

**МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА  
№ 3 · 1987**

УДК 532.526

**ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
В ТРЕХМЕРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ**

**РОЖКО С. Б., РУБАН А. И.**

Рассматривается пространственное течение несжимаемой жидкости в пограничном слое, развивающемся вдоль искривленной твердой поверхности, при его взаимодействии с малой неровностью (выступом или впадиной) на этой поверхности. Показано, что существенную роль в формировании потока около неровности может играть перепад давления поперек пограничного слоя. Сформулированы условия, при которых реализуется этот эффект, связанный с действием центробежных сил. В предположении, что продольный размер неровности является величиной порядка  $Re^{-3/4}$ , ее ширина оценивается как  $O(Re^{-3/7})$ , а высота —  $O(Re^{-4/7})$ , где  $Re$  — число Рейнольдса, выведены асимптотические уравнения, описывающие движение жидкости в окрестности неровности.

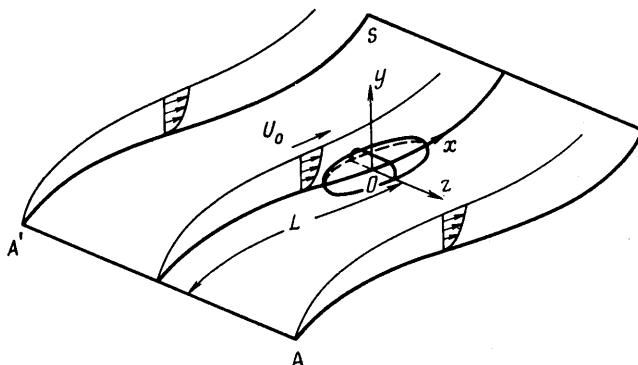
До сих пор при исследовании явления взаимодействия основное внимание уделялось двумерным задачам. Значительно менее изучены трехмерные течения. Если оставить в стороне квазидвумерную теорию (см., например, [1–3]), то среди работ этого направления следует отметить работу [4], которая посвящена анализу пространственных возмущений, вносимых в двумерный пограничный слой на поверхности плоской пластины при обтекании выступа или впадины. Полагая, что ширина неровности соизмерима с ее продольным размером и является величиной того же порядка, что и протяженность области взаимодействия в двумерном потоке  $O(Re^{-3/8})$ , в [4] обоснована применимость к данному течению трехмерных уравнений пограничного слоя. Градиент давления в этих уравнениях заранее не задан и должен определяться через толщину вытеснения пограничного слоя.

Несколько позднее предложенная в [4] теория была применена к анализу приземного пограничного слоя, набегающего на пологий холм [5]. При этом учитывалась стратификация атмосферы — изменение температуры воздуха с высотой. В результате решения линейной задачи о взаимодействии показано, что вносимые в пограничный слой возмущения носят колебательный характер и чрезвычайно медленно затухают в следе за холмом.

Если увеличивать стратификацию потока или уменьшать размеры неровности, то реализуется так называемый компенсационный режим течения [6–8]. В этом случае вязкий поток вблизи поверхности неровности по-прежнему описывается уравнениями трехмерного пограничного слоя, однако градиент давления должен определяться из условия отсутствия возмущений внешней границы пограничного слоя. Ранее эта же система уравнений была получена при исследовании пространственных возмущений, появляющихся в течении Пуазейля для круглой трубы при несимметричной деформации ее стенок [9]. Проведенный в [9] анализ позволил установить существенное различие в свойствах двумерных и трехмерных течений с компенсацией. Если в двумерном течении возмущения, вносимые в пограничный слой неровностью, вверх по потоку от нее полностью отсутствуют, то в трехмерном случае возмущенным оказывается и набегающий на неровность пограничный слой. Позднее это обстоятельство было также отмечено в [10].

В [6, 7] представлены результаты численного решения нелинейных уравнений пограничного слоя с условием компенсации, причем первая посвящена анализу течения около периодической в попереходном направлении неровности, а вторая — свободно развивающимся возмущениям в пограничном слое на поверхности плоской пластины. В [8] рассмотрено обтекание малой неровности при гиперзвуковой скорости набегающего потока. Наряду с компенсационным режимом течения выделен также режим взаимодействия вязкого пристеночного слоя с внешним гиперзвуковым потоком. Более подробный анализ течений этого класса содержится в [11].

Как следует из [12], взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком должно приниматься во внимание и при анализе течения вблизи линии пересечения плоской пластины с установленным перпендикулярно ее поверхности крылом. Если хорда крыла достаточно мала, то образуется одна область взаимодействия,



Фиг. 1

управляющая движением жидкости в пограничном слое на поверхности пластины вокруг всего крыла в целом. Если же хорда крыла велика, то отдельно должны быть рассмотрены окрестности передней и задней кромок крыла. Для тонкого крыла в [12] построено решение линеаризованной задачи о взаимодействии и установлено, что вниз по течению от задней кромки образуется пара симметричных вихрей, лежащих внутри пограничного слоя на поверхности пластины.

Для решения нелинейных задач рассматриваемого класса в [13] был предложен оригинальный численный метод, в котором наряду с итерациями по всему полу течения используется двойное преобразование Фурье, позволяющее эффективно учитывать взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком.

Классификация возможных режимов течения в зависимости от характерных размеров неровности приведена в [14]. Здесь наряду с упомянутыми выше выделен еще один класс течений, который реализуется тогда, когда длина, ширина и высота неровности совпадают по порядку величины с вязкой длиной потока на дне пограничного слоя  $O(Re^{-3/4})$ . В этом случае движение жидкости вблизи неровности описывается полными уравнениями Навье – Стокса с локальным числом Рейнольдса, равным единице.

Теория взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком использовалась также для анализа нестационарных течений жидкости [15–18]. В частности, исследовалась устойчивость двумерного пограничного слоя по отношению к пространственным возмущениям. В результате было показано [16], что теория взаимодействия описывает нейтральные колебания (в форме наклонных волн Толлмина – Шлихтинга) на нижней ветви кривой устойчивости пограничного слоя.

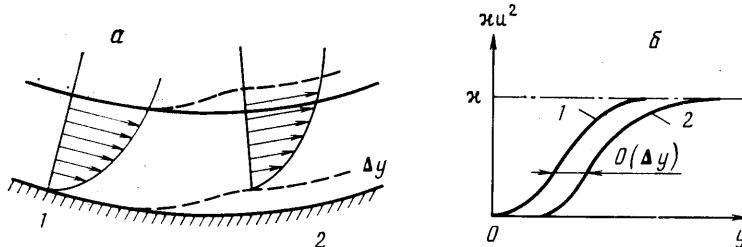
Несмотря на разнообразие ситуаций, рассмотренных при анализе пространственных течений жидкости в пограничном слое, все перечисленные выше работы объединяет то, что они посвящены исследованию уже известных из двумерной теории режимов течения. Здесь будет рассмотрен специальный тип взаимодействия, присущий только трехмерному потоку, — продольно-поперечное взаимодействие.

**1. Постановка задачи и исходные оценки.** Пусть двумерный пограничный слой развивается вдоль цилиндрической поверхности  $S$  так, что движение жидкости происходит в плоскостях, перпендикулярных ее образующей  $AA'$  (фиг. 1). Предположим, что на этой поверхности имеется неровность (выступ или впадина), размеры которой малы по сравнению с характерными размерами поверхности  $S$ . Обозначим расстояние от линии  $AA'$ , на которой происходит зарождение пограничного слоя, до «центра» неровности  $O$  через  $L$ , скорость на внешней границе пограничного слоя в точке  $O$  в случае невязкого течения около поверхности  $S$  без неровности — через  $U^0$ , а соответствующее значение давления — через  $P^0$ . Определим число Рейнольдса как  $Re = LU^0/v$ , где  $v$  — кинематический коэффициент вязкости и, считая его достаточно большим, рассмотрим поток вблизи неровности.

Выбрав  $L$  за единицу измерения длины, введем ортогональную криволинейную систему координат  $xyz$  с началом в центре неровности  $O$ ; ось  $y$  направим по нормали к поверхности  $S$ , а ось  $x$  — вдоль этой поверхности в направлении невозмущенного потока перед неровностью. Составляющие вектора скорости в этой системе координат, отнесенные к  $U^0$ , будем обозначать соответственно через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Приращение давления по срав-

нению с  $P^o$  отнесем к удвоенному скоростному напору  $\rho U^2$  и обозначим через  $\rho$ . Плотность жидкости  $\rho$  и кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  в дальнейшем считаются постоянными по всему полю течения. В качестве исходных уравнений движения жидкости примем уравнения Навье – Стокса и будем искать их асимптотическое решение, полагая число Рейнольдса стремящимся к бесконечности.

Хорошо известно, что локальные возмущения, вносимые в пограничный слой, приводят к его расщеплению на две характерные области: вязкий пристеночный слой – область I и основную невязкую часть пограничного слоя – область II. При достаточном уровне возмущений движение жидкости в области I становится нелинейным – скорость жидких частиц, а следовательно, и толщина струек тока в этой области меняются на величину своего порядка. Что касается области II, то здесь течение всегда



Фиг. 2

слабо возмущено. В главном приближении профиль скорости остается неизменным, наблюдается лишь оттеснение струек тока от обтекаемой поверхности за счет торможения жидкости в области I (фиг. 2, a). Этот процесс неизбежно приводит к перераспределению давления во внешнем потенциальном потоке – области III, лежащей над пограничным слоем. Обозначим через  $\Delta y$  характерную толщину вязкого пристеночного слоя, через  $\Delta x$  – протяженность возмущенной области течения, а через  $\Delta z$  – ее поперечный размер. Тогда в соответствии с теорией потенциальных течений жидкости около тонких тел для возмущения давления на внешней границе пограничного слоя будем иметь следующую оценку:  $\Delta p = O(\tau \lambda)$ . Здесь  $\tau = O(\Delta y / \Delta x)$  – угол наклона линий тока на внешней границе пограничного слоя по отношению к поверхности  $S$ , а  $\lambda = O(\Delta z / \Delta x)$  – относительная ширина возмущенной области. В дальнейшем будут рассмотрены такие режимы течения, для которых  $\tau \ll \lambda$  и  $\lambda \ll 1$ .

Если кривизна  $\chi$  поверхности  $S$  отлична от пуля, то существенным может оказаться изменение давления поперек пограничного слоя. Это изменение, обусловленное действием центробежных сил  $\partial p / \partial y = -\chi u^2$ , особенно заметно в основной части пограничного слоя, где  $u = O(1)$ . Здесь и в дальнейшем кривизна  $\chi$  считается положительной для вогнутой поверхности и отрицательной для выпуклой. Рассмотрим в пограничном слое два сечения: 1) в котором возмущения отсутствуют и 2) где возмущения достигают своего максимального уровня (фиг. 2, a). Как уже отмечалось, профиль скорости в сечении 2 можно получить из профиля скорости в сечении 1 простым сдвигом вдоль оси  $Oy$  на толщину вытеснения вязкого пристеночного слоя  $O(\Delta y)$ . Этим же свойством обладает и функция  $\chi u^2$ . Поэтому, построив график зависимости  $\chi u^2$  от  $y$  в сечении 1 и такой же график в сечении 2 (фиг. 2, б), легко понять, что площадь, заключенная между кривыми 1 и 2, совпадает по порядку величины с вкладом центробежных сил в изменение давления внутри вязкой пристеночной области I:  $\Delta p = O(\chi \Delta y)$ .

Перейдем теперь к обычным рассуждениям о соотношении между порядками величин в уравнениях Навье – Стокса, которые позволяют на физическом уровне строгости проследить за происходящими в области взаим-

модействия процессами и одновременно получить оценки для искомых функций течения. Рассмотрим пристеночную область I. Течение жидкости в этой области вязкое

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \propto \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

Поскольку речь идет о нелинейных возмущениях, изменение продольной составляющей вектора скорости  $\Delta u$  совпадает по порядку величины со скоростью  $u$  в невозмущенном пограничном слое перед областью взаимодействия

$$\Delta u \propto u \propto Re^{-1/2} y \quad (1.2)$$

Растекание жидкости в поперечном к набегающему потоку направлении происходит под действием соответствующей составляющей градиента давления

$$u \frac{\partial w}{\partial x} \propto \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.3)$$

Если  $\partial p / \partial z$  достигает определенной величины, то течение в области I становится существенно трехмерным, т. е.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \propto w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.4)$$

Для замыкания системы соотношений (1.1)–(1.4) существует две возможности. Предположим сначала, что возмущение давления в области I определяется в основном приближении центробежным эффектом. Тогда, полагая  $\Delta p \propto \Delta u$  и заменяя производные в (1.1)–(1.4) конечными разностями, приходим к следующей системе оценок для гидродинамических функций и независимых переменных в области I:

$$\begin{aligned} u &\propto (\Delta x)^{1/2}, \quad w \propto Re^{-1/2} |\kappa|^{1/2} (\Delta x)^{1/6} \\ \Delta p &\propto Re^{-1/2} |\kappa|^{1/2} (\Delta x)^{1/2} \\ \Delta y &\propto Re^{-1/2} (\Delta x)^{1/2}, \quad \Delta z \propto Re^{-1/2} |\kappa|^{1/2} (\Delta x)^{5/6} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если же возмущение давления определяется вытесняющим действием пограничного слоя на внешний потенциальный поток, то  $\Delta p \propto \tau \lambda \Delta y \Delta z / (\Delta x)^2$  и оценки (1.5) должны быть заменены на

$$\begin{aligned} u &\propto (\Delta x)^{1/2}, \quad w \propto Re^{-1/2} (\Delta x)^{-1}, \quad \Delta p \propto Re^{-1} (\Delta x)^{-2} \\ \Delta y &\propto Re^{-1/2} (\Delta x)^{1/2}, \quad \Delta z \propto Re^{-1/2} (\Delta x)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Сравнивая (1.5) с (1.6), приходим к выводу, что режим течения в области взаимодействия зависит от ее продольного размера  $\Delta x$ . Когда  $\Delta x$  превосходит по порядку величины  $\epsilon = Re^{-3/14} |\kappa|^{-3/7}$ , основную роль в формировании давления играют центробежные силы и справедливыми оказываются оценки (1.5). Когда же, наоборот,  $\Delta x \ll \epsilon$ , преобладает вытесняющее действие пограничного слоя и в силу вступают оценки (1.6). Наиболее общий режим течения реализуется при  $\Delta x = \epsilon$ . В этом случае оценки (1.5) и (1.6) совпадают друг с другом и могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} u &\propto Re^{-1/14} |\kappa|^{-1/7}, \quad w \propto Re^{-2/7} |\kappa|^{3/7}, \quad \Delta p \propto Re^{-1/7} |\kappa|^{6/7} \\ \Delta y &\propto Re^{-1/7} |\kappa|^{-1/7}, \quad \Delta z \propto Re^{-3/7} |\kappa|^{1/7} \end{aligned} \quad (1.7)$$

**2. Невозмущенное течение.** Рассмотрим сначала невозмущенное течение жидкости, которое реализовалось бы вблизи поверхности  $S$  при отсутствии неровности. Кривизну этой поверхности  $\kappa(x)$  положим для определенности величиной порядка единицы и в соответствии с классической теорией Прандтля разобъем все поле течения на две характерные

области — внешний потенциальный поток и пристеночный пограничный слой. Во внешнем потоке решение уравнений Навье — Стокса представим в форме асимптотических разложений

$$u=u_0(x, y)+\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} u_1(x, y)+\dots, \quad v=v_0(x, y)+\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} v_1(x, y)+\dots \quad (2.1)$$

$$p=p_0(x, y)+\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} p_1(x, y)+\dots$$

справедливых при  $\mathrm{Re} \rightarrow \infty$ . Главные их члены  $u_0, v_0, p_0$  удовлетворяют уравнениям Эйлера и, как следует из анализа этих уравнений, могут быть записаны при  $y \rightarrow 0$  в виде

$$u_0=U_e(x)+\kappa U_e(x)y+O(y^2), \quad v_0=-U'_e(x)y+O(y^2) \quad (2.2)$$

$$p_0=P_e(x)-\kappa U_e^2 y+O(y^2)$$

В свою очередь функция  $U_e(x)$ , выражающая распределение скорости на внешней границе пограничного слоя, и функция  $P_e(x)$  — давления внутри пограничного слоя, могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности точки  $x=0$

$$U_e=1+U'_e(0)x+\frac{1}{2}U''_e(0)x^2+O(x^3), \quad P_e=P'_e(0)x+\frac{1}{2}P''_e(0)x^2+O(x^3) \quad (2.3)$$

Рассматривая пограничный слой, введем функцию тока невозмущенного течения  $\psi(x, y)$  такую, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}=-(1-\kappa y)v$$

Если  $\mathrm{Re} \rightarrow \infty$ , то

$$\psi=\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} \Psi_0(x, Y)+O(\mathrm{Re}^{-1}), \quad Y=\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}} y \quad (2.4)$$

Коэффициент  $\Psi_0(x, Y)$  в главном члене разложения функции тока (2.4) удовлетворяет уравнению Прандтля и может быть разложен в ряд Тейлора в окрестности точки  $x=0$

$$\Psi_0=\Psi_{00}(Y)+x\Psi_{01}(Y)+\dots \quad (2.5)$$

Относительно функции  $\Psi_{00}(Y)$  известно, что

$$\Psi_{00}(Y)=\frac{1}{2}a_0 Y^2+O(Y^3), \quad Y \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Здесь  $a_0$  — безразмерное трение, создаваемое пограничным слоем на поверхности  $S$  непосредственно перед неровностью.

Для давления в пограничном слое имеет место следующее разложение:

$$p=P_e(x)+\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} P_1(x, Y)+O(\mathrm{Re}^{-1}) \quad (2.7)$$

Подставляя (2.4) вместе с (2.7) в уравнения Навье — Стокса, получим

$$\frac{\partial P_1}{\partial Y}=-\kappa\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial Y}\right)^2$$

При интегрировании этой формулы необходимо воспользоваться условием сращивания разложений (2.4), (2.7) с решением (2.1), (2.2) во внешнем потенциальном потоке. В результате будем иметь

$$P_1=g(x)-\kappa \int_0^Y\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial Y}\right)^2 dY, \quad g(x)=p_1(x, 0)-\kappa \int_0^\infty\left[U_e^2-\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial Y}\right)^2\right] dY$$

**3. Область взаимодействия.** В соответствии с оценками (1.7) будем

считать, что поверхность неровности определяется уравнением

$$y = \text{Re}^{-4/7} F(X_*, Z_*)$$

Здесь  $F(X_*, Z_*)$  — функция, принимающая конечные значения при условии, что ее аргументы

$$X_* = \text{Re}^{3/14} x, \quad Z_* = \text{Re}^{3/7} z$$

одновременно являются величинами порядка единицы.

Исследование потока жидкости в области взаимодействия начнем с вязкого пристеночного слоя — области I, где асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса основан на предельном переходе

$$X_* = O(1), \quad Y_* = \text{Re}^{4/7} y = O(1), \quad Z_* = O(1), \quad \text{Re} \rightarrow \infty$$

Составляющие вектора скорости и давление в области I будем искать в форме асимптотических разложений

$$\begin{aligned} u &= \text{Re}^{-1/14} U_*(X_*, Y_*, Z_*) + \dots, \quad v = \text{Re}^{-3/7} V_*(X_*, Y_*, Z_*) + \dots \\ w &= \text{Re}^{-2/7} W_*(X_*, Y_*, Z_*) + \dots \\ p &= \text{Re}^{-3/14} P_e'(0) X_* + \text{Re}^{-3/7} \frac{1}{2} P_e''(0) X_*^2 + \text{Re}^{-1/2} g(0) + \\ &\quad + \text{Re}^{-4/7} P_*(X_*, Y_*, Z_*) + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в уравнения Навье — Стокса, получим, что  $P_*$  не зависит от  $Y_*$  и

$$\begin{aligned} U_* \frac{\partial U_*}{\partial X_*} + V_* \frac{\partial U_*}{\partial Y_*} + W_* \frac{\partial U_*}{\partial Z_*} &= \frac{\partial^2 U_*}{\partial Y_*^2} \\ U_* \frac{\partial W_*}{\partial X_*} + V_* \frac{\partial W_*}{\partial Y_*} + W_* \frac{\partial W_*}{\partial Z_*} &= - \frac{\partial P_*}{\partial Z_*} + \frac{\partial^2 W_*}{\partial Y_*^2} \\ \frac{\partial U_*}{\partial X_*} + \frac{\partial V_*}{\partial Y_*} + \frac{\partial W_*}{\partial Z_*} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Краевыми условиями для (3.2) являются условия прилипания жидкости на твердой поверхности

$$Y_* = F(X_*, Z_*): U_* = V_* = W_* = 0 \quad (3.3)$$

и условия сращивания с невозмущенным решением (2.4) — (2.6) перед неровностью

$$X_* \rightarrow -\infty: \quad U_* \rightarrow a_0 Y_*, \quad W_* \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

Решение системы уравнений (3.2), удовлетворяющее краевым условиям (3.3), (3.4) обладает следующим асимптотическим представлением при  $Y_* \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} U_* &= a_0 Y_* + A_*(X_*, Z_*) + \dots, \quad V_* = - \frac{\partial A_*}{\partial X_*} Y_* + \dots, \\ W_* &= D_*(X_*, Z_*) Y_*^{-1} + \dots \\ D_*(X_*, Z_*) &= - \frac{1}{a_0} \int_{-\infty}^{x_*} \frac{\partial P_*}{\partial Z_*} dX_* \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $A_*(X_*, Z_*)$  — функция, характеризующая изменение толщины вытеснения вязкого пристеночного слоя.

Произведем в (3.1), (3.5) замену переменной  $Y_* = \text{Re}^{4/7} Y$  и, считая  $Y$  величиной порядка единицы, соберем все члены одинакового порядка ма-

лости при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . В результате получим выражения

$$u = a_0 Y + \text{Re}^{-1/\alpha} A_*(X_*, Z_*) + \dots, \quad v = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} \left( -\frac{\partial A_*}{\partial X_*} Y \right) + \dots, \\ w = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} D_*(X_*, Z_*) Y_*^{-1} + \dots$$

из которых следует, что в основной части пограничного слоя — области II, где  $Y = O(1)$ , искомые функции течения должны быть представлены в виде

$$u = \Psi_{00}'(Y) + \text{Re}^{-1/\alpha} U^*(X_*, Y, Z_*) + \dots \\ v = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} V^*(X_*, Y, Z_*) + \dots, \quad w = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} W^*(X_*, Y, Z_*) + \dots \quad (3.6) \\ p = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} P_e'(0) X_* + \text{Re}^{-\alpha/\alpha} \frac{1}{2} P_e''(0) X_*^2 + \text{Re}^{-1/2} P_1(0, Y) + \\ + \text{Re}^{-1/2} P^*(X_*, Y, Z_*) + \dots$$

Система уравнений для коэффициентов  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$  и  $P^*$  выписанных разложений может быть, как обычно, получена в результате подстановки (3.6) в уравнения Навье — Стокса. Решение этой системы уравнений, удовлетворяющее условиям сращивания с решением (3.1), (3.5) в области I, имеет вид

$$U_* = \frac{1}{a_0} A_*(X_*, Z_*) \Psi_{00}''(Y), \quad V^* = -\frac{1}{a_0} \frac{\partial A_*}{\partial X_*} \Psi_{00}'(Y) \\ W^* = \frac{a_0}{\Psi_{00}'(Y)} D_*(X_*, Z_*) + \frac{\kappa_0}{a_0} \Psi_{00}'(Y) \int_{-\infty}^{X_*} \frac{\partial A_*}{\partial Z_*} dX_* \quad (3.7) \\ P^* = P_*(X_*, Z_*) - \frac{\kappa_0}{a_0} A_*(X_*, Z_*) [\Psi_{00}'(Y)]^2$$

Здесь  $\kappa_0 = \kappa(0)$  — значение кривизны поверхности  $S$  в точке расположения неровности.

Из (3.6), (3.7) следует, что угол наклона линий тока на внешней границе пограничного слоя определяется как

$$\theta = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} \left( -\frac{1}{a_0} \frac{\partial A_*}{\partial X_*} \right) + \dots \quad (3.8)$$

Выражение (3.8), а также форма невозмущенного решения (2.1) — (2.3) во внешнем потенциальном потоке свидетельствуют о том, что в области III

$$u = 1 + \text{Re}^{-\alpha/\alpha} U_e'(0) X_* + \text{Re}^{-\alpha/\alpha} \left[ \kappa_0 y_* + \frac{1}{2} U_e''(0) X_*^2 \right] + \\ + \text{Re}^{-1/2} u_1(0, 0) + \text{Re}^{-1/2} u_*(X_*, y_*, Z_*) + \dots \quad (3.9) \\ v = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} v_*(X_*, y_*, Z_*) + \dots, \quad w = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} w_*(X_*, y_*, Z_*) + \dots \\ p = \text{Re}^{-\alpha/\alpha} P_e'(0) X_* + \text{Re}^{-\alpha/\alpha} \left[ \frac{1}{2} P_e''(0) X_*^2 - \kappa_0 y_* \right] + \\ + \text{Re}^{-1/2} p_1(0, 0) + \text{Re}^{-1/2} p_*(X_*, y_*, Z_*) + \dots$$

Размеры этой области таковы, что здесь одновременно с  $X_*$  и  $Z_*$  величиной порядка единицы является переменная  $y_* = \text{Re}^{\alpha/\alpha} y$ .

Подставляя (3.9) в уравнения Навье — Стокса, приходим к заключе-

нию, что функция

$$\Phi(\zeta) = \frac{\partial p_*}{\partial Z_*} + i \frac{\partial v_*}{\partial X_*}$$

является аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\zeta = Z_* + iy_*$ . На действительной оси задана ее мнимая часть, которая, как следует из (3.8), равна

$$\operatorname{Im} \Phi|_{y_*=0} = -\frac{1}{a_0} \frac{\partial^2 A_*}{\partial X_*^2}$$

поэтому

$$\frac{\partial p_*}{\partial Z_*} \Big|_{y_*=0} = -\frac{1}{a_0 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A_*(X_*, \xi)}{\partial X_*^2} \frac{d\xi}{\xi - Z_*} \quad (3.10)$$

Осталось учесть изменение давления поперек области II. Для этого обратимся к последней из формул (3.7). Полагая в ней  $Y=\infty$  и учитывая, что на внешней границе пограничного слоя  $\Psi_{00}'(\infty)=1$ , будем иметь

$$P^*|_{Y=\infty} = p_*|_{y_*=0} = P_*(X_*, Z_*) - \frac{\kappa_0}{a_0} A_*(X_*, Z_*) \quad (3.11)$$

Комбинируя (3.11) с (3.10), получим соотношение

$$\frac{\partial P_*}{\partial Z_*} = \frac{\kappa_0}{a_0} \frac{\partial A_*}{\partial Z_*} - \frac{1}{a_0 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A_*(X_*, \xi)}{\partial X_*^2} \frac{d\xi}{\xi - Z_*} \quad (3.12)$$

которое замыкает задачу (3.1) – (3.5) о взаимодействии.

Легко убедиться, что замена переменных

$$\begin{aligned} X_* &= a_0^{-5/4} |\kappa_0|^{-3/4} X, & Y_* &= a_0^{-4/4} |\kappa_0|^{-1/4} Y, & Z_* &= a_0^{-10/4} |\kappa_0|^{1/4} Z \\ U_* &= a_0^{3/4} |\kappa_0|^{-1/4} U, & V_* &= a_0^{4/4} |\kappa_0|^{1/4} V, & W_* &= a_0^{-2/4} |\kappa_0|^{1/4} W \\ A_* &= a_0^{3/4} |\kappa_0|^{-1/4} A, & P_* &= a_0^{-4/4} |\kappa_0|^{1/4} P, & F_* &= a_0^{-4/4} |\kappa_0|^{-1/4} F \end{aligned}$$

позволяет исключить постоянные  $a_0$ ,  $\kappa_0$  из соотношений (3.1) – (3.5), (3.12) и представить задачу о взаимодействии в следующей форме:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, & U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= \\ &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}, & \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \operatorname{sign}(\kappa_0) \frac{\partial A}{\partial Z} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(X, \xi)}{\partial X^2} \frac{d\xi}{\xi - Z} \quad (3.13)$$

$$Y=F(X, Z); \quad U=V=W=0$$

$$Y \rightarrow \infty: \quad U=Y+A(X, Z)+\dots, \quad W=O(Y^{-1})$$

$$X \rightarrow -\infty: \quad U \rightarrow Y, \quad W \rightarrow 0$$

Одним из основных понятий теории срашиваемых асимптотических разложений является понятие характерного предельного перехода [19]. Осуществляя его, необходимо специальным образом выбирать размеры исследуемой области пространства или, что то же самое, произвести такую деформацию независимых переменных, при которой достигается наименьшее вырождение решаемой краевой задачи. Это требование, известное под названием принципа наименьшего вырождения [20], позволяет

минимизировать число областей пространства, рассматриваемых в рамках метода сращиваемых асимптотических разложений. При этом каждую область, в которой выполняется характерный предельный переход, называют характерной областью пространства. Нехарактерный предельный переход отличается от характерного тем, что результат его применения к исходной краевой задаче может быть получен и другим, более простым способом – переразложением решения в одной из характерных областей с использованием соответствующей деформации независимых переменных.

Аналогичным образом имеет смысл классифицировать и режимы течения в пограничном слое. Так, если речь идет о двумерных течениях, то здесь следует выделить два характерных режима – режим взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком, который реализуется при обтекании неровности с продольным размером  $\Delta x$  порядка  $Re^{-3/8}$ , а также режим полных уравнений Навье – Стокса, для которого  $\Delta x = O(Re^{-3/4})$ . Что же касается упоминавшегося в начале статьи компенсационного режима течения, то его следует называть нехарактерным, поскольку формулировка краевой задачи, описывающей этот режим течения, может быть получена не только из уравнений Навье – Стокса, но и в результате асимптотического анализа краевой задачи для режима взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком.

Переход к пространственному пограничному слою на искривленной поверхности приводит к появлению третьего характерного режима течения – режима продольно-поперечного взаимодействия, который реализуется, как было показано выше, при обтекании неровности с продольным размером порядка  $Re^{-3/4}$ . Если неровность более длинная, то для анализа течения около нее не обязательно обращаться к уравнениям Навье – Стокса. Достаточно в краевой задаче (3.13) совершить предельный переход, в котором  $b = \Delta x Re^{3/4}$  – характерная длина неровности, отнесенная к  $Re^{-3/4}$ , стремится к бесконечности, а деформация искомых функций течения и независимых переменных осуществляется в соответствии с (1.5). Если же речь идет о неровности, длина которой мала по сравнению с  $Re^{-3/4}$ , то  $b$  необходимо устремить к нулю, используя при этом соотношения (1.6).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Guiraud J. P. Écoulement décollé au voisinage du bord de fuite d'une aile mince tridimensionnelle // J. Mec., 1974. V. 13. № 3. P. 409–432.
2. Riley N. Separation from a smooth surface in a slender conical flow // J. Eng. Math. 1979. V. 13. № 1. P. 75–91.
3. Gittler Ph. Laminare wechselwirkungsvorgänge am schiebenden flügel bei Überschallströmung // ZAMM. 1984. B. 64. H. 4. S. 198–200.
4. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt 1. P. 163.
5. Sykes R. I. Stratification effects in boundary layer flow over hills // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1978. V. 361. № 1705. P. 225–243.
6. Sykes R. I. On three-dimensional boundary layer flow over surface irregularities // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1980. V. 373. № 1754. P. 311–329.
7. Smith F. T. A three-dimensional boundary-layer separation // J. Fluid Mech. 1980. V. 99. Pt 1. P. 185–224.
8. Липатов И. И. Обтекание локальных пространственных неровностей на дне ламинарного пограничного слоя в режиме слабого гиперзвукового взаимодействия // Тр. ЦАГИ. 1980. Вып. 2079. С. 3–19.
9. Smith F. T. Pipeflows distorted by non-symmetric indentation or branching // Mathematika. Ser. 1. 1976. V. 23. № 45. P. 62–83.
10. Боголевов В. В., Липатов И. И. Исследование пространственных локальных ламинарных течений // ПМТФ. 1985. № 1. С. 28–36.
11. Липатов И. И. Пространственное обтекание малой неровности ламинарным пограничным слоем // Уч. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 2. С. 122–127.
12. Smith F. T., Gajjar J. Flow past wing-body junctions // J. Fluid Mech. 1984. V. 144.
13. Duck P. W., Burggraf O. R. Spectral solutions for three-dimensional triple-deck flow over surface topography // J. Fluid Mech. 1986. V. 162. P. 1–22.
14. Боголевов В. В. Общая схема режимов пространственных локальных течений // ПМТФ. 1986. № 6. С. 80–91.
15. Рыжов О. С. О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1035–1052.
16. Жук В. И., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 552–563.
17. Липатов И. И. К теории нестационарного пространственного свободного взаимодействия // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 6. С. 34–42.
18. Казаков А. В. Взаимодействие нестационарного пространственного пограничного слоя с гиперзвуковым потоком около быстрого нагреваемого участка поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 65–72.
19. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
20. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

Поступила в редакцию  
6.VIII.1986