

УДК 532.526.72

РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНОЙ СКОРОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ О ВИБРАТОРЕ В ДОЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

САВЕНКОВ И. В., ТЕРЕНТЬЕВ Е. Д.

Рассматривается линейная задача о локализованном вибраторе, установленном на плоской пластине в дозвуковом пограничном слое. Пластина и вибратор предполагаются теплоизолированными, размеры вибратора и частота колебаний таковы, что течение можно описать уравнениями пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. Амплитуда колебаний вибратора и соответствующие ей возмущения параметров течения предполагаются малыми, что позволяет линеаризовать эти уравнения. С помощью интегральных преобразований построено решение для значений времени, значительно превышающих период колебаний вибратора. Рассчитаны профили возмущений продольной скорости в зависимости от поперечной координаты для различных значений продольной координаты. Проведено сравнение с профилями возмущений продольной скорости, полученными экспериментально.

1. Постановка задачи и построение решения в нижней области. Пусть на теплоизолированной пластине на достаточном удалении от ее концов установлен вибратор. Длину от передней кромки пластины до вибратора обозначим через L^* (звездочкой сверху пометим размерные величины). Примем, что набегающий дозвуковой поток с числом Маха, меньшим единицы на конечную величину, имеет скорость V_∞^* , направленную вдоль пластины. Индексами ∞ и W отметим параметры газа в невозмущенном стационарном потоке и на теле. Используем декартову систему координат x^*, y^* с началом в точке соединения передней неподвижной части с вибратором. Обозначим через t^* время, u^*, v^* — проекции вектора скорости на оси x^* и y^* , ρ^* — плотность, p^* — давление. Вместо обратной величины числа Рейнольдса используем малый параметр $\varepsilon = R_1^{-1/2}$ ($R_1 = \rho_\infty^* V_\infty^* L^* / \lambda_{1,\infty}^*$, где $\lambda_{1,\infty}^*$ — первый коэффициент вязкости).

Выберем продольный размер вибратора порядка $O(L^* \varepsilon^3)$, амплитуду колебаний — $O(L^* \varepsilon^5)$, частоту — $O(V_\infty^* / (L^* \varepsilon^2))$. Для описания движения, вызванного таким вибратором, удобно выделить три характерные области [1, 2]: верхнюю (внешнюю) — область дозвукового невязкого потока ($y^* = O(L^* \varepsilon^3)$), среднюю — обыкновенный пограничный слой ($y^* = O(L^* \varepsilon^4)$) и нижнюю — пограничный слой с самоиндуцированным давлением ($y^* = O(L^* \varepsilon^5)$). Основные трудности в такой схеме связаны с построением решения в нижней области. Используя это решение, параметры течения в средней и верхних областях можно выписать в явном виде [3, 4].

Введем безразмерные зависимые и независимые переменные, указанные в [3, 4], и используем для всех них прежние обозначения, опустив над ними звездочки. Требуя выполнения условий сращивания с обычным пограничным слоем при $x \rightarrow -\infty$ и $y \rightarrow \infty$, получим из уравнений Навье — Стокса для главных членов разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ систему уравнений нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением [3, 4].

Закон движения вибратора и его форму зададим при $t \geq 0$ в виде

$$y_w = \sigma f(t, x) = \sigma f_1(x) \sin \omega_0 t, \quad \sigma \ll 1, \quad \omega_0 > 0$$

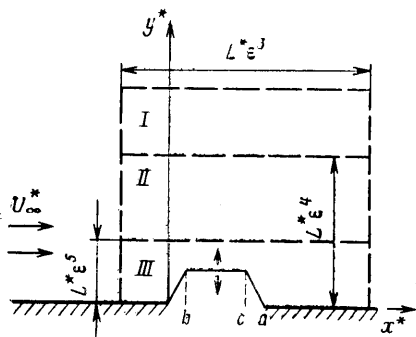
где ω_0 — безразмерная частота. Для сравнения с экспериментом [5] в рас-

четах форму вибратора $f_1(x)$ выберем в виде равнобедренной трапеции, показанной на фиг. 1, с параметрами $a=1,5$; $b=a/6$; $c=5a/6$ и высотой $a/3$. Для моментов времени $t < 0$ положим $y_w = 0$ и пограничный слой будем считать невозмущенным.

Малость параметра σ позволяет разложить искомое решение в ряд по степеням σ

$$u = y + \sigma u_1 + \dots, \quad v = \sigma v_1 + \dots, \quad p = \sigma p_1 + \dots$$

Функции с индексом 1 удовлетворяют линеаризованной системе уравнений нестационарного несжимаемого пограничного слоя. В отличие от классической постановки Прандтля для функций u_1 и p_1 задается дополнительная связь



$$u_1 \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1(t, x_1)}{x_1 - x_0} dx_1$$

Остальные условия такие же, как и для обычного пограничного слоя: условия прилипания на твердой поверхности

$$u_1(t, x, 0) = -f_1(x) \sin \omega_0 t, \\ v_1(t, x, 0) = f_1(x) \omega_0 \cos \omega_0 t$$

Фиг. 1

и начальные условия по времени $u(0, x, y) = 0$.

Построение решения, затухающего при любом конечном $t > 0$ и $x \rightarrow \pm \infty$, подробно описано в [6]. Искомые функции там были разложены в интеграл Фурье по переменной x и в интеграл Лапласа во времени t . После удовлетворения предельным и граничным условиям для изображений по Фурье — Лапласу удалось получить явные выражения. Используя изображение давления, в [6] был вычислен оригинал p_1 — наиболее простая функция, не зависящая от y . Целью настоящей работы является изучение функции u_1 . Что касается функции v_1 , то ее расчет полностью аналогичен расчету для u_1 . Однако главный вклад в возмущение скорости вносит u_1 , поскольку в разложениях по ε [3, 4] эта функция умножается на ε , а v_1 — на ε^3 . Отметим также, что расчет скорости u_1 дает возможность проводить прямое сравнение с экспериментом, поскольку современная термоанемометрическая аппаратура позволяет измерять с очень высокой степенью точности именно пульсации скорости [7].

Выпишем аналитическое выражение для возмущения продольной скорости

$$u_1 = -f_1(x) \sin \omega_0 t + \frac{i \omega_0}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^{1/2}}{|k|} \left(1 - e^{-ikb} - \frac{b}{a-c} e^{-ikc} + \right. \\ \left. + \frac{b}{a-c} e^{-ika} \right) e^{ikh} dk \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{I_1(\Omega + (ik)^{1/2}y) - I_1(\Omega)}{(\omega^2 + \omega_0^2) Q(\Omega, k)} e^{\omega t} d\omega \\ Q(\Omega, k) = -\text{Ai}'(\Omega) + (ik)^{1/2} |k| [I_0 - I_1(\Omega)] \\ \Omega = \omega (ik)^{-1/2}, \quad I_0 = \int_0^{\infty} \text{Ai}(x) dx = \frac{1}{3}, \quad I_1(\Omega) = \int_0^{\Omega} \text{Ai}(z) dz \quad (1.1)$$

Здесь $\text{Ai}(z)$ — функция Эйри [8], $\text{Ai}'(z)$ — ее производная, $\arg i = \pi/2$. Для выделения однозначных ветвей в подынтегральных функциях в (1.1)

на комплексной плоскости k проведем разрез от точки O вдоль мнимой оси и выберем $\pi/2 > \arg k > -3\pi/2$. Для вычисления повторного интеграла (1.1) важное значение имеют корни подынтегрального выражения. Из них два $i\omega_0$ и $-i\omega_0$ не зависят от k и являются характеристиками источника возмущений — вибратора, остальные же — их счетное множество — функции k , и они описывают собственные колебания пограничного слоя. Их определяет дисперсионное уравнение [9]

$$Q(\Omega, k) = 0 \quad (1.2)$$

Среди корней дисперсионного уравнения лишь первый корень — переходит из левой полуплоскости в правую при изменении k вдоль действительной оси, остальные корни лежат в левой полуплоскости. Именно первый корень (1.2) определяет закон нарастания возмущений в пограничном слое вниз по пластине.

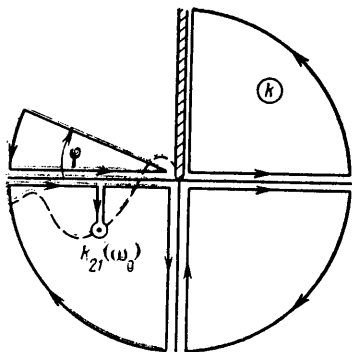
Если устремить время t к бесконечности и рассмотреть ограниченные x и y , то в интеграле (1.1) можно выделить главную часть, имеющую порядок $O(1)$ по t , остальные части будут стремиться к нулю. Способ выделения главной части подробно описан в [6] и поэтому здесь не приводится. В результате при $t \rightarrow \infty$ и $|x|, y < \text{const}$ получим

$$\begin{aligned} u_1 = & -f_1(x) \sin \omega_0 t + \text{Im} \left\{ e^{i\omega_0 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-ikb} - \frac{b}{a-c} e^{-ikc} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{b}{a-c} e^{-ika} \right) \Phi_u(k, x, y) dk + 2\pi i \theta(\omega_0 - \omega_*) \left(1 - e^{-ik_{21}(\omega_0)b} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{b}{a-c} e^{-ik_{21}(\omega_0)c} + \frac{b}{a-c} e^{-ik_{21}(\omega_0)a} \right) \text{res } \Phi_u(k_{21}(\omega_0), x, y) \right] \right\} \\ \Phi_u(k, x, y) = & \frac{1}{\pi} \frac{(ik)^{1/3}}{|k|} \frac{[I_1(\Omega_0 + (ik)^{1/3}y) - I_1(\Omega_0)]}{\text{Ai}'(\Omega_0) - (ik)^{1/3}|k|(I_0 - I_1(\Omega_0))} e^{ikhx} \\ \text{res } \Phi_u(k_{21}(\omega_0), x, y) = & -\frac{3}{2\pi k_{21}(\omega_0)} \times \\ & \times \frac{[I_1(\Omega_{1,0} + (ik_{21}(\omega_0))^{1/3}y) - I_1(\Omega_{1,0})] e^{ik_{21}(\omega_0)x}}{2(I_0 - I_1(\Omega_{1,0})) + \Omega_{1,0}(1 - \omega_0/k_{21}^2(\omega_0)) \text{Ai}(\Omega_{1,0})} \\ & \Omega_0 = i^{1/3} \omega_0 k^{-2/3}, \quad \Omega_{1,0} = i^{1/3} \omega_0 (k_{21}(\omega_0))^{-2/3} \end{aligned} \quad (1.3)$$

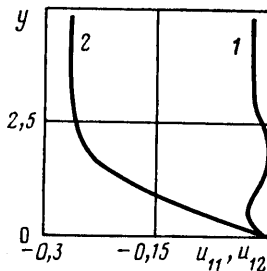
Здесь $k_{21}(\omega_0)$ — первый корень модифицированного дисперсионного уравнения

$$Q_2(\Omega_0, k) = \text{Ai}'(\Omega_0) + i^{1/3} k^{1/3} [I_0 - I_1(\Omega_0)] = 0 \quad (1.4)$$

где под обозначением $Q_2(\Omega_0, k)$ подразумевается аналитическое продолжение $Q(\Omega, k)$ с отрицательной полуоси k . Его траектория изображена штриховой линией на фиг. 2. Формула (1.3) находится в полном соответствии с постулатом, предложенным в [10]. Согласно этому постулату, к ограниченному по x решению задачи об установившихся колебаниях, задаваемому интегралом в (1.3), для закритических частот следует добавить пропорциональное $\exp(ik_{21}(\omega_0)x)$ слагаемое, которое описывает нарастание возмущений вниз по потоку с коэффициентом, обеспечивающим аналитическую зависимость решения от частоты ω_0 . Возможна эквивалентная формулировка постулата: путь интегрирования в (1.3) должен проходить ниже точки $k_{21}(\omega_0)$. Если рассматриваются частоты, меньшие критической, то в качестве пути может быть выбрана действительная ось. При $\omega_0 > \omega_*$ первый корень $k_{21}(\omega_0)$ переходит в нижнюю полуплоскость и если по-прежнему сохранять интегрирование по действительной оси на фиг. 2, то к интегралу следует добавить вычет в точке $k_{21}(\omega_0)$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Интеграл в (1.3) разобьем на четыре интеграла, порожденных слагаемыми, составляющими выражение в круглых скобках. В отличие от вычисления интеграла для давления [11], где такое разбиение невозможно, здесь это можно сделать, поскольку каждый из четырех интегралов отдельно существует. Остановимся на вычислении первого из них $I(x, y)$, остальные рассчитываются аналогично. Итак, имеем

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_u(k, x, y) dk \quad (1.5)$$

Поскольку под знаком интеграла в (1.5) стоит неаналитическая функция, представим $I(x, y)$ в виде суммы двух интегралов от аналитических функций

$$I(x, y) = I_-(x, y) + I_+(x, y); \quad I_- = \int_{-\infty}^0 \Phi_u dk, \quad I_+ = \int_0^{\infty} \Phi_u dk$$

Если подынтегральную функцию в I_- аналитически продолжить на левую полуплоскость k , то, согласно [9], она будет иметь там счетное количество полюсов первого порядка, определяемых уравнением (1.4). Функция же, являющаяся аналитическим продолжением подынтегральной функции в I_+ на правую полуплоскость, вообще не будет иметь на ней особенностей.

Для $x < 0$ совершим преобразование путей интегрирования, аналогичное тому, как это было сделано при вычислении давления [11]: вместо действительной отрицательной полуоси в I_- перейдем к интегрированию по отрицательной части мнимой оси и учтем для $\omega_0 > \omega_*$ полюс в точке $k_{21}(\omega_0)$, в I_+ перейдем так же к отрицательной части мнимой оси (фиг. 2). Интегралы по дугам в третьем и четвертом квадрантах при $x < 0$ стремятся к нулю при неограниченном увеличении радиусов этих дуг, поэтому они не учитываются.

Для $x > 0$ в интеграле I_+ в качестве нового пути интегрирования выберем положительную часть мнимой оси, а в I_- — луч, лежащий во втором квадранте и составляющий угол φ с отрицательным направлением действительной оси (фиг. 2). Угол φ выберем так, чтобы все корни (1.4) лежали выше этого луча, а первый корень $k_{21}(\omega_0)$ — ниже. Интегралами по соответствующим дугам при таком преобразовании можно пренебречь.

Применение леммы Лапласа [12] к преобразованным интегралам I_- и I_+ позволяет получить асимптотическое поведение скорости u_1 при $|x| \rightarrow \infty$. При $x \rightarrow -\infty$ имеем

$$u(t, x, y) = u_-(t, x, y) + O(x^{-5}) = (2b/\pi\omega_0) \operatorname{Im} \{ e^{i\omega_0 t} \{ -i(a+c-b)a_0(y)x^{-3} + x^{-4}[-i(a^2+c^2-b^2+ac)a_0(y) + 3(a+c-b)a_1(y)] \} \} + O(x^{-5}) \quad (1.6)$$

$$a_0(y) = 1 - \exp(-i^{1/2}\omega_0 y)$$

$$a_1(y) = [1 - a_0(y)](3/4\omega_0^{-1}y + 1/4i^{1/2}\omega_0^{-1/2}y^2) - a_0(y)i^{-1/2}\omega_0^{-2}$$

При $x \rightarrow \infty$ в асимптотике скорости выделим два члена, первый из которых совпадает с $u_-(t, x, y)$, а второй порожден вычетом в точке $k_{21}(\omega_0)$

$$u_1(t, x, y) = u_-(t, x, y) + \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega_0 t} \left(1 - e^{-ik_{21}(\omega_0)b} - \frac{b}{a-c} e^{-ik_{21}(\omega_0)c} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b}{a-c} e^{-ik_{21}(\omega_0)a} \right) \operatorname{res} \Phi_u(k_{21}(\omega_0), x, y) \right\} \quad (1.7)$$

Именно второй член в (1.7) и описывает волну Толлмина — Шлихтинга, распространяющуюся вниз по течению от вибратора. Амплитуда волны определяется формой вибратора и частотой колебаний ω_0 . Инкремент нарастания, равный $-\operatorname{Im}(k_{21}(\omega_0))$, определяется только частотой. И так как первый член в (1.7) стремится при $x \rightarrow \infty$ к нулю, то формула (1.7) при $\omega_0 > \omega_*$ описывает экспоненциально нарастающую волну. При больших, но конечных значениях t формулой (1.3) и, следовательно (1.7), можно пользоваться для ограниченных значений $x < 2,4t$ [5, 13]. Для $x > 2,4t$ волна Толлмина — Шлихтинга непрерывно переходит в волновой пакет [13], порождаемый начальным импульсом при запуске вибратора.

При вычислении на ЭВМ преобразованных интегралов I_- и I_+ использовалась новая переменная $z = k^{1/2}$. Верхний предел интегрирования z_∞ был выбран равным 6. Интегрирование велось по методу трапеции, шаг интегрирования изменялся от 0,01 для малых значений z , где подынтегральная функция быстро колеблется, до 0,5 в окрестности z_∞ , где функция меняется плавно. Расчет I_- при $x > 0$ проводился для двух углов: $\varphi = \pi/5$ и $\varphi = \pi/6$, результаты совпали с точностью до 0,1%. Была проведена проверка для особого значения $x=0$, когда можно пользоваться интегрированием как в нижней полуплоскости, так и в верхней. Максимальное различие при расчете $I(0, y)$ по этим двум системам контуров составляло 0,5%. Дополнительный контроль проводился сравнением с вычислениями по асимптотическим формулам (1.6) и (1.7). Так, при $|x|=5$ совпадали два десятичных знака, а при $|x|=10$ — уже четыре знака.

Согласно формуле (1.3), возмущенную скорость можно представить в виде

$$u_1(t, x, y) = u_{11}(x, y) \cos \omega_0 t + u_{12}(x, y) \sin \omega_0 t \quad (1.8)$$

На фиг. 3 изображены характерные профили $u_{11}(x_0, y)$ и $u_{12}(x_0, y)$ за вибратором для сечения $x_0 = 2,14$. Обе функции при $y \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным значениям

$$A_{11}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} u_{11}(x, y), \quad A_{12}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} u_{12}(x, y)$$

2. Построение равномерно пригодного решения и сравнение с экспериментом. В работах, посвященных построению решения задач пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, изучается обычно лишь пристенная область, рассмотренная выше. Для полного сравнения с экспериментом необходимо иметь все решение в поперечном направлении. В средней области при $y^* = O(L^* \varepsilon^4)$ для продольной скорости справедливо разложение

$$u = U_0(y_2) + \varepsilon \delta \lambda^{-1/4} (A_{11}(x) \cos \omega_0 t + A_{12}(x) \sin \omega_0 t) dU_0(y_2)/dy_2 \\ y^* = L^* \varepsilon^4 y_2 \quad (2.1)$$

В (2.1) $U_0(y_2)$ — профиль скорости в пограничном слое на полубесконечной пластине (профиль Блазиуса), $\lambda = dU_0(0)/dy_2 = 0,3321$. Используя (1.8) и (2.1), запишем равномерно пригодное решение [14] для средней и нижней областей, построенное аддитивным способом

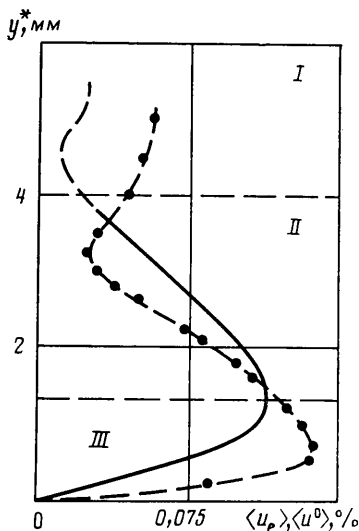
$$u = U_0(y_2) + \varepsilon \delta \lambda^{1/4} u_1^\circ \cos \omega_0 t + \varepsilon \delta \lambda^{1/4} u_2^\circ \sin \omega_0 t = U_0(y_2) + \varepsilon \delta \lambda^{1/4} u^\circ, \\ y_2 = \varepsilon \lambda^{-1/4} y \\ u_1^\circ = u_{11}(x, y) + A_{11}(x) \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dU_0(y_2)}{dy_2} - 1 \right)$$

$$u_2^{\circ} = u_{12}(x, y) + A_{12}(x) \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dU_0(y_2)}{dy_2} - 1 \right)$$

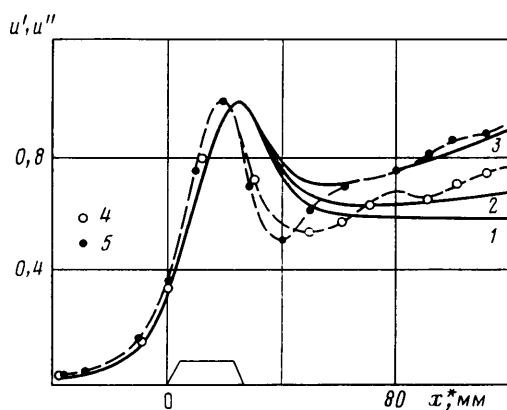
В эксперименте непосредственно измеряется среднеквадратичное (усредненное по времени) возмущение скорости

$$\langle u^{\circ} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T (u^{\circ})^2 dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((u_1^{\circ})^2 + (u_2^{\circ})^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

Проведем сравнение с экспериментом, выполненным В. М. Гилевым и В. В. Козловым [5]. В пограничный слой на плоской пластине в [5] возмущения вводились вибратором, имеющим форму равнобедренной трапеции с нижним основанием $a^* = 28$ мм, и верхним основанием, равным



Фиг. 4



Фиг. 5

$2a^*/3$. Амплитуда колебаний вибратора составляла $\sigma^* = 0,01$ мм, что обеспечивало линейность возмущений перед вибратором и вплоть до расстояний $8a^*$ вниз по потоку за вибратором. Число Рейнольдса R_{1e} , вычисленное по расстоянию от носка пластины до вибратора, равнялось $2,38 \cdot 10^5$, что соответствует $\epsilon_e = R_{1e}^{-1/4} = 0,213$. На фиг. 4 изображены профили среднеквадратичной пульсации скорости, полученной в эксперименте $\langle u_e \rangle$ и вычисленной согласно (2.2) $\langle u^{\circ} \rangle$ для $x = 2,14$, что соответствует $x^* = 40$ мм. В областях II и III теоретическая кривая изображена сплошной линией, а в области I — штриховой, так как там расчеты не проводились, поскольку, согласно общим построениям [1, 2], в I возмущение скорости пропорционально ϵ^2 в отличие от областей II и III, где возмущение скорости порядка ϵ . Однако выход на постоянное значение при $y_2 \rightarrow \infty$ в следующем приближении, пропорциональном ϵ^2 , при переходе из области II в область I не вызывает сомнений, так как, согласно [4], в I при $y_1 \rightarrow 0$ возмущенная скорость стремится к $p_1(t, x) \neq 0$. Из фиг. 4 видно, что теоретический профиль качественно повторяет форму экспериментального профиля.

Наибольший интерес представляют графики, отражающие процесс генерации волны Толлмина — Шлихтинга, — графики нарастания амплитуды. В эксперименте они строились по измерениям, отвечающим максимальной амплитуде возмущений при фиксированном x^* . Согласно теоретическим представлениям, такая линия должна лежать на перекрытии III

и II областей. На фиг. 5 сплошными линиями нарисованы теоретические кривые $u' = \langle u^\circ \rangle / \langle u^\circ \rangle_m$, где $\langle u^\circ \rangle_m$ — максимальная по x амплитуда скорости $\langle u^\circ \rangle$. Цифрами 1, 2, 3 помечены кривые, отвечающие частотам $\omega_0 = 2,29; 2,50; 3,00$. Штриховыми линиями изображены экспериментальные кривые $u' = \langle u_e \rangle / \langle u_e \rangle_m$, где использована аналогичная нормировка измеренной усредненной по времени скорости к ее максимальному по x значению $\langle u_e \rangle_m$; цифрой 4 отмечена кривая, отвечающая частоте $f^* = 45$ Гц, а цифрой 5 — частоте $f^* = 70$ Гц.

Хотя между теоретическими и экспериментальными кривыми имеется сдвиг по x , с качественной точки зрения эти кривые в области над вибратором довольно хорошо согласуются. Наличие сдвига может быть объяснено тем, что эксперименты велись не для столь больших чисел R_1 , как это было бы желательно для развиваемой теории, и что форма самого вибратора [5] определялась довольно грубо — с точностью 30%. Выход кривых нарастания на свои асимптотики, происходящий, согласно фиг. 5, при $x^* > 60$ мм, позволял судить о завершении процесса формирования волны Толлмина — Шлихтинга; это же подтверждали и кривые нарастания фазы. Что же касается области перед вибратором, то здесь теоретические и экспериментальные кривые совпадали не только качественно, но и количественно.

Основной полученный результат состоит в том, что удалось показать применимость теории нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением, развитую для чисел $R_1 \rightarrow \infty$, к описанию отдельных деталей течений с умеренными числами R_1 . Среди этих деталей — профили возмущений скорости около вибратора и кривые нарастания амплитуды возмущения скорости, измеряемые непосредственно в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53–58.
2. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plat. II. — Mathematika, 1969, v. 16, № 31, p. 106–121.
3. Рыжов О. С. Уравнения нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 4, с. 780–783.
4. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007–1023.
5. Гулев В. М., Козлов В. В. Возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое на вибрирующей поверхности. — ПМТФ, 1984, № 6, с. 73–77.
6. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 2, с. 264–272.
7. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 151 с.
8. Фок В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 80 с.
9. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1326–1329.
10. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах. — ПМТФ, 1982, № 4, с. 65–72.
11. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1049–1055.
12. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962. 200 с.
13. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. Об одном способе генерирования волновых пакетов в пограничном слое. — В сб.: Современные вопросы механики сплошной среды. М., 1985, с. 82–89.
14. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. Annotated edition. Stanford, Calif.: Parabolic Press, 1975. 271 p.

Москва

Поступила в редакцию
14.V.1986