МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1987

УДК 532.527

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ КОЛЬЦЕВЫХ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

ГОМАН О. Г., КАРПЛЮК В. И., НИШТ М. И.

Обсуждаются вопросы численного моделирования осесимметричных течений несжимаемой жидкости, индуцированных непрерывной вихревой областью или вихревой пеленой, при помощи дискретных систем вихревых колец.

Движению вихревых колец в идеальной жидкости посвящена обширная литература; достаточно назвать монографии [1–6] и некоторые последние статьи [7–10].

Одной из особенностей движения вихревых колец в идеальной жидкости является наличие у них так называемой скорости самоиндукции вдоль оси симметрии, величина которой зависит от радиуса вихревого ядра a и при $a\to 0$ для конечной циркуляции возрастает до бесконечности. С последним обстоятельством связана известная логическая трудность оперирования с дискретными системами бесконечно тонких ($a=0$) вихревых колец с конечными циркуляциями, поскольку (если быть прямолинейно-последовательным) скорость каждого такого кольца за счет самоиндукции должна быть бесконечной. Тем не менее в практике применения метода дискретных вихрей к расчету отрывных осесимметричных течений используется как раз модель бесконечно тонких вихревых колец с конечными интенсивностями, причем указанная трудность снимается за счет соглашения о том, что при вычислении скоростей движения таких колец учитывается только их взаимное влияние, а скорость самоиндукции не принимается во внимание [4, 5].

Здесь будет показано, что предположение о возможности игнорирования явления самоиндукции при рассмотрении систем бесконечно тонких вихревых колец является не просто искусственным вычислительным приемом, позволяющим избежать возникновения бесконечности, а необходимым условием корректного моделирования законов сохранения вихревой области или вихревой пелены при замене ее конечномерной моделью.

1. Рассмотрим сначала случай, когда в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности, вихри $\mathbf{\Omega}$ непрерывно заполняют некоторую осесимметричную (для простоты — конечную) область пространства τ и все вихревые линии являются соосными окружностями.

Введем цилиндрическую систему координат $xr\theta$, направив ось x вдоль оси симметрии; при этом $\mathbf{\Omega}=\Omega(x, r)\boldsymbol{\theta}^\circ$. Если σ — сечение области τ плоскостью $\theta=\text{const}$, то завихренную область можно рассматривать как телесный вихрь (синонимы: вихревая трубка, осесимметричное вихревое облако) с поперечным сечением ядра σ. В случае, когда σ — круг, вихрь будет тороидальным.

Поле скоростей, индуцированное вихревой областью τ, определяется выражением [2, 3]

$$\mathbf{V}_M=\frac{1}{4\pi}\int\limits_\tau \Omega\frac{\boldsymbol{\theta}^\circ\times\mathbf{R}}{R^3}\,d\sigma\,ds \tag{1.1}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный от переменной точки интегрирования $Q(\xi, \rho, \theta)$ в точку $M(x, r)$, которую в силу осевой симметрии будем располагать в плоскости $\theta=0$, $d\sigma$ — элементарная площадка поперечного сечения ядра вихря, а ds — элемент длины вихревой линии C, проходящей через точку Q.

Если точка $M(x, r)$ лежит вне области τ, то $R>0$, и выражение (1.1), вводя циркуляцию элементарной трубки $d\Gamma=\Omega d\sigma$ и $d\mathbf{s}=ds\boldsymbol{\theta}^\circ$, запишем в

виде

$$\mathbf{V}(x,r)=\int_{\sigma}\left(\frac{d\Gamma}{4\pi}\int_{C}\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{R}}{R^3}\right) \tag{1.2}$$

Поскольку выражение в скобках формулы (1.2) — закон Био — Савара для бесконечно тонкой вихревой трубки интенсивности $d\Gamma$, то поле скоростей вне вихревого облака можно рассматривать как результат наложения вкладов от всех элементарных кольцевых трубок.

Очевидно, что при довольно общих предположениях относительно функции $\Omega(x,r)$ интеграл (1.2) может быть с какой угодно точностью приближен конечной интегральной суммой

$$\mathbf{V}''=\sum_{k}\frac{\Gamma_k}{4\pi}\int_{C_k}\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{R}}{R^3} \tag{1.3}$$

$$\Gamma_k=\Omega_k\Delta\sigma_k,\qquad k=1,2,\ldots,N,\qquad \sigma=\bigcup_{k=1}^{N}\Delta\sigma_k$$

$$\Gamma=\sum_{k}\Gamma_k=\int_{\sigma}\Omega\,d\sigma=\text{const}$$

где C_k — некоторая вихревая линия, пронизывающая площадку $\Delta\sigma_k$.

Механический смысл выражения (1.3) состоит в том, что поле скоростей, индуцированное вихревой трубкой τ в точках M, расположенных вне τ, может быть с любой точностью смоделировано конечной системой бесконечно тонких кольцевых вихрей с общей циркуляцией Γ.

Если точка M находится на значительном удалении от области τ, то телесный вихрь может быть заменен одним бесконечно тонким кольцевым вихрем с циркуляцией Γ.

Если точки $M(x, r)$ находятся в пределах ядра вихря σ, то выражение (1.1) представляет собой сходящийся несобственный интеграл. Различные точки (частицы) области σ, согласно (1.1), имеют различные скорости, так что поперечное сечение вихря с течением времени деформируется.

Осевую компоненту скорости v_x, с которой телесный кольцевой вихрь движется как единое целое, обычно называют скоростью самоиндукции вихря, т. е. она является скоростью $v_x(x_0, r_0)$ движения «центра масс» $M_0(x_0, r_0)$ поперечного сечения вихревой трубки σ. Из-за деформации этого сечения величина $v_x(x_0, r_0)$ в общем случае с течением времени изменяется.

Выделим из области τ тонкую тороидальную область δ_ε, имеющую радиус ядра ε и охватывающую ту вихревую линию, которая проходит через точку M. Часть области τ, за исключением δ_ε, обозначим τ_ε.

По определению несобственного интеграла (1.1) можем записать

$$\mathbf{V}(x,r)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\varepsilon}\Omega\frac{\boldsymbol{\theta}^\circ\times\mathbf{R}}{R^3}\,d\sigma\,ds\right) \tag{1.4}$$

Из самого понятия предела очевидно, что при обычных требованиях к функции $\Omega(x, r)$ всегда можно выбрать такое значение $\varepsilon>0$, при котором величины

$$v'_{(x,r)}(x,r)=\frac{1}{4\pi}\int_{\tau_\varepsilon}\Omega\left(\frac{\boldsymbol{\theta}^\circ\times\mathbf{R}}{R^3}\right)_{(x,r)}d\sigma\,ds \tag{1.5}$$

с заданной точностью стремятся к значениям $v_{(x,r)}(x, r)$, определяемым из формулы (1.4).

В выражениях (1.5) из области интегрирования полностью исключен тот элементарный кольцевой вихрь (с площадью ядра $\pi\varepsilon^2$), которому при-

надлежит точка M. Из этого следует, что если на скорость самоиндукции телесного вихря смотреть как на скорость $v_x(x_0, r_0)$ движения точки $M_0(x_0, r_0)$, совпадающей с центром масс поперечного сечения σ, то термин «самоиндукция» следует признать неудачным, так как на самом деле никакой самоиндукции не происходит, поскольку, согласно (1.5), именно тот элементарный вихрь, который проходит через точку $M_0(x_0, r_0)$, в формировании указанной скорости никакого участия не принимает.

Таким образом, понятие «скорость самоиндукции» имеет смысл только как название скорости движения телесного вихря в целом.

При любом $\varepsilon>0$ выражение (1.5) представляет собой обычный интеграл и его можно представить в следующих двух равноценных видах:

$$v'_{(x,r)}(x,r)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma_\varepsilon} d\sigma \int\limits_{C} \Omega\left(\frac{\theta^\circ\times\mathbf{R}}{R^3}\right)_{(x,r)} ds=\int\limits_{\sigma_\varepsilon} d\Gamma\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C}\left(\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{R}}{R^3}\right)_{(x,r)} \tag{1.6}$$

где σ_ε означает площадь σ с исключенным кругом радиуса ε, центром которого является точка $M(x, r)$.

В свою очередь выражение (1.6) может быть с любой точностью приближено конечной интегральной суммой

$$v''_{(x,r)}=\sum_k \frac{\Gamma_k}{4\pi}\int\limits_{C_k}\left(\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{R}}{R^3}\right)_{(x,r)} \tag{1.7}$$

которая, как и выражение (1.3), означает, что скорость всякой точки $M(x, r)$, находящейся в пределах вихревой области τ (в том числе и точки $M_0(x_0, r_0)$ — центра масс поперечного сечения σ), может быть представлена как результирующая скоростей, вызванных некоторой конечной системой бесконечно тонких вихревых колец C_k (за исключением кольца, содержащего данную точку M).

Из (1.7) следует также, что при вычислении скорости в точке M учету должны подлежать только те дискретные вихри, которые находятся от точки M на расстоянии, не меньшем ε, т. е. поле скоростей, индуцируемое каждым бесконечно тонким кольцом, нужно учитывать, начиная лишь с расстояния $r>\varepsilon$; в пределах же окрестности $r<\varepsilon$ определение индуцированного поля не имеет смысла. Указанная величина ε представляет собой не что иное, как «вычислительный радиус» дискретной системы [4].

Суммируя сказанное, приходим к выводу, что тело произвольного вихревого осесимметричного облака (телесного вихря) может быть корректно, т. е. с любой заданной точностью в смысле аппроксимации поля скоростей, смоделировано достаточно густой конечной системой бесконечно тонких вихревых колец, представляющих собой объекты, которые взаимодействуют между собой по закону Био — Савара, но сами на себя не влияют, или, другими словами, системой бесконечно тонких вихревых колец без самоиндукции.

2. Корректность моделирования вихревого облака конечной системой бесконечно тонких вихревых колец без самоиндукции подтверждается также тем, что при этом, как будет показано ниже, с любой точностью могут быть аппроксимированы законы сохранения вихревого облака.

Проведем сопоставление законов сохранения для вихревого облака и для дискретной системы бесконечно тонких кольцевых вихрей. Для вихревой области τ, содержащейся внутри безграничной и покоящейся на бесконечности жидкости, сохраняется полный импульс $\mathbf{P}$ и кинетическая энергия движения H [2, 3]. Для рассматриваемого осесимметричного движения, полагая плотность жидкости равной единице, импульс P вдоль

оси x и кинетическую энергию H представим в виде [2, 3]

$$P=\pi\int_{\sigma}\Omega r^2\,dx\,dr=\text{const} \tag{2.1}$$

$$H=\frac{1}{4}\int_{\sigma}\Omega(x,r)r\,dr\,dx\int_{\sigma'}W(x,r;\xi,\rho)\Omega(\xi,\rho)\rho\,d\rho\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\sigma}\int_{\sigma'}r\rho W\,d\Gamma\,d\Gamma'=\text{const}$$

$$W(x,r;\xi,\rho)=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{R}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta}}=$$

$$=\frac{2}{r\rho}\left[\frac{(x-\xi)^2+r^2+\rho^2}{\sqrt{(x-\xi)^2+(r+\rho)^2}}F(k)-\sqrt{(x-\xi)^2+(r+\rho)^2}\,E(k)\right]$$

$$k=\left[\frac{r\rho}{(x-\xi)^2+(r+\rho)^2}\right]^{1/2}$$

где R — расстояние между точками $(x,\ r,\ \theta)$ и $(\xi,\ \rho,\ \theta')$, а $F(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Рассмотрим дискретную систему S_n свободных бесконечно тонких вихревых колец. Поле скоростей, индуцируемое j-м вихревым кольцом C_j, расположенным в плоскости x_j и имеющим радиус r_j и циркуляцию Γ_j, согласно закону Био — Савара выражается формулами

$$v_x(x,r)=\frac{\Gamma_j r_j}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_j-r\cos\theta}{R^3}d\theta,\qquad v_r(x,r)=\frac{\Gamma_j r_j}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(x-x_j)\cos\theta}{R^3}d\theta$$

$$R=((x-x_j)^2+r^2+r_j^2-2r_jr\cos\theta)^{1/2} \tag{2.2}$$

где циркуляция Γ_j считается положительной, если в плоскости $\theta=0$ движение происходит против часовой стрелки. Для компонентов скорости частиц вихревого кольца C_i, вызванных влиянием на него всех остальных колец (кроме самого себя), имеем

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{1}{4\pi}\sum_j{}'\,\Gamma_j r_j X_{ij} \tag{2.3}$$

$$\frac{dr_i}{dt}=\frac{1}{4\pi}\sum_j{}'\,\Gamma_j r_j(x_i-x_j)Y_{ij} \tag{2.4}$$

$$X_{ij}=\int_0^{2\pi}(r_j-r_i\cos\theta)R_{ij}^{-3}\,d\theta,\qquad Y_{ij}=\int_0^{2\pi}\cos\theta R_{ij}^{-3}\,d\theta$$

$$R_{ij}=((x_i-x_j)^2+r_i^2+r_j^2-2r_ir_j\cos\theta)^{1/2}$$

Индекс штрих в суммах (2.3) и (2.4) означает, что при суммировании номер $j=i$ пропускается.

Скорость частиц бесконечно тонкого кольца C_i есть результат влияния на него всех остальных колец (см. разд. 1), поэтому в рамках концепции метода дискретных вихрей [4, 5] постулируется, что именно формулы (2.3), (2.4) определяют скорости движения бесконечно тонких вихревых колец.

Умножив уравнение (2.4) на $\pi\Gamma_i r_i$ и просуммировав по i, получим интеграл импульса системы бесконечно тонких вихревых колец

$$P_0=\pi\sum_i\Gamma_i r_i^2=\text{const} \tag{2.5}$$

Введем функцию Гамильтона для системы бесконечно тонких вихревых колец и запишем систему (2.3), (2.4) в каноническом виде

$$H_0 = \frac{1}{4} \sum{}' \Gamma_i \Gamma_j r_i r_j W_{ij} \tag{2.6}$$

$$\pi\Gamma_i \frac{dr_i^2}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial x_i}, \qquad \pi\Gamma_i \frac{\partial x_i}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial r_i^2} \tag{2.7}$$

Здесь каноническими переменными являются x_i и $p_i = \pi\Gamma_i r_i^2$ — импульс i-го кольцевого вихря, $W_{ij} = W(x_i, r_i; x_j r_j)$ определяется выражением (2.1) с заменой k на k_{ij}, причем

$$k_{ij} = \left[\frac{r_i r_j}{(x_i - x_j)^2 + (r_i + r_j)^2} \right]^{1/2}, \qquad i \neq j \tag{2.8}$$

Таким образом, с учетом теоремы Томсона для системы бесконечно тонких кольцевых вихрей (без самоиндукции) имеют место законы сохранения

$$P_0 = \text{const}, \qquad H_0 = \text{const}, \qquad \Gamma_0 = \sum{}' \Gamma_i = \text{const} \tag{2.9}$$

Наличие конечного интеграла $H_0 = \text{const}$ не допускает возникновения таких ситуаций, при которых $k_{ij} = 1$ (поскольку при этом $F(1) = \infty$ и $H_0 = \infty$), поэтому для (2.8) в любой момент времени должны выполняться условия $k_{ij} < 1$ для всех i и j, откуда следует, что

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (r_i - r_j)^2 > 0$$

т. е. любые два вихря системы никогда не могут подойти бесконечно близко друг к другу и более того, поскольку вихрей конечное число, то расстояния r_{ij} для любых i и j ограничены снизу: $r_{ij} \geqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Последнее означает, что с течением времени погрешность определения поля скоростей не может сильно возрастать, поскольку в силу условия $\varepsilon_0 > 0$ в ε_0-окрестность каждого вихря C_i (где ε_0 — величина вычислительного радиуса) может попасть только незначительное количество других вихрей, присутствие которых в этой окрестности при вычислении скоростей точек C_i должно игнорироваться.

Необходимым условием корректности моделирования непрерывного вихревого облака дискретной системой кольцевых вихрей является требование, чтобы с достаточной степенью точности аппроксимировались законы сохранения. Из сопоставления полученных результатов следует, что совокупность интегралов дискретной системы вихрей P_0, H_0 и Γ_0 (2.9) может с любой степенью точности аппроксимировать точные интегралы P, H и Γ. Наличие у величины H интегрируемой «диагональной» особенности при $R = 0$ не препятствует ее аппроксимации величиной H_0, поскольку эта особенность настолько слаба для шестикратного интеграла (функция W в (2.1) имеет только логарифмическую особенность вместе с $F(k)$ при $k = 1$), что без ущерба для точности определения H она может быть вместе с малой окрестностью δ_ε исключена из области интегрирования. Выражение H_0 (2.6), в котором отсутствуют диагональные члены $i = j$, как раз и аппроксимирует выражение для H с исключенной диагональной особенностью δ_ε, причем эта аппроксимация может быть осуществлена с любой заданной точностью.

Итак, моделирование непрерывного вихревого облака конечной системой бесконечно тонких кольцевых вихрей без самоиндукции может обеспечить любую необходимую точность аппроксимации точных законов сохранения этого облака.

Подчеркнем, что хотя величина H есть полная кинетическая энергия движения, вызванного вихревым облаком, величина H_0, аппроксимирую-

щая H с любой точностью, полной кинетической энергией системы бесконечно тонких вихревых колец не является, потому что даже для одного бесконечно тонкого вихревого кольца с конечной циркуляцией кинетическая энергия бесконечна [3]. Сумма, определяющая величину H_0, не содержит диагональных членов $i=j$ (каждый из которых представлял бы собой «собственную» бесконечную энергию i-го кольца), а состоит только из слагаемых, представляющих собой (аналогично плоскому движению вихрей, рассмотренному в [3]) ту часть кинетической энергии, которая зависит от взаимного расположения вихрей.

Обратимся теперь к выяснению возможности моделирования вихревого облака конечной системой n телесных (не бесконечно тонких) кольцевых вихрей с произвольной формой сечения σ_i (в частности, системой тороидальных вихрей), рассматривая их как первичные объекты системы.

Возможность использования модельной системы зависит от законов, управляющих движением объектов этой системы, а успех ее применения — от их простоты и удобства для расчетов. В связи с этим прежде всего возникает необходимость установления законов движения телесных вихрей как самостоятельных представителей рассматриваемой системы. Скорость движения каждого телесного вихря состоит из скорости самоиндукции и скорости взаимоиндукции, вызванной всеми остальными вихрями. В настоящее время не существует явных формул, дающих выражение скоростей самоиндукции и взаимоиндукции в зависимости от формы ядра σ_i и распределения в нем завихренности (за исключением случая достаточно тонких тороидальных вихрей). Попытка же определить указанные скорости, а также изменение формы поперечного сечения каждого вихря при помощи квадратурных формул типа (1.7) снова приводит к моделированию каждого отдельного тороидального вихря (а значит, и всего вихревого облака в целом) совокупностью бесконечно тонких вихрей, о чем уже было сказано выше. Следовательно, возможность использования системы телесных вихрей с произвольной формой поперечного сечения для приближенного описания движения вихревого облака представляется малообнадеживающей.

В литературе много внимания уделяется движению тороидальных кольцевых вихрей [7—10], поэтому более детально рассмотрим возможность применения систем таких вихрей для моделирования вихревого облака. Будем считать, что каждый тороидальный вихрь достаточно тонок, т. е. $a_j/r_j \ll 1$, $j=1, 2, \ldots$, где a_j — радиус вихревого ядра и r_j — средний радиус вихревого кольца. Если еще предположить, что $a_j/|x_i-x_j| \ll 1$ для всех i и j, $i \neq j$, то влиянием телесности j-го вихревого кольца на скорость, индуцируемую им в частицах i-го вихря, можно пренебречь, так что формулы (2.3), (2.4), определяющие взаимное влияние вихрей, остаются справедливыми (с точностью до $O(a_j/r_j)$) и для достаточно тонких колец. Что касается собственной скорости движения тороидального вихревого кольца как целого (т. е. его скорости самоиндукции), то она определяется по асимптотической формуле [3, 7, 8]

$$v_{xi}^* = \frac{\Gamma_i}{4\pi r_i}\left(\ln\frac{8r_i}{a_i} - D\right) + O\left(\frac{a_i}{r_i}\ln\frac{r_i}{a_i}\right) \tag{2.10}$$

где D — постоянная, зависящая от распределения завихренности внутри ядра (для однородной завихренности $D=0{,}25$).

Таким образом, для осевой скорости движения тонких тороидальных вихрей с интенсивностями Γ_i имеем выражение

$$\frac{dx_i}{dt} = v_{xi}^* + \frac{1}{4\pi}\sum_j{}' \Gamma_j r_j X_{ij} \tag{2.11}$$

Радиальная составляющая скорости dr_i/dt, как и ранее, определяется формулой (2.4).

Из (2.11) следует, что учет скорости самоиндукции тонких тороидальных вихрей не позволяет рассматривать предельный случай бесконечно тонких вихрей, поскольку при $a_i \to 0$ (но $\Gamma_i \neq 0$) $v_{xi}^* \to \infty$. Для системы тонких тороидальных вихрей, закон движения которых определяется уравнениями (2.4) и (2.11), интеграл P_0 имеет прежний вид (2.5), а функция Гамильтона H_1 равна [7]

$$H_1 = H_0 + h \tag{2.12}$$

$$h = \sum_i h_i, \qquad \frac{\partial h_i}{\partial r_i^2} = \pi \Gamma_i v_{xi}^*$$

$$h = \frac{1}{2} \sum_i \Gamma_i^2 \left[r_i \ln \frac{8 r_i}{a_i} - (1+D) r_i \right] + O\left(\frac{a_i}{r_i} \ln \frac{r_i}{a_i} \right)$$

В [7] функция h не выписана, а H_0 приведена в другом виде.

Итак, система достаточно тонких и удаленных друг от друга вихрей имеет интегралы P_0 (2.5), H_1 (2.12) и, как и прежде, Γ_0 (2.9).

Величина H_1 означает полную кинетическую энергию системы тороидальных вихрей (вернее, ее приближенное значение в силу асимптотического характера формулы (2.10)), причем H_0 дает энергию взаимодействия различных вихрей, а величина h, содержащая диагональные слагаемые,— сумму их собственных энергий (для кольцевого вихря с ненулевым сечением ядра кинетическая энергия конечна [2, 3]). Если вихревую область τ «покрыть» достаточно плотно тонкими тороидальными вихрями, то будем иметь $\Gamma_i \sim \pi \Omega_i a_i^2$, а тогда из (2.12) следует, что в предельном случае $a_i \to 0$ вклад диагональных слагаемых в H_1 стремится к нулю, а это еще раз подтверждает правомочность использования величины H_0 как аналога полной энергии H при аппроксимации вихревого облака системой бесконечно тонких вихревых колец.

Хотя применение системы тороидальных вихрей для моделирования вихревого облака на первый взгляд кажется более естественным, чем применение бесконечно тонких вихрей, на деле возникает ряд существенных затруднений.

Во-первых, формула (2.11) справедлива только для вихрей, достаточно удаленных друг от друга; если же расстояния между вихрями порядка диаметров ядер, то явные формулы, определяющие скорость вихрей за счет их взаимовлияния, отсутствуют, а следовательно, теряется возможность определения скорости их движения.

Во-вторых, за счет деформации ядер с течением времени нарушается их круговая форма, а значит, исключается возможность определения законов движения вихрей по формулам типа (2.4), (2.11). Кроме того, для определения деформации ядер недостаточно знания скоростей движения вихрей в целом; для этого необходимы скорости движения элементов сечения σ_i, но их определение не может быть осуществлено без выхода за рамки модели, рассматривающей тороидальные вихри как первичные объекты системы.

В-третьих, использование модели тонких тороидальных вихрей основано на применимости формул (2.4), (2.11), что возможно лишь в том случае, когда диаметры ядер гораздо меньше, чем расстояния между их центрами. Чтобы обеспечить при этом выполнение равенства циркуляций, нужно, чтобы в каждом тороидальном вихре с радиусом ядра a_i была сосредоточена циркуляция Γ_i, содержащаяся в реальном вихревом облаке в некоторой области σ_i гораздо большей, чем площадь ядра. Но в этом случае, если число вихрей остается фиксированным, величины Γ_i не зависят от a_i и при $a_i \to 0$ диагональные члены в выражении (2.12) неограниченно возрастают, т. е. аппроксимация интеграла H интегралом H_1 неудовлетворительна.

Перечисленные причины сильно ограничивают возможности моделирования вихревого облака при помощи конечной системы тороидальных вихрей.

3. Несколько слов о моделировании осесимметричной вихревой пелены. Если бесконечно тонкая вихревая пелена представляет собой поверхность вращения с образующей в виде дуги AB длиной L на плоскости (x, r) и погонной интенсивностью кольцевых вихрей $\gamma(s)$, то, согласно [5], компоненты скорости частиц жидкости, составляющих пелену, равны

$$\frac{dx_s}{dt}=\frac{1}{4\pi}\int_0^L \gamma_\sigma r_\sigma X_{s\sigma}\,d\sigma,\qquad \frac{dr_s}{dt}=\frac{1}{4\pi}\int_0^L \gamma_\sigma r_\sigma (x_s-x_\sigma)\,Y_{s\sigma}\,d\sigma$$

$$X_{s\sigma}=\int_0^{2\pi}\frac{r_\sigma-r_s\cos\theta}{R_{s\sigma}^3}\,d\theta,\qquad Y_{s\sigma}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{R_{s\sigma}^3}\,d\theta \tag{3.1}$$

$$R_{s\sigma}=((x_s-x_\sigma)^2+r_s^2+r_\sigma^2-2r_sr_\sigma\cos\theta)^{1/2}$$

Индексы s и σ означают, что соответствующие величины вычисляются в точке кривой AB с длиной дуги s или σ.

Для вихревой пелены имеют место законы сохранения импульса, кинетической энергии и полной циркуляции

$$P=\pi\int_0^L \gamma_s r_s^2\,ds=\text{const},\qquad \Gamma=\int_0^L \gamma_s\,d\Gamma=\text{const}$$

$$H=\frac{1}{4}\int_0^L\int_0^L \gamma_s r_s\gamma_\sigma r_\sigma W_{s\sigma}\,ds\,d\sigma,\qquad W_{s\sigma}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{R_{s\sigma}}\,d\theta$$

Заменим вихревую пелену дискретной системой бесконечно тонких вихревых колец C_i, проходящих через точки (x_i, r_i) кривой AB, выбирая их циркуляции, например, из условия $\Gamma_i=\gamma(s_i)\Delta s_i$. Нетрудно видеть, что для указанной дискретной системы справедливы уравнения движения (2.3), (2.4) или (2.8), которые с любой точностью могут аппроксимировать уравнения движения частиц вихревой пелены (3.1), а также справедливы законы сохранения P_0, H_0 и Γ_0, аппроксимирующие точные законы сохранения (3.2).

Из сказанного следует, что конечная система бесконечно тонких вихревых колец без самоиндукции может служить корректной (в указанном смысле) моделью как непрерывного вихревого облака, так и вихревой пелены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вилля Г.* Теория вихрей. Л.; М.: ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит., 1936. 266 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
5. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 242 с.
6. *Кирхгоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
7. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Движение системы вихревых колец в несжимаемой жидкости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 503–506.
8. *Widnall S. E.* The structure and dynamics of vortex filaments // Annual Review Fluid Mechanics. Palo Alto. Calif.: Annu. Rev. Inc., 1975. V. 7. P. 141–166.
9. *Oshima J.* The game of passing-through of a pair of vortex rings // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. № 2. P. 660–664.
10. *Yamada H., Matsui T.* Preliminary study of mutual slip-through of a pair of vortices // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 2. P. 292–294.

Москва
Днепропетровск

Поступила в редакцию
6.I.1986