = \frac{\omega}{c_0}, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{4.1}$$

где $\varepsilon\varphi_0$ — амплитуда потенциала в падающей волне, θ — угол между направлением плоской волны и направлением рассеяния, $F(\theta)$ — амплитуда рассеяния. Воспользовавшись разложением плоской волны в ряд по цилиндрическим функциям для больших kr получим

$$\varphi \simeq \varepsilon\varphi_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}}\left[(1+F_n)e^{ikr-i\pi/4} + (-1)^n e^{-ikr+i\pi/4}\right]e^{in\theta-i\omega t}$$

$$F(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{-in\theta-i\pi/4} \tag{4.2}$$

С другой стороны, в силу линейности задачи и отсутствия потерь в среде каждая парциальная гармоника вида $\exp(in\theta - i\omega t)$ с действительной частотой ω должна представлять собой радиальную стоячую волну, не уносящую энергию на бесконечность. Наиболее общий вид такого потенциала есть $\varphi_n \simeq A_n r^{-1/2}(b_n \exp ikr + \bar{b}_n \exp(-ikr))$, где A_n — произвольная постоянная, b_n и $\bar{b}_n$ — комплексно-сопряженные величины, равные по модулю единице. Для удобства введем вместо A_n и b_n константы C_n и ζ_n в соответствии с выражением

$$\varphi_n = \varepsilon\varphi_0 i^n C_n \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \zeta_n\right) \tag{4.3}$$

Сравнение выражений (4.2) и (4.3) для амплитуды C_n и фазы ζ_n дает $C_n = \exp(i\zeta_n)$, $F_n = \exp(2i\zeta_n) - 1$.

Если рассматривать течение с постоянной по ядру завихренностью как основное состояние, то система уравнений Эйлера в линейном по возмущениям приближении может быть сведена к одному лишь уравнению для каждой фурье-гармоники потенциала возмущений $\varphi_n(r)$ [11]. В области

$r>\alpha$ это уравнение имеет вид

$$\varphi_n''+\left(\frac{1}{r}+\frac{M_\alpha^2\alpha^2}{r^3c_1^2}\right)\varphi_n'+\left[\left(\frac{\omega}{c_0}+\frac{M_\alpha n\alpha}{r^2}\right)^2\frac{1}{c_1^2}-\frac{n^2}{r^2}\right]\varphi_n=0 \tag{4.4}$$

$$M_\alpha=\frac{\Omega_0\alpha}{2c_0},\quad c_0^2=c_0^2(\alpha),\quad c_0^2(r)=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s,\quad c_1^2=\frac{c_0^2(r)}{c_0^2(\alpha)}=$$

$$=1+\frac{\gamma-1}{2}M_\alpha^2\left[1-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]$$

Отбрасывая квадратичные по числу M члены, получим уравнение Бесселя

$$\varphi_n''+\frac{1}{r}\varphi_n'+\left[k^2-\left(n^2+\frac{\omega\alpha^2\Omega_0 n}{c_0^2}\right)\frac{1}{r^2}\right]\varphi_n=0 \tag{4.5}$$

Выберем общее решение (4.5), не имеющее потока энергии на бесконечности, в виде

$$\varphi_n(r)=\frac{\varepsilon i^{|n|}\varphi_0}{2}C_n\left(e^{i\gamma_n}H^{(1)}_{\nu(n)}(kr)+e^{-i\gamma_n}H^{(2)}_{\nu(n)}(kr)\right) \tag{4.6}$$

$$\nu(n)=|n|+2\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha^2\,\mathrm{sgn}(n)$$

где $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ — функции Ганкеля первого и второго рода соответственно, C_n и γ_n — вещественные постоянные, $\mathrm{sgn}(n)$ — знаковая функция. Сравнивая асимптотическое поведение (4.6) при больших kr с формулой (4.3), для фазы ζ_n имеем

$$\zeta_n=-\pi\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha^2\,\mathrm{sgn}(n)+\gamma_n$$

Для определения неизвестных констант C_n и ζ_n надо решить уравнение, аналогичное (4.4) и справедливое в ядре [11], и сшить решения на границе ядра вихря. Однако для получения главного по числу M приближения удобно поступить по-другому. Внутренняя область $r/\alpha=O(1)$ в этом приближении может быть рассмотрена по теории несжимаемой жидкости [3]. Построение внутреннего несжимаемого решения с использованием уравнения динамики завихренности позволяет следить за эволюцией вихревого поля под действием звуковой волны.

Процедура получения несжимаемого решения, убывающего на бесконечности (возмущения Кельвина), подробно рассмотрена в [12] и состоит в отыскании решения уравнения Пуассона $\Delta\psi=-\Omega$ для функции тока $\psi={}^1/_2\Omega\alpha^2(\psi_0+\varepsilon\psi_1)$ и уравнения Гельмгольца для завихренности. Последнее эквивалентно в данном случае уравнению жидкой линии для возмущенной границы вихря $r_0(\theta,t)=\alpha[1+\varepsilon f(\theta,t)]$. Такая процедура предполагает, что завихренность в ядре остается постоянной, что естественно, так как падающая волна может вносить в течение только потенциальные возмущения, которые сказываются лишь на деформации границы вихря.

В отличие от [12] условие обращения возмущений в нуль на бесконечности заменяется здесь условием сращивания с внешним разложением. В соответствии с этим необходимо рассматривать как растущие, так и убывающие на бесконечности решения, а возмущенную функцию тока ψ_1 искать в виде

$$\psi_1=-\frac{1}{2\pi}\int f(\theta',t)\ln[1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')]\,d\theta'+\psi_1'$$

$$\psi_1'=e^{-i\omega t}\sum_{|n|\geq 1}a_n\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{|n|}e^{in\theta},\qquad f(\theta,t)=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_ne^{in\theta}$$

где ψ_1' — конечное в нуле решение уравнения Лапласа. Тогда для каждой угловой гармоники в области $r>\alpha$ легко получить

$$\psi_{1n}=e^{in\theta}\left[\frac{f_n}{|n|}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{|n|}+a_n\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{|n|}\right],\qquad n\neq 0$$

$$2\frac{f_n}{\Omega_0}(\omega-\operatorname{sgn}(n)\,\omega_n)=-na_n \tag{4.7}$$

где $\omega_n={}^1/_2\Omega_0(|n|-1)$ — собственная частота вихря Кельвина. Переходя во внешности вихря $r>\alpha$ от функции тока ψ_{1n} к потенциалу возмущений φ_{1n}, будем иметь

$$\varphi_{1n}=ie^{in\theta}\left[a_n\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{|n|}\operatorname{sgn}(n)-\frac{f_n}{n}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{|n|}\right] \tag{4.8}$$

Устремим в (4.6) kr к нулю, что будет соответствовать области $r/\alpha=O(1)$, и оставим для каждой гармоники только главный растущий и главный убывающий по r члены

$$\varphi_n=\frac{1}{2}\varepsilon\varphi_0 i^{|n|}C_n e^{-i\gamma_n}\left[(e^{2i\gamma_n}+1)\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{|n|}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{|n|}\frac{M_\alpha^{|n|}}{|n|!}-\right.$$
$$\left.-(e^{2i\gamma_n}-1)\frac{i(|n|-1)!}{\pi M_\alpha^{|n|}}\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^{|n|}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{|n|}\right] \tag{4.9}$$

Это равенство записано в предположении, что $C_0=0$, так как существование нулевой гармоники противоречит в рассматриваемом приближении предположению о несжимаемости течения во внутренней области. Приравняв по отдельности растущий и убывающий по r члены в формулах (4.8) и (4.9), с учетом равенства (4.7) получим систему из трех алгебраических уравнений для определения трех неизвестных величин a_n, f_n и $\exp(2i\gamma_n)$. Так, для коэффициентов разложения амплитуды рассеяния $F_n=\exp(2i\zeta_n)-1$ и коэффициентов f_n, характеризующих деформацию границы вихря, соответственно получим

$$F_n=\exp\left(-2\pi i\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha^2\operatorname{sgn}(n)\right)\left[1+\frac{2i\Delta_n(\omega)}{\omega\operatorname{sgn}(n)-\omega_n-i\delta_n}\right] \tag{4.10}$$

$$f_n=-\left(\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha\right)^{|n|}\frac{i^{|n|-1}\varphi_0}{(|n|-1)!\,[\omega-\operatorname{sgn}(n)(\omega_n+i\delta_n)]} \tag{4.11}$$

$$\Delta_n(\omega)=\pi\left(\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha\right)^{2|n|}\frac{|n|}{(|n|!)^2}\frac{\Omega_0}{2},\qquad \delta_n=\Delta_n(\omega_n)=\frac{\pi(|n|-1)^{2|n|}M_\alpha^{2|n|}}{(|n|!)(|n|-1)!\,2^{2|n|}}\frac{\Omega_0}{2}$$

Амплитуда рассеяния (4.10) имеет полюсы при комплексных частотах $\omega=\omega_n+i\delta_n$, как и должно быть в случае резонансного рассеяния. При этих частотах сходящаяся волна $H^{(2)}_{\nu(n)}(kr)$ в выражении (4.6) отсутствует и решение (4.6) соответствует квазисобственным состояниям, т. е состояниям свободного вихря, излучающего звук. Величины δ_n определяют ширину соответствующих спектральных линий. Они могут быть независимо найдены из энергетических соображений, как это сделано в разд. 3.

Пусть частота волны ω не совпадает ни с одной из собственных частот ω_n. Тогда, оставляя в (4.10) только члены порядка $O(M^2)$, для коэффициентов F_n будем иметь

$$F_{\pm1}=\pm\left(-i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha^2\right),\qquad F_n=-2i\pi\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha^2\operatorname{sgn}(n)$$

С учетом разложения [13] $^1/_2\,\mathrm{ctg}(\theta/2)=\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots$ получим

$$F_0(\theta)=-2\pi\frac{\omega}{\Omega_0}M_\alpha^2\left(\sin\theta-\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\pi/4} \tag{4.12}$$

Аналогичное выражение для амплитуды нерезонансного рассеяния было получено в [14, 15]. Отбрасывание рефракционного члена $\varphi_n(\omega\alpha^2\Omega_0 n/c_0^2r^2)$ в уравнении (4.5) привело в [2] к потере второго слагаемого в амплитуде рассеяния (4.12).

Вынужденное движение границы вихря определяется коэффициентами разложения f_n (4.11), из которых следует учесть только $f_{\pm1}={}^1/_2\varepsilon\varphi_0 M_\alpha$, откуда $f(\theta,\ t)=\varepsilon\varphi_0 M_\alpha\cos\theta\exp(-i\omega t)$. Последнее равенство показывает, что вихрь колеблется, не меняя своей формы, вдоль направления плоской волны с амплитудой $\varepsilon\varphi_0 M_\alpha$, т. е. с амплитудой колебаний частиц в волне.

Пусть теперь частота ω такова, что при некотором $n\geqslant2$ $\omega=\omega_n$ (резонанс на n-ой гармонике). При этом n второй член в квадратных скобках формулы (4.10) уже не мал, как в случае нерезонансного рассеяния, и F_n можно записать в виде $F_n=-2-2i\pi\omega M_\alpha^2/\Omega_0$. Тогда для амплитуды рассеяния получим

$$F(\theta)=F_0(\theta)-2e^{ik\theta-i\pi/4} \tag{4.13}$$

где нерезонансная часть амплитуды рассеяния $F_0(\theta)$ определяется формулой (4.12). Функция $F_0(\theta)$ имеет порядок $O(M^2)$ и при не очень малых углах амплитуда рассеяния определяется только резонансным слагаемым в (4.13), имеющим порядок $O(1)$.

На резонансе помимо колебательного движения вихря как целого круговая граница деформируется и колеблется в соответствии с выражением

$$f(\theta,t)=\frac{\varepsilon\varphi_0}{M_\alpha^n}\frac{n!2^n}{\pi(n-1)^n}\cos(n\theta-\omega_n t),\qquad n\geqslant2 \tag{4.14}$$

определяемым коэффициентом f_n, имеющим порядок $O(M^{-n})$. На резонансе волна возбуждает внутренние степени свободы вихревого движения (кельвиновские гармоники), при этом амплитуда колебаний границы в M^{-1-n} раз больше амплитуды смещения частиц в звуковой волне. Следовательно, на резонансе для справедливости линейного рассмотрения требуется выполнение условия $\varepsilon M^{-n}\ll1$. Отметим, что все результаты, полученные в [2] для резонансного рассеяния, остаются в силе, так как отсутствие рефракционной части сказывается только на нерезонансном рассеянном поле.

Для возмущенной границы вихря выражение (4.14) есть вынужденное решение уравнений Эйлера, где роль вынужденной силы играет звуковая волна. В то же время свободный вихрь в слабосжимаемой жидкости имеет квазисобственные решения вида $f'=f_n(0)\exp(\delta_n t)\cos(n\theta-\omega_n t)$. Комбинируя это решение, умноженное на произвольную константу $f_n(0)$, с вынужденным решением (4.14), можно решить задачу Коши об эволюции границы для произвольно возмущенного в начальный момент времени вихря. Так, если на невозмущенный вихрь в момент времени $t=0$ начнет действовать звуковая волна на резонансной частоте ω_n, то суперпозиция вынужденного и квазисобственного решения с условием обращения возмущений в нуль при $t=0$ дает

$$\varepsilon f(\theta,t)=\frac{\varepsilon\varphi_0}{\pi M_\alpha^n}\frac{n!2^n}{(n-1)^n}(1-e^{\delta_n t})\cos(n\theta-\omega_n t) \tag{4.15}$$

Здесь уже можно отбросить условие применимости формулы (4.14) $\varepsilon M_\alpha^{-n}\ll1$. Решение (4.15) остается справедливым, пока амплитуда не вырастет настолько, что необходимо будет учитывать нелинейные эффекты.

Если оценить время, за которое амплитуда колебаний границы вырастет до некоторого заданного значения, скажем, в N раз будет превышать амплитуду смещения частиц в звуковой волне, то это время $\tau_n^*=2^{n+1}\times\times(n-1)!N/(n-1)^n\Omega_0 M_\alpha^{n-1}$. Для не слишком больших N время τ_n^* мало по сравнению с временем неустойчивости δ_n^{-1} ($\tau_n^*\delta_n=\pi N(n-1)^n M_\alpha^{n+1}/2^n n!\ll\ll 1$), т. е. амплитуда быстро нарастает. Поэтому на резонансе звуковая волна оказывает сильное влияние на гидродинамику вихревого течения.

Уравнение (4.4) и аналогичное ему уравнение в ядре вихря позволяют в принципе находить и следующие члены разложения соответствующих полей с произвольной точностью. Однако попытка вычисления амплитуды рассеяния непосредственно из системы уравнений Эйлера для достаточно сложных вихревых структур (таких, как, например, вихревое кольцо) приводит к принципиальным трудностям аналитического характера. Однако для нахождения только резонансного рассеяния можно поступить гораздо проще, воспользовавшись известными квазисобственными решениями задачи излучения. Этот подход известен в квантовой теории рассеяния на квазидискретных уровнях [16, 17].

Запишем асимптотику для каждой парциальной гармоники (4.3) в виде

$$\varphi_n=\varepsilon\varphi_0 i^n C_n\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\,[\beta_n(\omega)e^{ikr}+\bar\beta_n(\omega)e^{-ikr}]$$

$$\beta_n(\omega)=i^n e^{i\pi/4-i\zeta_n}$$

где $\beta_n(\omega)$ — комплексные функции от комплексной частоты ω. При совпадении частоты ω с одной из квазисобственных частот $\omega_n+i\delta_n$ должна оставаться только уходящая волна. В соответствии с этим значение $\beta_n(\omega_n+i\delta_n)=0$. Тогда в окрестности квазисобственной частоты функция $\beta_n(\omega)$ может быть представлена в виде $\beta_n(\omega)=(\omega-\omega_n-i\delta_n)b_n$, где b_n — комплексная константа. С учетом равенства $\exp[2i\zeta_n(\omega)]=\exp(i\pi n+ +i\pi/2)\bar\beta_n/\beta_n$ легко получить

$$e^{2i\zeta_n}=e^{2i\zeta_n(0)}\left[1+\frac{2i\delta_n}{\omega-\omega_n-i\delta_n}\right]$$

$$e^{2i\zeta_n(0)}=e^{i\pi n+i\pi/2}\frac{\bar b_n}{b_n}$$

Здесь $\zeta_n(0)$ означает сдвиг фаз вдали от резонансного уровня, так как $\zeta_n\to\zeta_n(0)$ при $|\omega-\omega_n|\gg\delta_n$. Тогда для амплитуды рассеяния вблизи резонанса получим

$$e^{i\pi/4}F(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}[e^{2i\zeta_k(0)}-1]e^{ik\theta}+\frac{2i\delta_n e^{2i\zeta_n(0)}}{\omega-\omega_n-i\delta_n}e^{in\theta}$$

где первый член описывает нерезонансное рассеяние, второй существен только вблизи резонанса. На самом резонансе отбросим все величины, характеризующие нерезонансное рассеяние, ввиду их малости по числу M. Тогда амплитуда резонансного рассеяния в соответствии с формулой (4.13) примет вид $F(\theta)=-2\exp(in\theta-i\pi/4)$.

Сравнивая рассеянное поле в (4.1) при таком значении $F(\theta)$ с полем излучения n-ой кельвиновской гармоники [2], находим амплитуду возмущения границы вихря на резонансе в полном соответствии с выражением (4.14).

5. Резонансное рассеяние на вихревом кольце. Пусть на вихревое кольцо падает плоская звуковая волна с волновым вектором **k** под углом χ_0 к оси кольца с длиной волны λ, много большей радиуса кольца a. Нерезонансное рассеяние исследовалось в [4, 5] и здесь рассматриваться не будет. Определим резонансное рассеяние на частотах ω_n осесимметричных гармоник, пользуясь изложенной выше схемой. Рассмотрим при этом только самую низкую гармонику $n=2$, так как только для нее вычислен инкремент δ_2. Эффекты конвекции самого вихря ввиду малости скорости $\mathbf{V}_0$ по μ по сравнению с другими характерными скоростями задачи здесь не учитываются ($\mathbf{V}_0\simeq 0$). В принципе эти эффекты можно учесть введением доплеровского сдвига частоты в конечном ответе.

Выберем оси координат так, чтобы азимутальный угол $\varkappa_0$ волнового вектора $\mathbf{k}$ был равен нулю (см. фигуру). Асимптотический вид потенциала возмущений на бесконечности должен представлять собой суперпозицию плоской и расходящейся сферической волн

$$\varphi=\varepsilon\varphi_0\left[e^{ik\xi\cos(\chi-\chi_0)}+\frac{F(\chi,\varkappa)}{\xi}e^{ik\xi}\right]e^{-i\omega t} \tag{5.1}$$

Разложение плоской волны по сферическим гармоникам Y_{lm} от направления Oz имеет вид [17]

$$e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}i^l j_l(k\xi)\overline{Y}_{lm}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right)Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi}\right)$$

где $j_l(k\xi)$ — сферические функции Бесселя. Воспользовавшись асимптотикой функций $j_l(k\xi)$ при больших $k\xi$ и представив амплитуду рассеяния $F(\chi,\varkappa)$ в виде разложения по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\chi,\varkappa)$, преобразуем (5.1) к виду

$$\varphi=\varepsilon\varphi_0\frac{2\pi}{ik\xi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y}_{lm}(\chi_0,\varkappa_0)Y_{lm}(\chi,\varkappa)\left[(1+F_{lm})e^{ik\xi}-(-1)^l e^{-ik\xi}\right]e^{-i\omega t}, \tag{5.2}$$

$$F(\chi,\varkappa)=\frac{2\pi}{ik}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}F_{lm}\overline{Y}_{lm}(\chi_0,\varkappa_0)Y_{lm}(\chi,\varkappa) \tag{5.3}$$

В разложении (5.3) введены для удобства постоянные множители $\overline{Y}_{lm}(\chi_0,\varkappa_0)$. Резонансной гармонике $\omega=\omega_2$ соответствует в силу (3.2) член $m=0$, $l=2$ в разложении (5.2)

$$\varphi_{02}=\varepsilon\varphi_0\frac{5}{2ik\xi}P_2(\cos\chi_0)P_2(\cos\chi)\left[(1+F_{02})e^{ik\xi}-e^{-ik\xi}\right]e^{-i\omega t}$$

где $P_2(z)={}^1/_2(3z^2-1)$ — второй полином Лежандра. Представим F_{02} в виде $F_{02}=\exp(2i\zeta_2)-1$. Такая запись предполагает, что на бесконечности все гармоники вместе с рассмотренной представляют собой радиальные стоячие волны, не переносящие энергии. Тогда (5.2), очевидно, можно переписать в виде

$$\varphi_{02}=\varepsilon\varphi_0\frac{5}{2ik\xi}P_2(\cos\chi_0)P_2(\cos\chi)e^{i\zeta_2}\left[\beta e^{ik\xi}-\beta e^{-ik\xi}\right]e^{-i\omega t} \tag{5.4}$$

где $\beta=\exp(i\zeta_2)$ — комплексные функции от комплексной частоты ω. Если частота ω совпадает с квазисобственной частотой, то в (5.4) останется только уходящая волна. В соответствии с этим можно написать $\beta(\omega_2+i\delta_2)=0$. Поступая изложенным в разд. 4 способом, нетрудно получить

$$e^{2i\zeta_2}=\left[1+\frac{2i\delta_2}{\omega-\omega_2-i\delta_2}\right]e^{2i\zeta_2(0)}$$

На резонансе можно положить $\exp[2i\zeta_2(0)]\approx 1$ (ввиду малости по M нерезонансного рассеяния [4, 5] соответствующие ему сдвиги фаз должны быть близки к нулю). Тогда резонансная часть амплитуды рассеяния F^p

и резонансное рассеянное поле φ^p будут соответственно

$$F^p = -\frac{5P_2(\cos\chi_0)}{ik} P_2(\cos\chi)$$

$$\varphi^p = i\varepsilon\varphi_0 \frac{5P_2(\cos\chi_0)}{k\xi} P_2(\cos\chi)\, e^{-i\omega_2 t + ik\xi} \tag{5.5}$$

Сравнивая (5.5) с полем излучения второй гармоники (3.2), найдем амплитуду вынужденных колебаний границы вихря на резонансе $f_1^{(0)} = (20/\pi)\varphi_0\mu M_\alpha^{-3} P_2(\cos\chi_0)$. Множитель $P_2(\cos\chi_0)$ показывает, что резонансное рассеяние имеет два максимума при падении под углами $\chi_0=0$, $\chi_0=\pi/2$ и пропадает при $\chi_0=\pm\arccos(1/\sqrt{3})$, так как при этом угле падения резонансная гармоника отсутствует в разложении плоской волны.

Вынужденное решение в комбинации с квазисобственным решает задачу Коши о нарастании осесимметричных возмущений при падении звуковой волны на первоначально невозмущенный вихрь

$$\varepsilon f_1^{(0)}(\theta, t) = \frac{\varepsilon\varphi_0}{M_\alpha^3} \frac{20\mu P_2(\cos\chi_0)}{\pi} (1-e^{\delta_2 t}) \cos(2\theta - \omega_2 t)$$

Для характерного времени нарастания возмущений (времени, за которое амплитуда возмущений будет в N раз превосходить амплитуду колебаний частиц в волне) получим $\tau_2^* = 2N/M_\alpha \Omega_0 P_2(\cos\chi_0)$. Для частоты воздействия $\Omega_0/2 \sim 1000$ Гц и числа Маха $M \sim 0{,}1$ характерное время будет $\sim 0{,}01N$ с.

Помимо осесимметричных возмущений вихревое кольцо характеризуется еще дискретным спектром изгибных колебаний, который при учете сжимаемости также смещается в комплексную плоскость. Неизвестно, устойчив или неустойчив вихрь к таким возмущениям, поэтому нельзя сказать, куда смещаются собственные частоты с действительной оси — вверх или вниз. Очевидно, однако, что для этих возмущений также будет иметь место резонансное рассеяние, характеризуемое для второй изгибной гармоники уже присоединенной функцией Лежандра $P_2^2(\cos\chi_0)$ в отличие от $P_2(\cos\chi_0)$ для осесимметричных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Broadbent E. G., Moore D. W.* Acoustic destabilisation of vortices. // Phil. Trans. Roy. Soc. 1979. V. A290. P. 353–371.
2. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 192–198.
3. *Големшток Г. М., Фабрикант А. Л.* Рассеяние и усиление звуковых волн цилиндрическим вихрем // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 3. С. 383–390.
4. *Громов П. Р., Езерский А. Б., Кияшко С. В., Фабрикант А. Л.* Рассеяние звука тороидальным вихрем: Препринт № 59. Горький: Ин-т прикл. физики АН СССР. 1982. 17 с.
5. *Howe M. S.* On the scattering of sound by a vortex ring // J. Soud and Vibr. 1983. V. 87. № 4. P. 567–571.
6. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Некоторые замечания к теории Лайтхилла в связи с излучением звука компактными вихрями // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 184–189.
7. *Бэтчелор Д.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
8. *Fraenkel L. E.* Examples of steady vortex ring of small cross-section in an ideal fluid // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. Pt 1. P. 119–135.
9. *Чернов Л. А.* Поток и плотность акустической энергии в движущейся среде // Журн. техн. физики. 1946. Т. 16. № 6. С. 733–736.
10. *Копьев В. Ф., Леонтьев Е. А.* Энергетический аспект акустической неустойчивости некоторых стационарных вихрей // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 348–352.
11. *Broadbent E. G.* Jet noise radiation from discrete vortices // Aeronaut. Rec. Council Rept and memor. 1978. № 3826. 28 p.

12. *Копьев В. Ф., Остриков Н. Н.* О нелинейной динамике возмущений вихря Кельвина // Теоретические и экспериментальные исследования потоков жидкости и газа. М.: МФТИ, 1985. С. 101–107.
13. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966. 228 с.
14. *Ferziger J. H.* Low-frequency acoustic scattering from a trailing vortex // J. Acoust. Soc. of America. 1974. V. 56. № 6. P. 1705–1707.
15. *Фабрикант А. Л.* К вопросу о рассеянии звука вихрем // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 5. С. 694–696.
16. *Ву Т.-Ю., Омура Т.* Квантовая теория рассеяния. М.: Наука, 1969. 451 с.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 752 с.

Москва

Поступила в редакцию
16.VII.1985