

УДК 532.522.2:531.594

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ДРОБЛЕНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ СТРУЙ

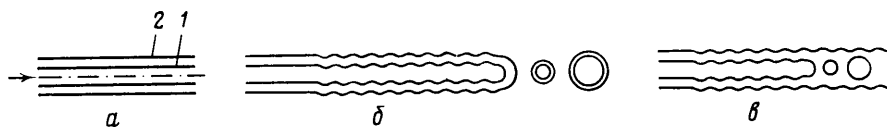
ЕПИХИН В. Е., РАДЕВ С. П., ШКАДОВ В. Я.

Экспериментальный материал по течениям и неустойчивости составных струй несмешивающихся жидкостей получен в [1]: для некоторых пар несмешивающихся жидкостей приведены фотографии составных течений, на которых прослеживается нарастание возмущений вплоть до распада струи на капли. Как и в однородной струе, можно выделить два этапа развития неустойчивости составной струи. Развитие малых возмущений происходит практически по линейной теории и характеризуется экспоненциальным нарастанием их амплитуды. Незадолго до разрушения струи проявляются нелинейные эффекты — на фотографиях хорошо видно образование капле-спутников, радиус которых существенно меньше радиуса основных капель.

Линейная неустойчивость составной струи по отношению к осесимметричным возмущениям исследована в рамках модели невязкого течения, неустойчива по отношению к двум семействам волн, которые распространяются со скоростью основного течения.

Дисперсионное соотношение, выведенное в [2], исследуется для широкого набора безразмерных параметров задачи: двух чисел Вебера, построенных по коэффициентам поверхностного натяжения на внутренней и внешней межфазных поверхностях, скорости течения в ядре и радиусу струи; отношения радиуса ядра к радиусу струи; разрыва скоростей в ядре и в слое увлекаемой жидкости, отнесенного к скорости течения в ядре; отношения плотностей жидкостей. Одномерная модель невязкого течения применяется для описания нелинейного этапа роста возмущений с помощью метода, развитого в [3, 4] для однородной струи.

В отличие от однородного течения, в двухслойной струе имеются два характерных размера — радиусы невозмущенных поверхностей ядра и свободной поверхности. Установлено, что с этим связано наличие двух семейств неустойчивых волн, предсказываемых линейной теорией, а в случае составного течения, содержащего разрыв скоростей, дополнительно имеются неустойчивые коротковолновые возму-



Фиг. 1

щения, связанные с неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца. Взаимодействие этих волн на нелинейной стадии приводит или к разрушению составной струи с образованием свободно летящих каплей различного радиуса в оболочках из переносимой жидкости, или к разрушению ядра с образованием основных капель и капле-спутников, движущихся в струе увлекаемой жидкости, разрушение которой происходит значительно позднее. Образование капле-спутников в случае длинных волн вызывается формированием перетяжек между возмущениями межфазных поверхностей на нелинейной стадии, в результате чего появляется второй характерный размер, обеспечивающий рост дополнительной сильно неустойчивой моды. На фиг. 1 схематично изображены основное двухслойное течение (фиг. 1, а) и типичные формы осесимметричного распада в результате дробления составной струи (фиг. 1, б) и в результате дробления ядра, которое происходит значительно раньше, чем дробление составной струи (фиг. 1, в).

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричную струю, состоящую из жидкого ядра и коаксиального слоя увлекаемой несмешивающейся

жидкости, вытекающую в невозмущенный идеальный газ. Введем цилиндрическую систему координат x, y, θ с началом в центре выходного отверстия струи, координата x направлена вдоль оси струи. Обозначим осевую и радиальную составляющие скорости и давление соответственно u, v, p . В рассматриваемом осесимметричном течении эти величины зависят от x, y и времени t . Легко показать, что для рассматриваемых далее волновых возмущений радиальный градиент давления $\partial p/\partial y = O(\alpha^2)$ и оказывается мал при малых α , где α — волновое число возмущения. Если радиусы ядра и свободной поверхности обозначить $h_1(x, t), h_2(x, t)$, то давление в ядре и в слое увлекаемой жидкости будет соответственно

$$p_1 = p_a + T_1 K^{(1)} + T_2 K^{(2)}, \quad p_2 = p_a + T_2 K^{(2)}$$

Здесь T_1, T_2 обозначают коэффициенты поверхностного натяжения; $K^{(1)}, K^{(2)}$ — кривизну соответствующей поверхности; p_a — давление в окружающей среде. Это предположение выполняется, когда поперечная составляющая скорости жидкости много меньше продольной составляющей, например в невозмущенном течении струи и при образовании длинных волн. Движение составной струи будем описывать уравнениями сохранения массы и количества движения с учетом капиллярных сил; влиянием массовых сил и вязкости пренебрегаем

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_j F_j)}{\partial x} = 0, \quad F_1 = h_1^2, \quad F_2 = h_2^2 - h_1^2 \quad (j=1, 2) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_1^2}{2} \right) = -\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} K^{(1)} - \rho_0 \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x} K^{(2)} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_2^2}{2} \right) = -\sigma_2 \frac{\partial}{\partial x} K^{(2)}$$

$$K^{(j)} = \left(\frac{1}{h_j} - \frac{h_j''}{1+h_j'^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1+h_j'^2}}, \quad h_j' = \frac{\partial h_j}{\partial x}, \quad h_j'' = \frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2}$$

$$We_j = \sigma_j^{-1} = \frac{\rho_j U_*^2 H_*}{T_j}, \quad \rho_0 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (1.3)$$

Эти уравнения были применены в [3, 4] для исследования неустойчивости и дробления однородной струи. Здесь они записаны в дивергентной форме. Величина F_1 обозначает площадь поперечного сечения ядра, F_2 — площадь кольцевого сечения слоя увлекаемой жидкости; u_1, u_2 — однородные по сечению профили осевой скорости.

При обезразмеривании уравнений движения использованы полный радиус струи H_* и скорость в ядре невозмущенной составной струи U_* ; ρ_1 обозначает плотность жидкости ядра, а ρ_2 — плотность увлекаемой жидкости. Обозначим $\sigma = \max(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_{1*} = \sigma_1/\sigma$, $\sigma_{2*} = \sigma_2/\sigma$. Введем независимую переменную $t_* = \sigma^{1/2} t$ и функции $u_{j*} = \sigma^{-1/2} u_j$. В безразмерных переменных система уравнений (1.1), (1.2) сохранит свой вид, если опустить индекс звездочку.

2. Исследование устойчивости составной струи. Стационарное решение уравнений (1.1), (1.2) описывает течение с однородными стационарными профилями скоростей и постоянными значениями радиуса ядра и струи

$$u_1 = U_1 = 1, \quad u_2 = U_2, \quad h_1 = \delta, \quad h_2 = 1 \quad (\delta < 1) \quad (2.1)$$

Исследуем устойчивость этого течения по отношению к бесконечно малым пространственно-периодическим осесимметричным возмущениям,

распространяющимся вдоль оси струи. Линеаризуем уравнения (1.1), (1.2) и рассмотрим их решения в виде нормальных мод $q=q_0 \exp \times [\alpha(x-Ct)]$. Тогда получим аналогично [2] следующее дисперсионное соотношение:

$$(z_1 z_2)^2 + a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_0 = 0 \quad (z_j = U_j - C) \quad (2.2)$$

$$z_2 - z_1 = -U_{12} \quad (2.3)$$

$$a_0 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 \kappa_1 \kappa_2}{4\delta} (1 - \delta^2), \quad a_1 = \frac{\sigma_2 \kappa_2}{2} (1 - \delta^2), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1 \kappa_1}{\delta} + \rho_0 \sigma_2 \kappa_2 \delta^2 \right)$$

$$\kappa_1 = 1 - \alpha^2 \delta^2, \quad \kappa_2 = 1 - \alpha^2$$

Уравнение (2.2) представляет алгебраическое уравнение четвертой степени с действительными коэффициентами относительно собственного значения C , которое является функцией волнового числа возмущения и безразмерных параметров σ_1 , σ_2 , ρ_0 , δ , $U_{12} = 1 - U_2$.

В случае отсутствия разрыва скоростей основного течения ($U_{12} = 0$) уравнение (2.2) переходит к биквадратное, что позволяет получить две неустойчивые моды, отражающие неустойчивость межфазных поверхностей. Диапазон волновых чисел, отвечающей первой моде, $0 < \alpha < 1$, второй — $0 < \alpha < 1/\delta$. При $\alpha > 1/\delta$ основное течение устойчиво.

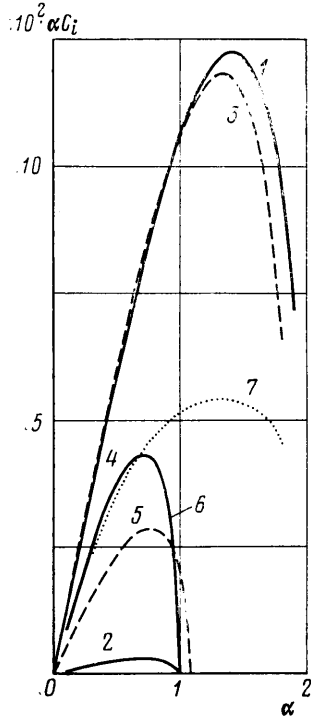
В случае $U_{12} \neq 0$ можно провести качественный анализ уравнения (2.2). В области волновых чисел $0 < \alpha < 1$ все коэффициенты положительны, уравнение (2.2) имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Для последующего анализа при $\alpha > 1$ удобно решить уравнение (2.2) относительно z_2^2 . Построим в действительности плоскости (z_1 , z_2) линии, соответствующие зависимостям (2.2), (2.3), и исследуем их взаимное расположение. В области $1 < \alpha < 1/\delta$ как при $a_2 < 0$, так и при $a_2 > 0$ имеется не более одной неустойчивой моды. В области волновых чисел $\alpha > 1/\delta$ существуют интервалы изменения U_{12} , в которых система уравнений (2.2), (2.3) имеет четыре или два действительных корня, а основное течение устойчиво по отношению к осесимметричным возмущениям или имеет одну неустойчивую осесимметричную моду соответственно.

Эти результаты следуют также из обобщенного критерия устойчивости составных осесимметричных течений [5], который заключается в положительности старших коэффициентов системы Штурма характеристического полинома и который применим к неосесимметричным периодическим по углу возмущениям.

Дисперсионное уравнение (2.2) было решено численно для широкого набора параметров. Расчеты подтверждают качественный анализ. Как правило, если $U_{12} \neq 0$, диапазон волновых чисел неустойчивых возмущений оказывается уже, чем $(0, 1/\delta)$; верхний предел $1/\delta$ достигается при $\sigma_2 \rightarrow 0$. На фиг. 2 представлены зависимости коэффициента нарастания $\alpha C_i(\alpha)$ неустойчивых возмущений в случае составной струи с $U_{12} = 0,5$, $\delta = 0,5$, $\rho_0 = 1$ для типичных условий: $\sigma_1 = 0,015$, $\sigma_2 = 0,0001$ (кривые 1, 2); $\sigma_1 = 0,015$, $\sigma_2 = 0,02$ (кривые 3, 4); $\sigma_1 = 0,00015$, $\sigma_2 = 0,02$ (кривые 5, 6). Кривые 2, 4, 6 изображают коэффициенты нарастания первого семейства волн, а кривые 1, 3, 5 — второго. При $\sigma \rightarrow 0$ (кривые 1, 2), а также $\sigma_1 \sim \sigma_2$ (кривые 3, 4) неустойчивость течения определяется второй модой, $(\alpha C_i)_2 > (\alpha C_i)_1$, а при $\sigma_1 \rightarrow 0$ (кривые 5, 6) — первой модой, $(\alpha C_i)_1 > (\alpha C_i)_2$.

В случае $U_{12} = 0$ неустойчивость струи определяется второй модой при всех соотношениях между σ_1 и σ_2 . При $\sigma_1 \rightarrow 0$ ядро почти не влияет на коэффициент нарастания основной моды, значение которого при $\alpha \leq 0,9$ близко к классическому решению Рэлея для однородной струи, а при $\alpha \geq 1$ оказывает на него существенное влияние. Кривая $(\alpha C_i)_2$ имеет мак-

симумы при $0 < \alpha < 1$ и $1 < \alpha < 1/\delta$, причем первый максимум в 2,5 раза больше второго. При $\sigma_2 \rightarrow 0$ коэффициент нарастания близок к решению Рэлея для ядра, если его рассматривать как свободную струю. Максимальный коэффициент нарастания основной моды по сравнению с предыдущим увеличивается почти в 5 раз. При $\sigma_1 \sim \sigma_2$ коэффициенты нарастания основной моды имеют тот же порядок величины.



Фиг. 2

В этом пункте коэффициенты σ_i определяются по формулам (1.3).

3. Развитие возмущений во времени. Экспоненциальное нарастание амплитуды неустойчивых возмущений приводит к тому, что после некоторого момента их нельзя считать малыми, обе неустойчивые моды не являются больше независимыми. На фотографиях из [1] отчетливо различаются капли разных размеров. Можно ожидать, что, так же как в однородной струе, появление капель-спутников обусловлено нелинейными эффектами взаимодействия неустойчивых возмущений. Для количественного описания процесса дробления струи применим метод разложения возмущений основного течения по степеням малого параметра ϵ , например начальной амплитуды возмущения

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 + \epsilon v, & u_2 &= U_2 + \epsilon w, & h_1 &= \delta + \epsilon \eta, & h_2 &= 1 + \epsilon \xi \\ F_1 &= F_0 + \epsilon f, & F_2 &= G_0 + \epsilon g \\ \epsilon q &= \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \epsilon^3 q_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь q обозначает одну из величин v, w, η, ξ, f или g . Подстановка разложений (3.1) в уравнения (1.1) позволяет получить следующую систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{v=0}^n f_v v_{n-v} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \sum_{v=0}^n v_v v_{n-v} + \sigma_1 K_n^{(1)} + \rho_0 \sigma_2 K_n^{(2)} \right] = 0 \quad (3.3)$$

В уравнениях (3.2), (3.3) $n=1, 2, 3, \dots$; $f_0=F_0, v_0=U_1$.

Возмущения поперечного сечения ядра и кольцевого слоя связаны с возмущениями радиуса и кривизны поверхности ядра и свободной поверхности увлекаемой жидкости соотношениями

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{f_1}{2\delta}, & \eta_2 &= \frac{f_2 - \eta_1^2}{2\delta}, & \eta_3 &= \frac{f_3 - 2\eta_1 \eta_2}{2\delta} \\ \xi_1 &= 1/2(g_1 + f_1), & \xi_2 &= 1/2(g_2 + f_2 - \xi_1^2), & \xi_3 &= 1/2(g_3 + f_3 - 2\xi_1 \xi_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} -K_1^{(1)} &= \frac{\eta_1}{\delta^2} + \eta_1'', & -K_2^{(1)} &= \frac{\eta_2}{\delta^2} + \eta_2'' + \frac{\eta_1'^2}{2\delta^2} - \frac{\eta_1^2}{\delta^3} \\ -K_3^{(1)} &= \frac{\eta_3}{\delta^2} + \eta_3'' + \frac{\eta_1' \eta_2'}{\delta} - \frac{\eta_1 \eta_1'^2}{2\delta^2} + \frac{\eta_1^3}{\delta^4} - \frac{2\eta_1 \eta_2}{\delta^3} - \frac{3}{2} \eta_1'' \eta_1'^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражения для $K_n^{(2)}$ получаются из (3.5) заменой η_n на ξ_n и δ на 1. Уравнения для g_n, w_n можно получить из (3.2), (3.3) заменой U_1 на U_2, F_0 на G_0, f_n на g_n, η_n на ξ_n, δ на 1, ρ_0 на 1, σ_1 на 0.

Бегущие волны с переменной во времени амплитудой соответствуют периодическим по x нестационарным решениям системы (3.2), (3.3), которые имеют вид

$$\begin{aligned} 2q_1 &= q_{11}(t) \exp(-i\alpha x) + q_{11}^*(t) \exp(i\alpha x) + \dots \\ 2q_2 &= 2q_{20} + q_{22}(t) \exp(-2i\alpha x) + q_{22}^*(t) \exp(2i\alpha x) + \dots \\ 2q_3 &= q_{31}(t) \exp(-i\alpha x) + q_{31}^*(t) \exp(i\alpha x) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь q обозначает одну из величин v , w , η , ζ , f или g , звездочка обозначает комплексно-сопряженные величины. Уравнения для комплексных амплитуд, полученные в результате подстановки разложения (3.6) в соотношения (3.2)–(3.5) и приравнивания нулю выражений при различных степенях $\exp(i\alpha x)$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{11} &= i\alpha(F_0 v_{11} + U_1 f_{11}), \quad \dot{f}_{20} = 0, \quad \dot{f}_{22} = 2i\alpha(F_0 v_{22} + \frac{1}{2} f_{11} v_{11} + U_1 f_{22}) \\ \dot{f}_{31} &= i\alpha(F_0 v_{31} + f_{11} v_{20} + \frac{1}{2} f_{11}^* v_{22} + \frac{1}{2} f_{22} v_{11}^* + f_{20} v_{11} + U_1 f_{31}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\dot{v}_{11} + i\alpha \left[\frac{\sigma_1}{\delta^2} \eta_{11} (1 - \alpha^2 \delta^2) + \rho_0 \sigma_2 \zeta_{11} (1 - \alpha^2) \right] = 0, \quad \dot{v}_{20} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{22} + 2i\alpha \left[\frac{\sigma_1}{\delta^2} \eta_{22} (1 - 4\alpha^2 \delta^2) + \rho_0 \sigma_2 \zeta_{22} (1 - 4\alpha^2) \right] = \\ = 2i\alpha \left[U_1 v_{22} + \frac{v_{11}^2}{4} + \frac{\sigma_1}{2\delta^3} \eta_{11}^2 \left(1 + \frac{\alpha^2 \delta^2}{2} \right) + \frac{\rho_0 \sigma_2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dot{v}_{31} + i\alpha \left[\frac{\sigma_1}{\delta^2} \eta_{31} (1 - \alpha^2 \delta^2) + \rho_0 \sigma_2 \zeta_{31} (1 - \alpha^2) \right] =$$

$$= i\alpha \left\{ U_1 v_{31} + v_{20} v_{11} + \frac{v_{22} v_{11}^*}{2} - \sigma_1 \left[\frac{R_\delta}{4} \eta_{11} |\eta_{11}|^2 - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\eta_{11}^* \eta_{22}}{\delta^3} (1 - \alpha^2 \delta^2) - \frac{2\eta_{11} \eta_{20}}{\delta^3} \right] - \rho_0 \sigma_2 \left[\frac{R_1}{4} \zeta_{11} |\zeta_{11}|^2 - \zeta_{11}^* \zeta_{22} (1 - \alpha^2) - 2\zeta_{11} \zeta_{20} \right] \left. \right\}$$

$$\eta_{11} = \frac{f_{11}}{2\delta}, \quad \eta_{20} = \frac{1}{2\delta} \left(f_{20} - \frac{|\eta_{11}|^2}{2} \right), \quad \eta_{22} = \frac{1}{2\delta} \left(f_{22} - \frac{\eta_{11}^2}{2} \right)$$

$$\eta_{31} = \frac{1}{2\delta} (f_{31} - 2\eta_{20} \eta_{11} - \eta_{22} \eta_{11}^*) \quad (3.9)$$

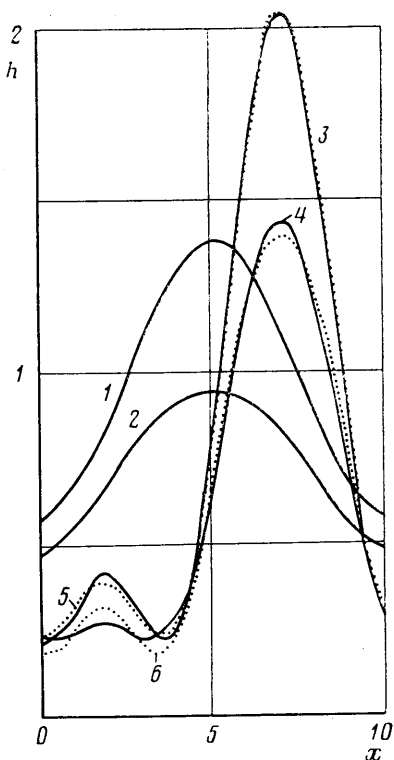
$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \frac{1}{2} (g_{11} + 2\delta \eta_{11}), \quad \zeta_{20} = \frac{1}{2} [g_{20} + 2\delta \eta_{20} + \frac{1}{2} (|\eta_{11}|^2 - |\zeta_{11}|^2)] \\ \zeta_{22} &= \frac{1}{2} [g_{22} + 2\delta \eta_{22} + \frac{1}{2} (\eta_{11}^2 - \zeta_{11}^2)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\zeta_{31} = \frac{1}{2} [g_{31} + 2(\eta_{20} \eta_{11} - \zeta_{20} \zeta_{11}) + \eta_{22} \eta_{11}^* - \zeta_{22} \zeta_{11}^* + 2\delta \eta_{31}]$$

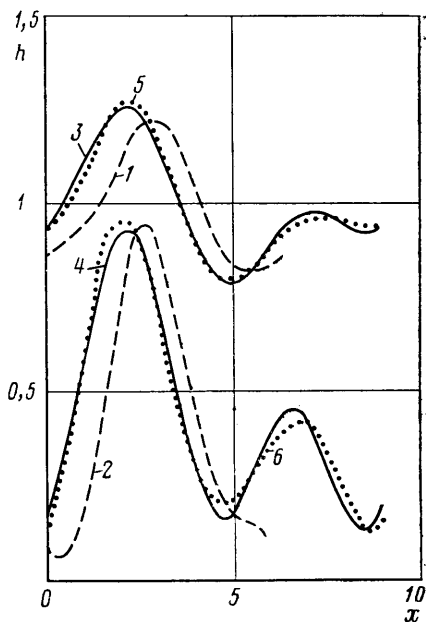
$$R_\delta(\alpha) = \frac{3}{\delta^4} + \frac{3}{2} \alpha^4 - \frac{\alpha^2}{2\delta^2}, \quad R_1(\alpha) = R_\delta(\alpha) |_{\delta=1}$$

В системе уравнений (3.7), (3.8) точка обозначает дифференцирование по t . Уравнения для \dot{g}_{nm} и \dot{w}_{nm} можно получить из уравнений (3.7), (3.8) заменой U_1 на U_2 , F_0 на G_0 , f_{nm} на g_{nm} , η_{nm} на ζ_{nm} , δ на 1, ρ_0 на 1, σ_1 на 0. Каждое из уравнений полученной системы представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому следует задать начальные значения всех функций $f_{nm}(0)$, $g_{nm}(0)$, $\eta_{nm}(0)$, $\zeta_{nm}(0)$, которыми определяется начальное волновое возмущение с длиной $2\pi/\alpha$. Численным интегрированием систем вида (3.7), (3.8) с учетом соотношений (3.9), (3.10) находятся $f_{nm}(t)$, $g_{nm}(t)$, $\eta_{nm}(t)$, $\zeta_{nm}(t)$, а затем по формулам (3.6), (3.1) восстанавливается форма ядра и свободной поверхности струи в произвольный момент времени.

4. Результаты расчетов. В экспериментах работы [1] диаметры струй варьировались от 10^{-5} до 10^{-3} м, скорость течения ядра составляет от 10



Фиг. 3



Фиг. 4

до 40 м/с. В качестве инициирующего ядра использовалась вода, увлекаемая жидкостью представляла собой водные растворы этанола, глицерина или силиконовую жидкость. Коэффициенты поверхностного натяжения составляли 0,020–0,070 н/м. Следовательно, типичны течения со значениями $\rho_0 \approx 1$, $\sigma_1 \sim \sigma_2$, когда обе неустойчивые моды линейного анализа сравнимы по порядку величины, а также $\sigma_1 \rightarrow 0$, когда струя почти однородная. При выборе вариантов для нелинейного расчета использованы результаты анализа устойчивости, представленные в разд. 2.

Эволюция граничных поверхностей составной струи в случае $\alpha=0,3$, $\eta_{11}(0)=0,1$, $\xi_{11}(0)=0,1$, $\rho_0=1$, $\sigma_1=10^{-7}$, $\sigma_2=1$, $\delta=0,74$, $U_{12}=0$ показана на фиг. 3 в моменты $t=10$ (кривые 1, 2), $t=14$ (кривые 3, 4). Пересечение межфазных поверхностей 3 и 4 в момент времени, непосредственно предшествующий дроблению струи, отражает более интенсивный по сравнению с возмущениями ядра рост возмущений свободной поверхности, приводящий к дроблению составной струи, показанному на фиг. 1, б. На заключительной стадии роста возмущений заметное влияние на течение оказывает возбуждение второй гармоники, вызываемое нелинейным взаимодействием, что приводит к образованию локального максимума в распределении радиусов ядра и струи. Хотя этот максимум меньше основного, он может привести к образованию свободно летящих капель меньшего размера в оболочках из переносимой жидкости. Так же как в случае однородной струи [4], образование второго максимума происходит лишь в случае длинноволновых возмущений при $0 < \alpha < \alpha_*$, причем критическое волновое число $\alpha_* = 0,707$ соответствует примерно волновому числу наиболее неустойчивого возмущения α_{opt} . Минимальное значение времени распада $t_{min} \approx 7$.

На фиг. 4 представлены граничные поверхности составной струи на заключительной стадии развития при $\alpha=1$, $t=9$ (кривые 1, 2) и при $\alpha=0,707$, $t=11$ (кривые 3, 4); $\eta_{11}(0)=10^{-3}$, $\xi_{11}(0)=10^{-6}$, $\delta=0,5$, $\sigma_1=0,75$,

$\sigma_2=1$, $U_{12}=0,5$. Как и в однородной струе, появлению второго локального максимума предшествует частичное выполаживание поверхности струи. В данном случае нелинейное взаимодействие возмущений различного масштаба приводит к разрушению ядра с образованием основных капель и капель-спутников, движущихся в струе переносимой жидкости, причем разрушение последней происходит значительно позднее, как это показано на фиг. 1, *в*. Значение критического волнового числа $\alpha_*=1$ существенно отличается от критического волнового числа при дроблении однородной струи. При $\alpha>1$ возмущения развиваются регулярно и локальный максимум на возмущенных граничных поверхностях не наблюдается. Расчеты составных струй с $\alpha=1,8$; 1,6; 1,4; 1,2; 1,0; 0,707; 0,5; 0,3 позволили установить минимальное значение времени распада $t_{min}=8$, соответствующее начальному возмущению с волновым числом $\alpha_{opt}=1,4$.

На фиг. 2 линия 7 изображает значения $0,5Q_\alpha(t)$, причем коэффициенты нарастания возмущений $Q_\alpha(t)$ вычисляются по формуле

$$Q_\alpha(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[\frac{\max_x h_1(x, t) - \delta}{\eta_{11}(0)} \right]$$

на заключительной стадии эволюции течения при $\zeta_{11}(0)=10^{-6}$, $\eta_{11}(0)=10^{-3}$, $\sigma_1=0,75$, $\sigma_2=1$. Можно видеть, что, так же как и в однородной струе, развитие основной гармонике близко к линейному до момента разрушения струи при $\alpha \leq 0,7$. В результате расчетов установлено, что в интервале $0 \leq t \leq t_k$ (t_k — момент разрушения ядра двухслойной струи) функция $Q_\alpha(t)$ при $\alpha=1,8$; 1,4; 1; 0,707; 0,5; 0,3 монотонно возрастает со временем: $Q_\alpha(t) > 0$. При этом $Q_\alpha(t)$ близка к нулю при малых t , что соответствует асимптотике аналитического решения в линейном приближении, и возрастает с ростом t : $Q_\alpha(t) \geq 0$.

Для суждения о точности решений системы уравнений (3.2), (3.3), полученных с помощью (3.6), проводилось их сравнение с решениями этой системы, вычисленными с учетом в q_1 и q_3 третьей, а в q_2 — четвертой гармоники. При $\alpha \geq \alpha_*$ максимальная величина относительной погрешности не превосходит 0,5%. Межфазные поверхности, вычисленные с учетом дополнительного члена в (3.6), показаны на фиг. 3 (кривые 5, 6) и фиг. 4 (кривые 5, 6). Учет высших гармоник позволяет уточнить решение на более поздних стадиях и приблизить момент пересечения межфазных поверхностей, показанных на фиг. 3, к моменту дробления струи. В решении, показанном на фиг. 4, $\alpha=0,707$, максимальная относительная погрешность составляет 3%. При дальнейшем уменьшении α , т. е. с увеличением длины волны возмущений, относительная погрешность еще возрастает и для получения необходимой точности следует увеличить количество членов в разложении (3.6).

Таким образом, теория нелинейного развития осесимметричных капиллярных волн позволяет объяснить имеющиеся данные по дроблению составных струй. Перебирая определяющие безразмерные параметры σ_1 , σ_2 , δ , U_{12} , ρ_0 при значении $\alpha=\alpha_{opt}$, можно рассмотренным методом рассчитать развитие неустойчивости двухслойной струи в каждом конкретном случае и отобрать те из них, которые в наибольшей степени удовлетворяют поставленной цели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz C. H., Hermanrud B. A liquid compound jet // J. Fluid Mech. 1983. V. 131. P. 271–287.
2. Радев С., Шкадов В. Об устойчивости двухслойной капиллярной струи // Теорет. и прил. механика. 1985. Т. 16. № 3. С. 68–75.
3. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Науч. тр. Ин-та мех. МГУ. 1973. № 25. 192 с.
4. Маркова М. П., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 30–37.
5. Епилин В. Е., Шкадов В. Я. Гидродинамическая неустойчивость осесимметричных течений идеальной жидкости с межфазной поверхностью // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 45. № 1. С. 64–72.

Москва,
София

Поступила в редакцию
4.XI.1985