

УДК 532.526

К ТЕОРИИ САМОИНДУЦИРОВАННОГО ОТРЫВА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

СЫЧЕВ ВИК. В.

Рассматривается плоское стационарное течение несжимаемой жидкости в окрестности точки отрыва турбулентного пограничного слоя. Показано, что отрыв происходит в области, которая лежит на некотором малом расстоянии вниз по потоку от области взаимодействия.

1. Рассмотрим плоское стационарное течение в окрестности точки отрыва турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости от гладкой поверхности твердого тела.

Согласно исходному предположению, положенному в основу асимптотической теории, развитой в [1], предельное состояние поля течения в масштабах обтекаемого тела при стремлении числа Рейнольдса R к бесконечности ищется в классе потенциальных течений идеальной жидкости со свободными линиями тока (схема Кирхгофа). Градиент давления вдоль поверхности тела и кривизна свободной линии тока в окрестности точки отрыва определяются выражениями [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0} &= \begin{cases} k_0(-x)^{-1/2} + O(1), & x \rightarrow -0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \\ \kappa &= \frac{k_0}{U_0^2} x^{-1/2} + \kappa_0 + O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь κ_0 — кривизна поверхности тела в точке отрыва свободной линии тока $x=y=0$. Значение положительной постоянной k_0 , которое связано с положением точки отрыва, остается конечным при $R \rightarrow \infty$, а не стремится к нулю, как в случае ламинарного течения [3], т. е. предельное решение не удовлетворяет условию Бриллюэна — Вилля.

Это исходное предположение находится в полном соответствии с многочисленными экспериментальными данными, согласно которым точка отрыва турбулентного пограничного слоя оказывается сдвинутой на конечное расстояние вниз по потоку от соответствующей точки при ламинарном режиме обтекания, а также с результатами работы [4]. В [4] был проведен расчет течения в турбулентном пограничном слое с распределением давления, полученным экспериментально в [5]. Оказалось, что при подходе к точке отрыва ($x \rightarrow -0$) инерционные члены уравнения изменяются пропорционально $|x|^{-1/2}$, в то время как члены с турбулентными напряжениями остаются конечными.

В (1.1) и всюду в дальнейшем будем использовать следующие обозначения: lx, ly — криволинейные ортогональные координаты, связанные с поверхностью тела $y=0$; $u_\infty u, u_\infty v$ — осредненные значения компонент вектора скорости вдоль этих осей; $lu_\infty \psi$ и $p_\infty + \rho u_\infty^2 p$ — осредненные значения функции тока и давления; l — характерный размер обтекаемого тела, u_∞ и p_∞ — параметры однородного набегающего потока, ρ — плотность среды;

$U_{00} = (1 - 2p_{00})^{1/2}$, p_{00} — значения скорости и давления на свободной линии тока, $R = u_{\infty} l / \nu$ — число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости. Через $\rho u_{\infty}^2 \varepsilon \tau$ обозначим значения турбулентных напряжений Рейнольдса, где $\varepsilon = \varepsilon(R)$ — малый параметр, характеризующий относительную толщину пограничного слоя. Будем пользоваться уравнениями турбулентного пограничного слоя, записанными в переменных Мизеса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon u \frac{\partial \tau}{\partial \psi} + R^{-1} u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \dots, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{1}{u} \quad (1.2)$$

Введенное обозначение для турбулентных напряжений использовалось нами в [1], но оно отличается от общепринятого. Обычно эти напряжения обозначают через $\rho u_{\infty}^2 \varepsilon^* \tau$ [6, 7], так что толщина всего турбулентного пограничного слоя есть величина порядка ε^* , где $\varepsilon^* = O(1/\ln R)$. Введение в качестве малого параметра $\varepsilon = \varepsilon^*{}^2$ связано с тем, что в процессе взаимодействия в окрестности точки отрыва [1] ключевую роль играет область, в которой $y = O(\varepsilon) = O(\varepsilon^*{}^2)$ и где инерционные члены, градиент давления и член с турбулентным трением — величины одного порядка.

Область, в которой $y = O(\varepsilon^*)$, может вообще не рассматриваться при анализе течения вблизи точки отрыва, поскольку здесь справедлив закон дефекта скорости и, следовательно, в главном члене разложения скорость в ней не отличается от скорости внешнего потенциального течения и $\tau = O(1)$.

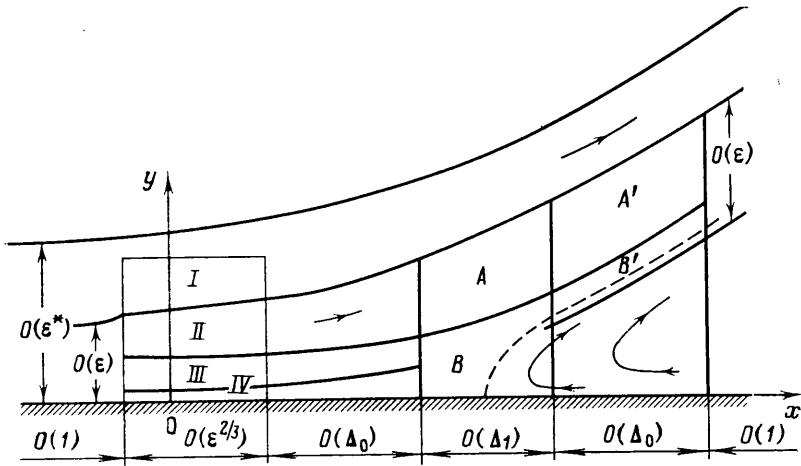
В [1] в результате асимптотического анализа уравнений Рейнольдса без использования гипотез их замыкания было показано, что в окрестности точки отрыва лежит область взаимодействия. В настоящей работе будет пересмотрено решение задачи для этой области, а также исследовано течение в областях, лежащих вниз по потоку от нее. Заметим, что, как и в [1], анализ будет ограничен рассмотрением течения вне вязкого пристеночного подслоя.

Решение уравнений пограничного слоя при подходе к области взаимодействия ($x \rightarrow -0$) ведет себя особым образом. В частности, толщина пограничного слоя (область $y = O(\varepsilon)$) возрастает по логарифмическому закону. Во внутренней части пограничного слоя происходит интенсивное торможение жидкости и профиль скорости при этом приобретает форму профиля скорости в следе вблизи точки его разрушения [8], что соответствует эмпирическому закону следа Коулса [9]. Решение для пограничного слоя и решение (1.1) для внешнего потенциального потока становятся несправедливыми при $|x| = O(\varepsilon^{3/2})$, $|y| = O(\varepsilon^{3/2})$, поскольку изменения давления и наклона линий тока являются здесь взаимообусловленными, т. е. имеет место взаимодействие.

Пограничный слой в области взаимодействия имеет многослойную структуру (фиг. 1). В его основной части, где $\psi = O(\varepsilon)$ (область II), профиль скорости и турбулентные напряжения сохраняются вдоль линий тока и соответствующие асимптотические разложения имеют вид [1]

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{3/2} x^*, \quad \psi = \varepsilon \Psi, \quad y = \varepsilon Y \\ u &= u_0(\Psi) + \varepsilon^{1/2} u_1^*(x^*, \Psi) + \dots \\ \tau &= \tau_0(\Psi) + \dots, \quad Y = -(6a_0)^{-1} \ln \varepsilon + Y_0^*(x^*, \Psi) + \dots \\ p &= p_{00} + \varepsilon^{1/2} P_1(x^*, \Psi) + \dots, \quad a_0 = \text{const} > 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Действие большого самоиндуцированного градиента давления $\partial p / \partial x = O(\varepsilon^{-1/2})$ приводит к тому, что изменение турбулентного трения не влияет на решение для главных членов разложений. Решение находится в результате подстановки (1.3) в исходные уравнения Рейнольдса или, что то



Фиг. 1

же самое, в (1.2)

$$\frac{\partial P_1}{\partial \Psi} = 0, \quad P_1 = p^*(x^*); \quad u_1^* = -\frac{p^*(x^*)}{u_0(\Psi)}$$

$$Y_0^* = y_0(\Psi) + G^*(x^*) + \Phi(x^*)\theta(x^*) \quad (1.4)$$

$$y_0 = \int u_0^{-1}(\Psi) d\Psi; \quad u_0(\infty) = U_{00}$$

Здесь функции $G^*(x^*)$ и $\Phi(x^*)$ определяют вытесняющее действие пограничного слоя и форму нулевой оторвавшейся линии тока; $\theta(x^*)$ — функция Хэвисайда.

Решение (1.3), (1.4) несправедливо в области III, где $\Psi = O(\varepsilon^{1/6})$. Это область медленного течения, в которой проявляется нелинейность исходных уравнений, но действие турбулентных напряжений, как и в области II, несущественно в главных членах и, следовательно, здесь справедлив интеграл Бернулли. Течение в этой области определяет основной вклад в вытесняющее действие пограничного слоя, что позволяет найти распределение давления $p^*(x^*)$ в области взаимодействия, не прибегая к каким-либо гипотезам замыкания. Соответствующее решение имеет вид [1]

$$\Psi = \varepsilon^{1/6} \Psi^*, \quad u = \varepsilon^{1/6} u^*(x^*, \Psi^*) + \dots$$

$$\tau = \tau^*(x^*, \Psi^*) + \dots, \quad Y = Y^*(x^*, \Psi^*) + \dots \quad (1.5)$$

$$p = p_{00} + \varepsilon^{1/2} p^*(x^*) + \dots$$

$$u^{*2} + 2p^* = H(\Psi^*), \quad \partial Y^* / \partial \Psi^* = u^{*-1}$$

Функция Бернулли

$$H(\Psi^*) = a_0^2 \Psi^{*2} + 2B^*, \quad B^* = \text{const} \quad (1.6)$$

находится из сращения с решением для пограничного слоя при $x \rightarrow 0$ и тогда из (1.5) следует:

$$Y^* = \frac{1}{2a_0} \ln \left[\frac{u^* + a_0 \Psi^*}{u^* - a_0 \Psi^*} \right] + \Phi(x^*)\theta(x^*) \quad (1.7)$$

Из сращения решений в областях II и III получаем

$$G^* = -\frac{1}{2a_0} \ln \left(-\frac{p^* - B^*}{2a_0^2} \right)$$

$$u_0 = a_0 \Psi + \dots, \quad \tau_0 = b_0 + \dots \quad (\Psi \rightarrow 0)$$

$$\tau^* = b_0 + \dots \quad (\Psi^* \rightarrow \infty), \quad b_0 = \text{const} \quad (1.8)$$

Другие соотношения, связывающие функции $p^*(x^*)$, $G^*(x^*)$ и $\Phi(x^*)$ и замыкающие задачу для областей II и III, определяются на основании теории малых возмущений для течения в области I с поперечным размером $y=O(\varepsilon^{1/2})$. В [1] было приведено численное решение получающихся в результате уравнений в предположении, что в (1.6) значение аддитивной постоянной $B^*>0$. (При $B^*<0$ решение становится мнимым. Заметим также, что в [1] этой постоянной давалась другая интерпретация — она была включена в функцию $p^*(x^*)$.) Эти уравнения совпадают с соответствующими уравнениями для областей взаимодействия при ламинарном отрыве пограничного слоя на подвижной поверхности [10] и разрушении следа [8]. Причина этого заключается в том, что механизм взаимодействия во всех случаях обусловлен вытесняющим действием, которое оказывает течение в нелинейной области, где трение несущественно, а функция Бернулли имеет вид (1.6).

Дальнейшие исследования этих ламинарных течений показали, что значение постоянной B^* следует положить равным нулю [11]. При этом оказалось, что отрыв потока происходит не в области взаимодействия, а на некотором расстоянии вниз по потоку от нее [12, 13].

Поэтому можно предположить, что и в рассматриваемом турбулентном течении значение $B^*=0$. Интеграл теории малых возмущений вместе с (1.8) приводит тогда к следующему уравнению:

$$\frac{U_\infty^2}{2a_0} \frac{p^{*\prime}(x^*)}{p^*(x^*)} = -2k_0 \sqrt{x^*} \theta(x^*) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p^*(t) + 2k_0 \sqrt{-t} \theta(-t)}{t-x^*} \right] dt \quad (1.9)$$

Решение этого уравнения находится численно, и оно соответствует безотрывному течению в области III, т. е. $\Phi(x^*)=0$ (см. [11, 12]).

На фоне большого градиента давления действие турбулентных напряжений становится существенным (в главных членах разложений) лишь в тонком слое IV, в котором асимптотические разложения решения имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \Psi &= \varepsilon^{5/6} \Psi^\circ, & u &= \varepsilon^{1/6} u^\circ(x^*, \Psi^\circ) + \dots \\ \tau &= \varepsilon^{1/2} \tau^\circ(x^*, \Psi^\circ) + \dots, & Y &= \varepsilon^{3/2} Y^\circ(x^*, \Psi^\circ) + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь и всюду ниже $\Phi(x^*)=B^*=0$.

Распределение давления в этой области в силу его неизменности поперек пограничного слоя определяется выражениями (1.5), (1.9). Искомые функции связаны уравнениями турбулентного пограничного слоя

$$u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x^*} + \frac{dp^*}{dx^*} = u^\circ \frac{\partial \tau^\circ}{\partial \Psi^\circ}, \quad \frac{\partial Y^\circ}{\partial \Psi^\circ} = \frac{1}{u^\circ} \quad (1.11)$$

Из срачивания решений в областях III и IV следует, что при $\Psi^\circ \rightarrow \infty$

$$u^\circ = [-2p^*(x^*)]^{1/2} + O(\Psi^{\circ-1/2}), \quad \tau^\circ = c^\circ(x^*) \Psi^{\circ 1/2} + \dots \quad (1.12)$$

При $\Psi^\circ=0$ решение в области IV должно удовлетворять условию непротекания, т. е.

$$u^\circ(x^*, 0) = u_w^*(x^*), \quad \tau^\circ(x^*, 0) = \tau_w^*(x^*), \quad Y^\circ(x^*, 0) = 0 \quad (1.13)$$

где функции $u_w^*(x^*)$, $\tau_w^*(x^*)$ определяют распределение скорости и турбулентного трения на внешней границе вязкого пристеночного подслоя.

При $x^* \rightarrow -\infty$ решение для областей II–IV срачивается с решением

для пограничного слоя при $x \rightarrow -0$, поэтому

$$p^* = -2k_0(-x^*)^{1/2} + o(1) \quad (1.14)$$

$$G^* = -\frac{1}{4a_0} \ln(-x^*) + \frac{1}{a_0} \ln\left(\frac{a_0}{\sqrt{k_0}}\right) + o(1), \quad x^* \rightarrow -\infty$$

Из (1.8), (1.9), (1.14) следует, что при $x^* \rightarrow \infty$

$$p^* = -2k_0 x^{*3/2} \exp[-\gamma_0 x^{*3/2} + o(1)], \quad \gamma_0 = \frac{8k_0 a_0}{3U_{00}^2} \quad (1.15)$$

$$G^* = \frac{\gamma_0}{2a_0} x^{*3/2} - \frac{1}{4a_0} \ln x^* + \frac{1}{a_0} \ln\left(\frac{a_0}{\sqrt{k_0}}\right) + o(1)$$

Таким образом, как это видно из выражений (1.5), (1.6), (1.15), (1.12), взаимодействие приводит к дальнейшему замедлению течения в областях III и IV, но не приводит к отрыву пограничного слоя.

2. Анализ ламинарных течений в пограничном слое на подвижной поверхности и в следе [12, 13] показал, что вследствие экспоненциального уменьшения градиента давления (1.15) при $x^* \rightarrow \infty$ необходимо ввести в рассмотрение новую характерную область течения. В этой области, которая лежит на некотором расстоянии вниз по потоку от области взаимодействия и является продолжением нелинейной части пограничного слоя, становится существенным действие сил внутреннего трения и именно в ней происходит отрыв.

Аналогичная ситуация, как будет показано, возникает и в рассматриваемом турбулентном течении. Действительно, уменьшение градиента давления (1.15) при $x^* \rightarrow \infty$ должно привести к тому, что в некоторой области B (фиг. 1), которая является продолжением области III, уравнение Бернулли окажется несправедливым, поскольку станет существенным действие турбулентных напряжений. В этой области и должен происходить отрыв.

Экспоненциальный характер уменьшения величины давления $p^*(x^*)$ при $x^* \rightarrow \infty$ указывает, что в области B значение $p - p_{00}$ по порядку величины меньше, чем в области взаимодействия, т. е.

$$p - p_{00} = \sigma \varepsilon^{1/3} P_0 + \dots \quad (2.1)$$

где $\sigma = \sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следуя [12], перейдем в полученном решении для области III от переменных x^* , Ψ^* к переменным p^* , Ψ^* . Тогда, используя (1.15), получим, что при $p^* \rightarrow -0$ (т. е. $x^* \rightarrow \infty$)

$$x^* = \gamma_0^{-2/3} \chi^{2/3} + \frac{2}{9} \gamma_0^{-2/3} \chi^{-1/3} \ln \chi + \frac{2}{3} \gamma_0^{-2/3} (-\ln \beta^*) \chi^{-1/3} + O(\chi^{-2/3})$$

$$\chi = -\ln(-p^*), \quad \beta^* = (2k_0)^{-1} \gamma_0^{1/3} \quad (2.2)$$

а решение (1.5)–(1.7) принимает вид

$$u^* = (-p^*)^{1/2} F_0(\xi), \quad Y^* = H_0(\xi), \quad \xi = \frac{\Psi^*}{(-p^*)^{1/2}} \quad (2.3)$$

$$F_0 = (a_0^2 \xi^2 + 2)^{1/2}, \quad H_0 = \frac{1}{2a_0} \ln \left[\frac{F_0 + a_0 \xi}{F_0 - a_0 \xi} \right]$$

Рассматривая теперь (2.2), (2.3) как внутренний предел внешнего асимптотического разложения при $p^* \rightarrow -0$ и переходя на основании (2.1) к внутренней переменной

$$P_0 = \sigma^{-1} p^* \quad (2.4)$$

находим, что в области B

$$x = \varepsilon^{2/3} x^* = \Delta_0 \gamma_0^{-2/3} + \Delta_1 X(P_0) + o(\Delta_1); \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi^* &= O(\sigma^{1/2}), \quad u^* = O(\sigma^{1/2}), \quad Y^* = O(1), \quad \tau^* = O(1) \\ \Delta_0 &= \varepsilon^{2/3} \left[(\ln \sigma^{-1})^{2/3} + \frac{2}{9} (\ln \ln \sigma^{-1}) (\ln \sigma^{-1})^{-1/3} \right] \\ \Delta_1 &= \varepsilon^{2/3} (\ln \sigma^{-1})^{-1/3} \end{aligned}$$

и при $P_0 \rightarrow -\infty$ имеет место представление

$$X(P_0) = -\frac{2}{3} \gamma_0^{-2/3} \ln(-\beta^* P_0) + o(1) \quad (2.6)$$

Порядок величины турбулентных напряжений в (2.5) определяется условием срачивания (1.8) при $\Psi^* \rightarrow \infty$.

Выражения (2.5) для x указывают, что область B находится на расстоянии $O(\Delta_0) > \varepsilon^{2/3}$ от области взаимодействия. Следовательно, решения для областей III и B не имеют области перекрытия в исходных переменных и поэтому срачивание следует проводить в переменных p, ψ при $P_0 \rightarrow -\infty$ и $p^* \rightarrow -0$.

Используя полученные выражения (2.4), (2.5) и вспоминая разложения (1.5), представим решение в области B (в исходных переменных) в виде

$$\begin{aligned} x &= \gamma_0^{-2/3} \Delta_0 + \Delta_1 X, \quad \Psi = \varepsilon^{1/3} \sigma^{1/2} \Psi_0 \\ u &= \varepsilon^{1/3} \sigma^{1/2} U_0(X, \Psi_0) + \dots, \quad \tau = T_0(X, \Psi_0) + \dots \\ Y &= Y_0(X, \Psi_0) + \dots, \quad p = p_{00} + \varepsilon^{1/3} \sigma P_0(X, \Psi) + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7), (2.5) в уравнения Рейнольдса и исходя на основании сказанного выше из условия баланса конвективных членов с членами, содержащими турбулентные напряжения, приходим к уравнениям турбулентного пограничного слоя

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial X} + \frac{\partial P_0}{\partial X} = U_0 \frac{\partial T_0}{\partial \Psi_0}, \quad \frac{\partial P_0}{\partial \Psi_0} = 0, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial \Psi_0} = \frac{1}{U_0} \quad (2.8)$$

Для малого параметра $\sigma(\varepsilon)$ при этом получаем трансцендентное уравнение

$$\sigma^3 \ln \sigma^{-1} = \varepsilon$$

Из срачивания решений в областях B и III следует, что при $X \rightarrow -\infty$ (или $P_0 \rightarrow -\infty$)

$$U_0 = (-P_0)^{1/2} F_0(\xi) + \dots, \quad Y_0 = H_0(\xi) + \dots, \quad \xi = \frac{\Psi_0}{(-P_0)^{1/2}}$$

где функции $F_0(\xi)$, $H_0(\xi)$ определяются выражениями (2.3), а на основании (2.6)

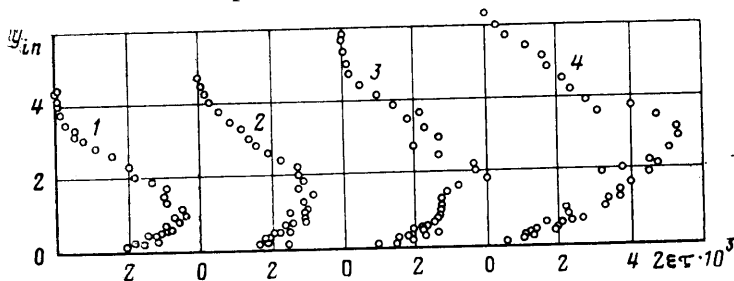
$$P_0 = -2k_0 \gamma_0^{-1/3} \exp\left(-\frac{3}{2} \gamma_0^{2/3} X\right) + \dots$$

Рассмотрим течение в области IV. При $x^* \rightarrow \infty$ и $p^* \rightarrow -0$ решение для этой области должно срачиваться с решением для области B .

Выражения (1.12), (1.15) указывают, что при $x^* \rightarrow \infty$ в области IV, как и в III, происходит дальнейшее уменьшение продольной составляющей вектора скорости. Вместе с тем, поскольку, согласно (1.10), поперечный размер этой области $Y = O(\varepsilon^{2/3})$ и турбулентные напряжения $\tau = O(\varepsilon^{1/3})$, а в области B значения Y и τ — величины порядка единицы, при $x^* \rightarrow \infty$

должно происходить расширение этой области и нарастание турбулентных напряжений.

Таким образом, если увеличение градиента давления перед областью взаимодействия ($x \rightarrow -0$) приводит одновременно к уменьшению турбулентного трения и толщины турбулентного подслоя [1], то по мере стремления градиента давления к нулю вниз по потоку от области взаимодействия обе эти величины возрастают.



Фиг. 2

Действительно, производя сращивание решений в областях IV и B, находим, что при $x^* \rightarrow \infty$ или $p^* \rightarrow -0$

$$\begin{aligned} u^0 &= (-p^*)^{1/2} f_0(\zeta^*) + \dots, \quad \tau^0 = (-p^*)^{-1} [\ln(-p^*)^{-1}]^{-1/3} g_0(\zeta^*) + \dots \\ Y^0 &= (-p^*)^{-2} [\ln(-p^*)^{-1}]^{-2/3} h_0(\zeta^*) + \dots \\ \zeta^* &= (-p^*)^{1/2} [\ln(-p^*)^{-1}]^{1/3} \Psi^0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

и при $X \rightarrow -\infty$ или $P_0 \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} U_0 &= (-P_0)^{1/2} f_0(\zeta) + \dots, \quad T_0 = (-P_0)^{-1} g_0(\zeta) + \dots \\ Y_0 &= (-P_0)^{-2} h_0(\zeta) + \dots, \quad \zeta = (-P_0)^{1/2} \Psi_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Связь между входящими в эти представления функциями определяется в результате подстановки (2.9), (2.2) в (1.11) или (2.10), (2.6) в (2.8) и имеет вид

$$3\zeta^* f_0 f_0' + f_0^2 - 2 = -\frac{4}{3} \gamma_0^{2/3} f_0 g_0', \quad f_0 h_0' = 1$$

Из условия (1.12) на внешней границе области IV следует, что при $\zeta^* \rightarrow \infty$

$$f_0 = \sqrt{2} + O(\zeta^{*1/2}), \quad g_0 = c_0 \zeta^{*1/2} + \dots, \quad c_0 = \text{const.}$$

Таким образом, согласно (2.9), (1.15), по мере приближения к области B (т. е. к точке отрыва) действительно происходит интенсивное увеличение турбулентных напряжений. Вместе с тем при приближении к точке отрыва должно происходить уменьшение турбулентного трения на стенке (точнее, на внешней границе вязкого пристеночного подслоя), т. е. при $x^* \rightarrow \infty$

$$\tau^0(x^*, 0) = \tau_w^*(x^*) \rightarrow 0$$

Тогда из (2.9) следует:

$$g_0(0) = 0 \quad (2.11)$$

а из условия непротекания (1.13) находим, что

$$f_0(0) = f_w > 0, \quad h_0(0) = 0$$

Имеющиеся экспериментальные данные также указывают, что по мере приближения к точке отрыва внутри пограничного слоя происходит увеличение турбулентного трения. На фиг. 2 представлены соответствующие

результаты измерений из [5]. Продольная координата точки отрыва здесь $x_{ft}=25,7\pm 0,2$. Сечениям 1-4 соответствуют значения $x_{ft}=22, 23, 24, 25$. В качестве характерной скорости было взято среднее ее значение на внешней границе пограничного слоя при $x_{ft}=17,5$.

Условия на внешней границе области B при $\Psi_0 \rightarrow \infty$ находятся из срачивания с решением в области A (фиг. 1). Эта область является продолжением основной части пограничного слоя II и профиль скорости, а также турбулентные напряжения, согласно (1.3), здесь сохраняются вдоль линий тока. Поэтому в соответствии с (1.8) при $\Psi_0 \rightarrow \infty$

$$U_0 = a_0 \Psi_0 + \dots, \quad T_0 = b_0 + \dots \quad (2.12)$$

Получим выражение для поперечной координаты $Y_0(X, \Psi_0)$ при $\Psi_0 \rightarrow \infty$. Согласно (1.3), (1.4), (1.15), при $x^* \rightarrow \infty$ происходит уменьшение величины давления, сопровождаемое увеличением наклона линий тока в верхней части пограничного слоя. Поэтому вниз по потоку они будут различаться по порядку величины и, следовательно, в области A наклон линий тока полностью будет обусловлен течением в области взаимодействия и определяется выражениями (1.3), (1.4) при $x^* \rightarrow \infty$. Переписывая эти выражения вместе с (1.15) через переменную X из (2.7), получим, что в области A

$$Y = -\frac{1}{6a_0} \ln(\epsilon \sigma^3) + \frac{3}{4} \frac{\gamma_0^{3/2}}{a_0} X + \frac{1}{a_0} \ln\left(\frac{a_0 \gamma_0^{1/6}}{\sqrt{k_0}}\right) + y_0(\Psi) + o(1)$$

Тогда из срачивания этого разложения с решением в области B находим, что при $\Psi_0 \rightarrow \infty$

$$Y_0 = \frac{1}{a_0} \ln \Psi_0 + \frac{3}{4} \frac{\gamma_0^{3/2}}{a_0} X + \frac{1}{a_0} \ln\left(\frac{a_0 \gamma_0^{1/6}}{\sqrt{k_0}}\right) + o(1) \quad (2.13)$$

Решение в области B должно удовлетворять условиям непротекания. Поскольку, согласно (2.11), для начального профиля пограничного слоя при $X \rightarrow -\infty$ турбулентное трение при $\Psi_0 = 0$ обращается в нуль, то условия непротекания запишутся в виде

$$U_0(X, 0) = U_w(X), \quad T_0(X, 0) = Y_0(X, 0) = 0$$

Согласно исходным представлениям о течении в области B , аналогично тому, как это имеет место для ламинарного течения в пограничном слое на подвижной поверхности и в следе [12, 13], при некотором $X = X_S$ значение $U_w(X_S) = 0$ и за этой точкой начинается область возвратного течения. Поэтому в области B должны быть поставлены условия вниз по потоку, т. е. при $X \rightarrow \infty$.

В верхней части рассматриваемой области при $X \rightarrow \infty$ развивается подслой смешения, который отделяет основную часть оторвавшегося пограничного слоя от зоны возвратного течения. Соответствующие разложения строятся на основании тех же соображений, что и для ламинарных отрывных течений. Так, исходя из баланса всех членов в (2.8) и учитывая условия (2.12), представим решение в подслое при $X \rightarrow \infty$ в виде

$$U_0 = X^{1/2} \varphi_0(\eta) + \dots, \quad T_0 = \pi_0(\eta) + \dots \quad (2.14)$$

$$Y_0 = s_0(X) + \chi_0(\eta) + \dots, \quad \eta = \Psi_0 / X^{1/2}$$

Подставив это разложение в (2.8), находим, что

$$\varphi_0 - \eta \varphi_0' = 2\pi_0', \quad \varphi_0 \chi_0' = 1 \quad (2.15)$$

Величина градиента давления, как будет видно далее, при $X \rightarrow \infty$ стремится к нулю и поэтому соответствующий член не входит в (2.15).

Из выражений (2.12), (2.13), обеспечивающих срачивание с решением в области A , получим

$$\varphi_0'(\infty) = a_0, \quad \pi_0(\infty) = b_0 \quad (2.16)$$

$$s_0(X) = \frac{3}{4} \frac{\gamma_0^{3/2}}{a_0} X + \frac{1}{2a_0} \ln X + O(1) \quad \text{при} \quad X \rightarrow \infty$$

Из обычного условия на внутренней границе слоя смешения следует, что

$$\varphi_0(d_0) = \pi_0(d_0) = 0, \quad d_0 = \text{const} < 0 \quad (2.17)$$

Течение в слое смешения своим эжектирующим действием вызывает движение в области возвратного течения, которая, согласно (2.13), при $X \rightarrow \infty$ расширяется по линейному закону. Решение в этой части области B может быть представлено в виде

$$U_0 = q_0 X^{-1/2} + \dots, \quad Y_0 = q_0^{-1} X^{1/2} \Psi_0 + \dots$$

$$P_0 = -\frac{q_0^2}{2} X^{-1} + \dots \quad (X \rightarrow \infty); \quad q_0 = \frac{4a_0 d_0}{3\gamma_0^{3/2}} \quad (2.18)$$

Причем в соответствии с (2.17) здесь $T_0(X, \Psi_0) \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \infty$, т. е. в главных членах разложений турбулентное трение в области возвратных течений отсутствует. Решение (2.18) удовлетворяет условиям непротекания и срачивания с решением (2.14) — (2.17) для подслоя смешения.

Итак, получена система соотношений, которая служит для описания течения в области B , где происходит отрыв турбулентного пограничного слоя. Эта система соотношений не замкнута. Если пытаться строить гипотезу замыкания, связывающую функции $U_0(X, \Psi_0)$ и $T_0(X, \Psi_0)$, то следует ожидать, что она будет достаточно сложной, так как должна учитывать всю совокупность краевых условий, обеспечивающих срачивание с решениями в соседних областях.

Распределение давления $P_0(X)$ в области B заранее неизвестно, но, как и для ламинарных течений [12, 13], оно должно находиться в процессе решения при заданной толщине вытеснения $\vartheta(X)$ на внешней границе области B . Согласно (2.13)

$$\vartheta = \lim_{\Psi_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial Y_0}{\partial X} \right) = \frac{3}{4} \frac{\gamma_0^{3/2}}{a_0}$$

Таким образом, проведенный анализ показывает, что отрыв турбулентного пограничного слоя в отличие от ламинарного отрыва от неподвижной поверхности [3] не локализован в области взаимодействия и представляет собой довольно сложный процесс постепенного перехода, который близок к ламинарному отрыву на подвижной поверхности. На такой характер течения в турбулентном пограничном слое указывают имеющиеся экспериментальные данные (см. обзор [14]).

В заключение заметим, что вниз по потоку от области B оторвавшийся пограничный слой состоит из основной части и подслоя смешения (обл. A' и B' , фиг. 1), которые суть продолжения области A и верхней части области B . Минуса промежуточную область, в которой $x = O(\Delta_0)$, эта оторвавшаяся часть пограничного слоя переходит в слой смешения, имеющий в масштабах тела толщину исходного пограничного слоя, т. е. $O(\epsilon)$. Кривизна линии тока, вдоль которой он развивается, определяется при $x \rightarrow +0$ выражением (1.1).

В области возвратных токов движение вызывается эжектирующим действием слоя смешения, поэтому здесь при $x = O(1)$, $y = O(1)$ переменная часть давления $p - p_{00} = \epsilon^2 p_1(x, y) + \dots$ и $\tau = o(\epsilon)$ и

$$p_1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{3U_{00}^2 d_0}{4k_0} \right]^2 x^{-2} + \dots$$

при $x \rightarrow +0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В., Сычев Вик. В. О турбулентном отрыве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 6. С. 1500—1512.
2. Imai I. Discontinuous potential flow as the limiting form of the viscous flow for vanishing viscosity // J. Phys. Soc. Japan. 1953. V. 8. № 3. P. 399—402.
3. Сычев В. В. О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. МЖТ. 1972. № 3. С. 47—59.
4. Tsahalis D. Th., Telionis D. P. On the behavior of turbulent boundary layers near separation // AIAA Journal. 1975. V. 13. № 10. P. 1261—1262.
5. Schubauer G. B., Klebanoff P. S. Investigation of separation of the turbulent boundary layers. // NACA Rep. 1951. № 1030. 20 p.

6. *Yajnik K. S.* Asymptotic theory of turbulent shear flows // *J. Fluid Mech.*, 1970. V. 42. Pt 2. P. 411–427.
7. *Mellor K. S.* The large Reynolds number, asymptotic theory of turbulent boundary layers // *Int. J. Engng. Sci.* 1972. V. 10. № 10. P. 851–873.
8. *Сычев Вук. В.* О разрушении плоского ламинарного следа // Уч. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 9. № 6. С. 9–16.
9. *Coles D.* The law of the wake in the turbulent boundary layer // *J. Fluid Mech.*, 1956. V. 1. Pt 2. P. 191–226.
10. *Сычев Вук. В.* Асимптотическая теория нестационарного отрыва // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 6. С. 21–32.
11. *Dommelen L. L., van, Shen S. F.* An unsteady interactive separation process // *AIAA Journal*. 1983. V. 21. № 3. P. 358–362.
12. *Сычев Вук. В.* К асимптотической теории ламинарного отрыва на подвижной поверхности // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 247–253.
13. *Сычев Вук. В.* Аналитическое решение задачи о течении в окрестности точки отрыва пограничного слоя на подвижной поверхности // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3.
14. *Simpson R. L.* A review of some phenomena in turbulent flow separation // *Turbul. Boundary Layers*. New York: ASME, 1979. P. 1–14.

Москва

Поступила в редакцию
29.V.1986.