

УДК 532.51.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

ГЕРЦЕНШТЕЙН С. Я., РУДНИЦКИЙ А. Я., СУХОРУКОВ А. Н.

Проблема устойчивости неплоскопараллельных течений является одной из наиболее трудных и наименее изученных проблем теории гидродинамической устойчивости [1]. При этом основное состояние, устойчивость которого исследуется, зависит в отличие от приближения Гайзенберга [1] от нескольких переменных и проблема устойчивости сводится к решению задачи на собственные значения для уравнений в частных производных, в которых коэффициенты зависят от нескольких переменных [2–7]. В случае периодической зависимости этих коэффициентов по времени [2] или по пространству [3, 4] строится аналог теории Флоке для уравнений в частных производных. Случай непериодической зависимости, за редким исключением, обычно рассматривался в рамках предположений о слабой неплоскопараллельности – предполагалось достаточно малое отклонение от плоскопараллельного случая и рассматривались соответствующие асимптотические разложения в линейном [6] и нелинейном анализах устойчивости [7].

В данной работе рассматривается случай произвольной зависимости профиля скорости основного потока от двух пространственных переменных. Отклонение от плоскопараллельного случая не предполагается малым и решение соответствующей задачи на собственные значения для уравнений в частных производных проводится с помощью прямых методов [5], впервые введенных и обоснованных в теории гидродинамической устойчивости Г. И. Петровым [8].

1. Вектор скорости основного течения, устойчивость которого исследуется, задается в декартовой прямоугольной системе координат (x, y, z) в виде $\mathbf{V}_0 = \{U(y, z), 0, 0\}$. Предполагается, что накладываемые возмущения достаточно малы и имеют следующий вид:

$$\mathbf{q}' = \operatorname{Re}\{\mathbf{q}(y, z) \exp[i\alpha(x - ct)]\}, \mathbf{q}' = \{u', v', w', p'\}$$

Здесь u' , v' , w' , p' – соответственно x -, y - и z -компоненты вектора возмущения скорости, p' – давление, α – действительное волновое число, $c = c_r + i c_i$ – искомое собственное значение, $\mathbf{q}(y, z)$ – собственная функция, c_r – фазовая скорость, αc_i – коэффициент нарастания, $\mathbf{q} = \{u, v, w, p\}$.

Исследование устойчивости проводится в рамках модели линеаризованных уравнений Навье – Стокса (с граничными условиями прилипания на стенах $y=y_1$, $y=y_1+h_y$, $z=z_1$, $z=z_1+h_z$)

$$\begin{aligned} M_1(u, v, w) &= i\alpha(U - c)u + U_v v + U_z w - \frac{1}{R}(u_{yy} + u_{zz} - \alpha^2 u) = -\alpha p \\ M_2(u, v, w) &= i\alpha(U - c)v - \frac{1}{R}(v_{yy} + v_{zz} - \alpha^2 v) = -p_y \\ M_3(u, v, w) &= i\alpha(U - c)w - \frac{1}{R}(w_{yy} + w_{zz} - \alpha^2 w) = -p_z \\ -i\alpha u + v_y + w_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В дальнейшем удобно перейти к новым переменным

$$y^\circ = \frac{2y}{h_y} - \frac{2y_1 + h_y}{h_y}, \quad z^\circ = \frac{2z}{h_z} - \frac{2z_1 + h_z}{h_z}$$

Система (1.1) легко сводится к системе из двух уравнений для двух неизвестных v и w с помощью исключения давления и подстановки выражения для u -компоненты скорости из уравнения неразрывности

$$\begin{aligned} L_1(v, w) &= : \alpha R \left[(U - c) \left(\frac{4}{h_y^2} v_{yy} + \frac{4}{h_y h_z} w_{yz} - \alpha^2 v \right) + \frac{4}{h_y h_z} U_y w_z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{h_y^2} U_{yy} v - \frac{4}{h_y h_z} U_{yz} w - \frac{4}{h_y h_z} U_z w_y \right] = \frac{16}{h_y^4} v_{yyyy} - \frac{8\alpha^2}{h_y^2} v_{yy} + \\ &\quad + \alpha^4 v + \frac{16}{h_y^2 h_z^2} v_{yyzz} + \frac{16}{h_y^3 h_z} w_{yyyz} + \frac{16}{h_y h_z^3} w_{yzzz} - \alpha^2 \left(\frac{4}{h_y h_z} w_{yz} + \frac{4}{h_z^2} v_{zz} \right) \\ L_2(v_1, w) &= i\alpha R \left[(U - c) \left(\frac{4}{h_z^2} w_{zz} + \frac{4}{h_y h_z} v_{yz} - \alpha^2 w \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{h_y h_z} U_z v_y - \frac{4}{h_z^2} U_{zz} w - \frac{4}{h_y h_z} U_{yz} v - \frac{4}{h_y h_z} U_y v_z \right] = \\ &= \frac{16}{h_z^2} w_{zzzz} - \frac{8\alpha^2}{h_z^2} w_{zz} + \alpha^4 w + \frac{16}{h_y^3 h_z} v_{yyyz} + \frac{16}{h_y h_z^3} v_{yzzz} + \frac{16}{h_y^2 h_z^2} w_{yyyz} - \\ &\quad - \alpha^2 \left(\frac{4}{h_y h_z} v_{yz} + \frac{4}{h_z^2} w_{yy} \right), \quad v=0, \quad w=0, \quad v_y + w_z = 0 \quad (y=\pm 1, z=\pm 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решение поставленной задачи на собственные значения отыскивается с помощью метода Бубнова — Галеркина

$$v^{(N, K)} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K v_{nk} f_{nk}(y, z), \quad w^{(N, K)} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^K w_{nk} \Phi_{nk}(y, z) \quad (1.3)$$

$$f_{nk} = (1-y^2)^2 (1-z^2) T_n(y) T_k(z), \quad \Phi_{nk} = (1-y^2)(1-z^2)^2 T_n(y) T_k(z)$$

Здесь T_n — полиномы Чебышева, v_{nk} , w_{nk} — постоянные. Следуя стандартной процедуре метода Бубнова — Галеркина [9], получим систему из $2(N+1)(K+1)$ линейных алгебраических однородных уравнений относительно неизвестных v_{nk} , w_{nk}

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_1(v^{(N, K)}, w^{(N, K)}) f_{nk} dy dz = 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_2(v^{(N, K)}, w^{(N, K)}) \Phi_{nk} dy dz \quad (1.4)$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим уравнение для определения искомых собственных значений.

Сходимость данной численной процедуры может быть доказана, следуя [9]. При этом систему опорных соленоидальных векторов можно построить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \{-f_{00, y}; f_{00}; 0\}, \quad \mathbf{F}_2 = \{-\varphi_{00, z}; 0; \varphi_{00}\}, \\ \mathbf{F}_3 &= \{-f_{01, y}; f_{01}; 0\}, \quad \mathbf{F}_4 = \{-\varphi_{01, z}; 0; \varphi_{01}\}, \dots \\ \mathbf{F}_{I-1} &= \{-f_{NK, y}; f_{NK}; 0\}, \quad \mathbf{F}_I = \{-\varphi_{NK, z}; 0; \varphi_{NK}\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^I V_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{F}_i = \{F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}\} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.4), получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_1 F_{1i} dy dz &= 0, & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_2 F_{2i} dy dz &= 0 \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_3 F_{3i} dy dz &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Нетрудно видеть, что после несложных преобразований система (1.7) тождественно совпадает с системой (1.4).

Систему алгебраических линейных уравнений удобно записать в матричном виде

$$A\mathbf{V}=cB\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_1\{v, w\} \quad (1.8)$$

Здесь A и B – заполненные комплекснозначные матрицы размера $N_0 \times N_0$. В составленной программе расчета на ЭВМ элементы этих матриц вычислялись автоматически. Интегрирование проводилось по формуле Симпсона. Подынтегральные выражения выписывались аналитически. Вычисление собственных значений и собственных векторов проводилось с помощью стандартных подпрограмм, требующих порядка N_0^3 операций.

Отметим, что при исследовании профилей скорости, симметричных относительно y ($U(-y, z)=U(y, z)$), можно рассматривать решения различной симметрии

$$u(y, z) = -u(-y, z), \quad v(y, z) = v(-y, z), \quad w(y, z) = -w(-y, z) \quad (1.9)$$

$$u(y, z) = u(-y, z), \quad v(y, z) = -v(-y, z), \quad w(y, z) = w(-y, z) \quad (1.10)$$

При этом порядок матриц A и B уменьшается вдвое, а время счета – примерно в 8 раз.

2. Первоначально в данной работе было проведено методическое сопоставление численных и аналитических решений. Аналитические решения, следуя [10], строились следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \alpha u_1 + \dots, \quad v = \alpha v_1 + \dots, \quad w = \alpha w_1 + \dots \\ p &= \alpha p_1 + \dots, \quad c_i = -Y/\alpha + \dots, \quad c_r = c_r^{(0)} + \alpha c_r^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя эти разложения в (1.2) и приравнивая члены при α^0 , получим

$$u_{0yy} + u_{0zz} + 4Ru_0 = 0$$

Пусть $z=0$, $y_1=-h_y/2$. Тогда из (1.2) с учетом граничных условий (1.3) получим

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{Y}{\alpha}, \quad Y = -\frac{\pi^2}{R} \left(\frac{4n^2}{h_y^2} + \frac{k^2}{h_z^2} \right); \quad n, k = 1, 2, 3, \dots \\ u_0 &= a \sin\left(\frac{2\pi n}{h_y} y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{h_z} z\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что формула (2.2) является «пространственным» обобщением аналитической формулы, полученной в [10] для плоскопараллельного течения. Существенно, что наличие третьего измерения (вдоль оси z) приводит к качественному расширению спектра собственных значений. Это расширение и вид новых собственных функций фактически определяются новыми «трехмерными» границами области и не зависят от конкретного вида профиля скорости.

Сопоставление численных и аналитических значений было проведено для профиля

$$U_{00}(y, z) = [1 + 1/2e(1+z)h_z] \operatorname{ch}^{-2}(1/2h_y y) \quad (2.3)$$

при $R=20$, $e=0,25$, $h_y=h_z=8$, $K=6$ при $\alpha=0,01$, а также при $\alpha=0,05$ для двух значений $N=7$ и 11 . Проведенное сопоставление показывает достаточность учета относительно небольшого числа опорных функций ($K=6$, $N=7$) при малых значениях волнового числа α (погрешность при вычислении первых 10 собственных значений c_k не превышает 10%). Увеличение волнового числа α не приводит к существенно-

му увеличению необходимого числа опорных функций. Так, при $\alpha=0,7$, $\varepsilon=0$ коэффициент нарастания и фазовая скорость $Re(c)$ первой неустойчивости моды устанавливаются с относительной погрешностью $\sim 3,5$ и 7% при $N=7$, $K=2$. Для второй неустойчивой моды аналогичная точность достигается при $N=7$, $K=4$.

Увеличение параметра ε (при $\alpha=0,7$) приводит к некоторому увеличению необходимого числа опорных функций. Так, при $\varepsilon=0,25$, $\alpha=0,7$ и при $N=7$, $K=4$ в спектре появляются три неустойчивые моды, а при $N=9$, $K=8$ — уже четыре неустойчивые моды. При дальнейшем увеличении N и K рассматриваемые собственные значения изменяются не более чем на 10 %. Так, при $N=9$ и $K=8$ $c_1=0,83+0,3i$, $c_2=0,49+0,079i$, $c_3=0,78+0,05i$, $c_4=1,17+0,03i$, а при $N=13$ и $K=10$ — соответственно $0,87+0,27i$, $0,51+0,072i$, $0,74+0,055i$ и $1,25+0,027i$.

Отметим, что первые две — три моды рассчитываются с относительно высокой степенью точности — порядка 5–10 %, а старшие — 15–20 %.

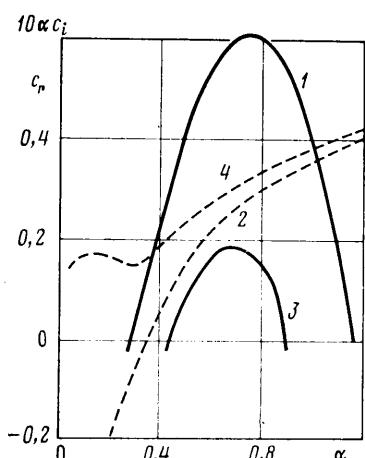
Увеличение параметров N и K с увеличением ε легко объясняется усложнением пространственной структуры искомых решений.

Отметим, что уменьшение h_y и h_z может приводить к заметному уменьшению коэффициентов нарастания обеих неустойчивых мод и даже к их полной стабилизации. Так, при $h_z=4$ ($\alpha=0,7$, $R=20$, $h_y=8$) остается лишь одна первая неустойчивая мода, причем ее коэффициент нарастания также существенно уменьшается, а при $h_z=2$ обе моды становятся устойчивыми. Аналогичное влияние на устойчивость оказывает и уменьшение h_y : при $h_y=4$ ($h_z=8$, $R=20$, $\alpha=0,7$) течение также становится устойчивым. Увеличение же h_y и h_z оказывается несущественным. При $h_y>8$ ($h_z=8$) коэффициенты нарастания практически не меняются. Новых неустойчивых мод при этом также не появляется.

При увеличении h_z (при $h_y=8$) коэффициенты нарастания первых двух мод слегка увеличиваются: при $h_z=12$ — до 0,095 и 0,064 соответственно, а при $h_z>12$ эти значения остаются фактически неизменными. Отметим, что с увеличением h_z в спектре могут появляться новые неустойчивые моды. Так, при $h_z=12$ имеется три неустойчивые моды, при $h_z=14$ их становится уже четыре.

Интересно, что все найденные моды соответствуют антисимметричным (по z -компоненте скорости) решениям; симметричных неустойчивых мод в рассмотренном диапазоне параметров не обнаружено.

3. Одним из основных результатов проведенного численного анализа является обнаружение неожиданно сильного влияния поперечных «трехмерных» стенок (при $z=\pm 1$). Наличие этих стенок даже для двумерной струи



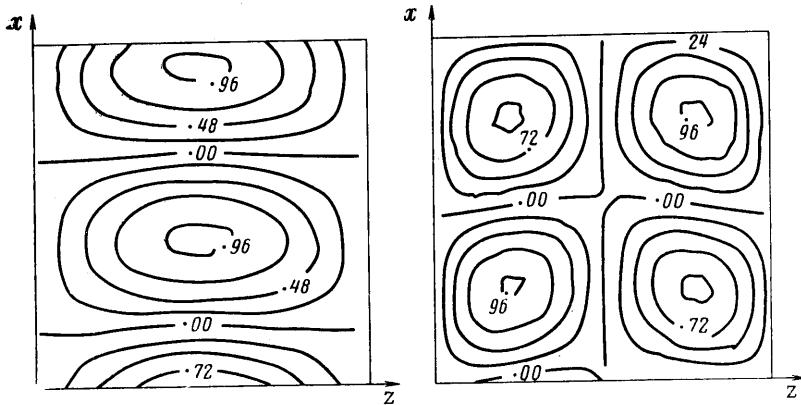
Фиг. 1

с профилем скорости, зависящим только от y , например $U_0(y)=ch^{-2}(h_y y/2)$, приводит к появлению новых неустойчивых мод с сугубо пространственной структурой. Так, при $R=20$ ($h_y=h_z=8$, $N=7$, $K=4$) проведенные расчеты установили существование двух неустойчивых мод (фиг. 1), одна из которых соответствует обычной плоской струе в канале с твердыми стенками [10] (фиг. 1, кривые 1, 2), а другая обусловлена трехмерностью граничных условий (фиг. 1, кривые 3, 4). На фиг. 1 представлены спектральные зависимости коэффициентов нарастания $10\alpha c_1(\alpha)$ (кривые 1, 3) и фазовых скоростей $c_r(\alpha)$ (кривые 2, 4) от волнового числа α . Существенно, что первая мода соответствует слу-

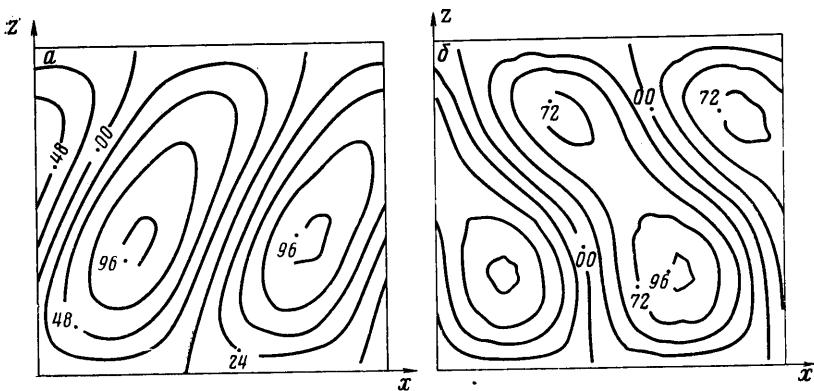
чаю $n=k=1$, а вторая $n=1$, $k=2$ в асимптотическом решении для малых α .

На фиг. 2 и 3 представлены изобары (линии постоянного уровня давлений для первой и второй моды при $y=0,125$; на фиг. 2 при $\alpha=0,05$ для $U(y)=U_0(y)$, а на фиг. 3 при $\alpha=0,7$, $\varepsilon=0,1$ для $U(y)=U_{00}(y)$). Возмущения давления нормированы на свое максимальное значение. Шаг вывода изолиний равен 0,24. Вертикальное направление соответствует оси x (фиг. 2) или z (фиг. 3), горизонтальное — оси z (фиг. 2) или x (фиг. 3); $0 \leq x \leq 2\pi$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.

Пространственная структура первой моды соответствует обычной антисимметричной моде неустойчивости — вдали от стенок вихри имеют практически прямолинейную форму; искривление наблюдается лишь вблизи сте-



Фиг. 2



Фиг. 3

нок. Вторая же мода соответствует двухвихревой структуре. Изобары в плане (в плоскости x, z) напоминают «шахматную» ячеистую структуру. Аналогичные формы вихревых структур прослеживаются при анализе изобар в плоскости (x, y) в сечениях $z=\text{const}$. Для первой моды наблюдается обычная «шахматная» дорожка вихрей, для второй характерно дробление вихревых структур.

Таким образом, наряду с известными механизмами возникновения трехмерных возмущений, связанных с искривлением линий тока вблизи вогнутых границ потока [11], обнаружена возможность усиления трехмерных возмущений даже для чисто двумерных плоских прямолинейных потоков только за счет наличия поперечных «торцевых» граничных условий.

Этот механизм усиления трехмерных «шахматных» вихревых образований может оказаться особенно существенным при внесении в основной поток поперечной неоднородности, возникающей, например, в спутных потоках за трехмерными телами [12, 13]. Рассмотрим в качестве примера следующий профиль скорости, зависящий от двух переменных:

$$U_1(y, z) = [1 + \epsilon \operatorname{th}(\frac{1}{2}h_z z)] \operatorname{ch}^{-2}(\frac{1}{2}h_y y) \quad (3.1)$$

Проведенные расчеты установили, что увеличение параметра ϵ приводит к нарастанию коэффициента усиления второй моды и уменьшению коэффициента усиления первой. При $\epsilon \approx 0,125$ эти коэффициенты становятся равными, а при $\epsilon \approx 0,36$ первая мода — устойчивой. Новых неустойчивых мод при этом не обнаружено (при $\epsilon \leq 0,6; 0,05 \leq \alpha \leq 1,25$). Существенно, что фазовые скорости этих мод различаются между собой примерно на 10–15% (для первой моды $c_r \approx 0,28$, для второй $\approx 0,32$). Примерно та-

кую же величину составляет скачкообразное изменение числа Струхаля вдоль образующей цилиндра, который обтекался неравномерным потоком, изменяющимся вдоль образующей цилиндра [12, 13].

Для первой моды изменение пространственной структуры возмущенного течения при увеличении ϵ оказывается несущественным: первоначально почти прямолинейные вихревые структуры как бы наклоняются в зону больших скоростей, угол наклона их осей примерно соответствует градиенту скорости внешнего потока вдоль оси z , а для второй моды его изменение при достаточно больших ϵ носит качественный характер: происходит постепенное объединение вихревых структур одного знака, в результате для второй моды наблюдается прямо противоположный наклон вихревых структур в сторону не больших, а меньших скоростей.

Существенное отличие в пространственной структуре этих мод может приводить, даже при одинаковых коэффициентах усиления, к локальному выделению спектральных составляющих с различными частотными характеристиками [12, 13].

Хотя рассмотренный профиль скорости представлял собой комбинацию горизонтального струйного течения (с профилем скорости $U_{11}(y) = \text{ch}^{-2}(\frac{1}{2}h_y y)$ и вертикального слоя смешения ($U_{22}(z) = [1 + \epsilon \text{th}(\frac{1}{2}h_z z)]$), в рассмотренном диапазоне параметров ($0 \leq \epsilon \leq 0,06$; $0,05 \leq \alpha \leq 1,25$) растущими оказались только «струйные» моды. И наоборот, при исследовании устойчивости профиля скорости, который соответствует вертикальному слою смешения с «промодулированной» по горизонтали зависимостью, соответствующей горизонтальному струйному течению

$$U_2(y, z) = [1 + \epsilon \text{ch}^{-2}(\frac{1}{2}h_y y)] \text{th}(\frac{1}{2}h_z z)$$

определяющей является обычная «слойная» мода ($0 \leq \epsilon \leq 0,8$; $h_y = h_z = 8$). При этом никаких дополнительных неустойчивых мод в рассмотренном диапазоне параметров не возникает. Характерные вихревые структуры при изменении ϵ практически не изменяются.

Рассмотрение устойчивости «промежуточного» профиля скорости с точкой перегиба при $z = -1$

$$U_3(y, z) = [1 + \text{th}(\frac{1}{2}h_z(z+1))] \text{ch}^{-2}(\frac{1}{2}h_y y)$$

приводит также к промежуточным результатам. Коэффициенты первой и второй мод при этом оказываются почти равными, их отношение равно примерно 1,28, что вдвое меньше соответствующего значения для профиля (2.3) (при $\epsilon = 0,125$, $h_y = h_z = 8$ и $z = 1 - \epsilon h_z(z+1) \approx \text{th}[\frac{1}{2}h_z(z+1)]$). Напомним, что для профиля с точкой перегиба (3.1) эти же коэффициенты становятся равными также при $\epsilon \approx 0,125$. Пространственная структура наиболее опасных первых двух мод также аналогична первоначальному случаю.

Форма зависимости профиля скорости от вертикальной координаты (в частности, наличие или отсутствие точки перегиба) может оказывать существенное влияние на характеристики устойчивости. Так, при

$$U_4(y, z) = [1 + \frac{1}{2}\epsilon h_z(1+z)] \text{ch}^{-2}(\frac{1}{2}h_y y)$$

увеличение параметра ($0 \leq \epsilon \leq 1,5$) сопровождается появлением симметричных (по u) неустойчивых возмущений и большого числа неустойчивых мод (при $\epsilon = 0,3$ появляется пять таких мод) резким увеличением коэффициента нарастания первой моды, который увеличивается примерно пропорционально ϵ и при $\epsilon = 1,4$ превышает свое первоначальное значение (при $\epsilon = 0$) примерно в 20 раз, существенно превышая коэффициенты нарастания всех остальных мод (не менее чем в 1,5–2 раза). При $1,5 > \epsilon \geq 0,4$ наибольший коэффициент нарастания среди всех остальных мод соответствует пятой моде, причем при $\epsilon \approx 0,4$ коэффициенты нарастания всех мод оказываются примерно равными.

Пространственная же структура первой (фиг. 3, а) и второй (фиг. 3, б) мод при различных значениях ϵ оказывается примерно такой же, как и для профиля с вертикальной точкой перегиба. Наклон вихрей для третьей, пятой и шестой мод аналогичен случаю первой моды (фиг. 3, а). Наибольший интерес в этой серии расчетов, по-видимому, представляет тенденция к раздвоению вихревых структур по вертикали (фиг. 3, б). Третья и четвертая мода оказываются симметричными (по y), причем для обеих характерно образование пристенных ($y=\pm 1$) вихревых структур; особенно это ярко выражено у третьей моды; для четвертой наиболее характерны интенсивные приосевые вихри (при $y=0$).

4. Влияние поперечного трехмерного градиента скорости существенно отличается от влияния двумерных искажений первоначально симметричного профиля. Исследование линейной устойчивости с помощью метода Рэлея [14–16] несимметричного профиля скорости, аппроксимируемого ломаной

$$\begin{aligned} U_5 &= 0 \quad (y \geq 1,5); \quad U_5 = 1,5 - y \quad (0,5 \leq y \leq 1,5) \\ U_5 &= 1 \quad (-0,5 \leq y \leq 0,5) \quad U_5 = 1,5 + y \quad (b - 1,5 \leq y \leq -0,5) \\ U_5 &= b \quad (y < -1,5 + b) \end{aligned}$$

показало, что изменение параметра b от 0 до 0,8 приводит к незначительному уменьшению максимальных коэффициентов нарастания α_{ci} антисимметричных (по y -компоненте скорости) возмущений и соответствующих им волновых чисел (примерно на 15–10%). Максимальные коэффициенты симметричных возмущений и соответствующие им волновые числа, наоборот, заметно увеличиваются (соответственно в 1,5 и 5 раз).

Такое поведение спектральных характеристик легко объясняется наличием в рассмотренном профиле скорости $U_5(y)$ двух слоев смещения. При увеличении параметра b ширина одного из слоев h уменьшается (при $b=1 \lim h=0$). При этом градиент скорости в данном слое остается постоянным и равным градиенту скорости во втором «неподвижном» слое. Начиная с некоторого значения b (при $b>0,8$) оба слоя становятся практически независимыми друг от друга и рассматриваемые спектральные моды соответствуют этим независимым слоям смещения.

В нелинейном случае физика протекающих процессов также в значительной степени определяется взаимным расположением этих слоев смещения [17]. При этом устойчивость несимметричного профиля скорости $U_5(y)=\psi_0'(y)$ рассматривалась в рамках невязких уравнений Эйлера; решение уравнения для функции тока $\psi(x, y, t)$ отыскивалось с помощью модифицированного метода Рэлея [16, 18]

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{00} + \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=-N_2}^{N_2} \left\{ A_{1nkh}(t) \exp[-(n\alpha+k\gamma)y] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^j A_{inhk}(t) \operatorname{sh}[(n\alpha+k\gamma)(y-y_l)] \right\} \cos(n\alpha+k\beta)x + \\ &\quad + \left\{ A_{2nkh}(t) \exp[-(n\alpha+k\gamma)y] + \sum_{l=1}^j A_{2nhkl}(t) \operatorname{sh}[(n\alpha+k\gamma)(y-y_l)] \right\} \times \\ &\quad \times \sin[(n\alpha+k\gamma)x] \end{aligned}$$

Проведенные расчеты установили, в частности, что уменьшение интенсивности одного из слоев (например, ровно в 2 раза за счет перехода в центре слоя от линейной зависимости скорости к ее постоянному значению, равному половине величины скорости на оси струи) приводит к

существенному уменьшению нелинейного искажения осредненных поправок к основному профилю струи (на оси струи эта поправка уменьшается примерно в 1,5 раза). При этом амплитуда основной волны также уменьшается примерно в 1,4 раза, а амплитуда более короткой волны, соответствующей более узкому слою смешения, увеличивается в ~1,3 раза. Сопоставление проводилось для времени, при котором достигается первый локальный максимум соответствующей величины. Подобное уменьшение поправки к осредненному значению скорости объясняется уменьшением интенсивности одного из слоев смешения на границах рассматриваемой плоской струи. Увеличение интенсивности более короткой волны также легко объясняется ее соответствием более узкому новому слою смешения. Уменьшение интенсивности основной волны объясняется тем, что в первоначально симметричной струе колебания в симметрично расположенных слоях смешения как бы взаимно усиливали друг друга. Наоборот, увеличение ширины и интенсивности одного из слоев смешения, например, для профиля скорости $U_6=0$ ($y \leq 1,5$); $U_6=y+1,5$ ($-1,5 \leq y \leq 0,5$); $U_6=1$ ($-0,5 \leq y \leq 0,5$); $U_6=1,5-y$ ($0,5 \leq y \leq 2$); $U_6=-0,5$ ($2 \leq y$) приводит к увеличению интенсивности основной волны в ~1,5 раза и к заметному уменьшению амплитуды ее второй гармоники в ~1,4 раза. Эти результаты объясняются увеличением интенсивности слоя смешения. При этом осредненная поправка к основному профилю скорости практически не изменяется. Это связано с тем, что наряду с увеличением интенсивности слоя смешения происходит увеличение его толщины и удаление от оси струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. Герценштейн С. Я. Об устойчивости нестационарного прямодинейного потока идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 5–10.
3. Герценштейн С. Я., Шкадов В. Я. Устойчивость неосесимметричных жидких струй // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 43–52.
4. Левченко В. Я., Соловьев А. С. Устойчивость пограничного слоя на волнистой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 6. С. 11–16.
5. Герценштейн С. Я. О влиянии единичной шероховатости на возникновение турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 163–166.
6. Зельман М. Б., Какоткин А. Ф. К пространственно-временному развитию возмущений в пограничном слое // ПМТФ. 1985. № 1. С. 42–47.
7. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. О возмущениях конечной амплитуды в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 150–153.
8. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 3–12.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 203 с.
10. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
11. Бетчев Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
12. Maull D. J., Young R. A. Vortex shedding from bluff bodies in a shear flow // J. Fluid Mech. 1973. V. 60. Pt 2. P. 401–409.
13. Stansby P. K. The locking-on of vortex shedding due to the cross-stream vibration of circular cylinders in uniform and shear flows // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. Pt 4. P. 641–665.
14. Рэлей Дж. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
15. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев // Тр. ЦАГИ. 1937. Вып. 304. 24 с.
16. Герценштейн С. Я. О сходимости метода Рэлея // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 5. С. 1012–1015.
17. Герценштейн С. Я., Олару И. И., Рудницкий А. Я., Сухоруков А. Н. О развитии конечно-амплитудных двумерных и трехмерных возмущений в струйных течениях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 8–19.
18. Герценштейн С. Я. О применении метода Рэлея к нелинейным и трехмерным задачам // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 6. С. 1319–1322.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1986