

ния в диапазоне $0,3 \leq a_w < 1$ можно пользоваться приближенными формулами пере-
счета

$$m_{*p}(a_w) = m_*(1) \gamma^{-1}, \quad T_\infty(a_w) = T_\infty(1)$$

$$n_{\infty p}(a_w) = n_\infty(1)$$

$$\gamma = 1 + 2\sqrt{\pi}(1/a_w - 1)(1-F)m_*(1)$$

$$F = h_y h_z / H_y H_z$$

Здесь F — относительная площадь отверстий пор. При малых значениях a_w те-
чение в кнудсеновском слое носит ярко выраженный трехмерный характер (газ
при выходе из пор испытывает сильное расширение) и приведенные формулы пере-
счета несправедливы.

Влияние размеров и формы ячеек h_y, h_z при фиксированном M_∞ сказывается
главным образом на величине безразмерного расхода m_* и приведено ниже для
 $M_\infty = 0,6$; $a_w = 1$; $h_x = l_w$; $H_y = H_z = l_w$:

h_z/l_w	0,4	0,6	0,8	1,0
h_y/l_w	0,4	0,6	0,8	1,0
m_*	0,225	0,227	0,230	0,233
h_y/l_w	0,4	0,4	0,4	0,4
m_*	0,225	0,226	0,227	0,228

Таким образом, сравнение результатов исследования сильного испарения по-
верхностей показывает, что шероховатости начинают играть роль при малых зна-
чениях коэффициента прилипания a_w . При значениях $a_w \geq 0,3$ для практических це-
лей могут использоваться результаты, полученные для испарения плоской поверх-
ности.

В заключение авторы выражают благодарность М. П. Коношенко за оказанную
помощь в работе по распараллеливанию программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов А. А.* Решение задачи о сильном испарении одноатомного газа методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 185—188.
2. *Абрамов А. А.* Сильное испарение газа с двумерной периодической поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 132—139.
3. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981. 319 с.
5. *Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е.* Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. I. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15. № 5. С. 1195—1208.
6. *Абрамов А. А.* О вычислении макропараметров в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 315—318.
7. *Макашев Н. К.* Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 3. С. 49—62.

Москва

Поступила в редакцию
31.III.1986

УДК 532.612

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОЙ СИЛЫ

СЯНОЧКИН Ю. В.

Представляет интерес рассмотреть стационарное движение несжимаемой жид-
кости, вызываемое приложенной к ее плоской поверхности тангенциальной силой,
направленной в противоположные стороны от линии (точки) растекания. Оно напо-
минает течение вблизи критической точки. В случае свободной поверхности жидко-
сти речь идет о капиллярной силе. Если жидкость граничит с телом и выполня-
ются условия прилипания, то имеется в виду увлечение жидкости при растяжении
(как, например, в некоторых задачах биомеханики или технологии) поверхности
тела в своей плоскости относительно системы закрепленных точек.

Рассмотрим вначале плоский случай и введем декартову систему координат,
совместив с поверхностью жидкости плоскость $y=0$, на которой в сечении $x=0$ на-
ходится линия растекания. Жидкость заполняет полупространство $y>0$. В зависимо-
сти от физических условий при $y=0$ могут задаваться касательное напряжение
или тангенциальная компонента скорости потока u . Будем предполагать, что ука-
занные величины суть нечетные функции x . В их разложениях вблизи линии рас-

текания по степеням x можно оставить линейные члены. Область применимости решения, однако, не обязательно ограничена малой окрестностью линии растекания. Это относится, в частности, к рассматриваемой далее задаче о термокапиллярной конвекции в жидкости при неоднородном нагреве ее свободной поверхности.

Плотность ρ и коэффициенты переноса жидкости считаются постоянными, вязкой диссипацией энергии для упрощения пренебрегается. Тем не менее тепловая и динамическая задачи оказываются, вообще говоря, связанными вследствие условия на границе жидкости [1]

$$\nu\rho\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{d\alpha}{dx} = \alpha' \frac{\partial T}{\partial x}$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения, $\alpha' = -d\alpha/dT > 0$, v — нормальная к поверхности компонента скорости, ν — кинематическая вязкость. При $y \rightarrow \infty$ температура жидкости остается невозмущенной $T \rightarrow T_\infty$ и $u \rightarrow 0$. Согласно кинематическому условию, $v=0$ на свободной поверхности. Скорость притока жидкости вдоль оси y из бесконечности и необходимый для этого перепад давления подлежат определению.

Решение уравнений переноса тепла в жидкости и Навье — Стокса естественно искать в виде

$$u = xf'(y), \quad v = -f(y), \quad p - p_0 = \rho F(y) \\ \theta = g(y) - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} h(y)$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_0 - T_\infty, \quad T_0 = T(0, 0)$$

Здесь l — некоторая длина, характеризующая распределение температуры. Переходя к безразмерным переменным, получим для определения искомым функций задачу

$$\xi = ay = \left(\frac{\alpha' \Delta T}{\nu^2 \rho l^2}\right)^{1/2} y, \quad f(y) = \left(\frac{\alpha' \Delta T \nu}{\rho l^2}\right)^{1/2} \varphi(\xi) \\ F(y) = \left(\frac{\alpha' \Delta T \nu}{\rho l^2}\right)^{3/2} \Phi(\xi), \quad g(y) = \vartheta(\xi), \quad h(y) = \psi(\xi)$$

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - (\varphi')^2 = 0, \quad \Phi' = -\varphi\Phi' - \Phi'' \quad (1)$$

$$P^{-1}\psi''' + \varphi\psi' - 2\varphi'\psi = 0, \quad \vartheta'' + P\varphi\vartheta' = (la)^{-2}\psi \quad (2)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 0, \quad \varphi''(0) + \psi(0) = 0$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \psi(\infty) = 0, \quad \vartheta(\infty) = 0 \quad (3)$$

В (2) входит число Прандтля P . На свободной поверхности могут ставиться разные условия тепловой задачи. Рассмотрим случай задания температуры границы

$$\psi(0) = 1, \quad \vartheta(0) = 1 \quad (4)$$

когда тепловая и динамическая задачи разделяются. Решение (1) с условиями (3), (4) дается формулами

$$\varphi = 1 - e^{-\xi}, \quad \Phi = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\xi}) \quad (5)$$

Оно оказывается решением типа пограничного слоя на интервале произвольной длины $\Delta x \sim l$, если выполняется неравенство

$$la = \left(\frac{\alpha' \Delta T l}{\rho \nu^2}\right)^{1/2} \gg 1$$

Как и при течении в окрестности критической точки, толщина вязкого пограничного слоя не зависит от координаты $\delta \sim a^{-1} \sim \nu^{1/2}$. Уравнение для ψ (2) сводится с учетом (5) к вырожденному гипергеометрическому уравнению и при произвольном P простого явного решения не имеет. Однако оно допускает решение в виде ряда экспонент

$$\psi = ce^{-P\xi} (1 + c_1 e^{-\xi} + \dots + c_n e^{-n\xi} + \dots) \quad (6) \\ c_n = (-1)^n \frac{P^n (P-2)(P-1)\dots(P+n-3)}{n!(P+1)(P+2)\dots(P+n)} \quad (n \geq 1)$$

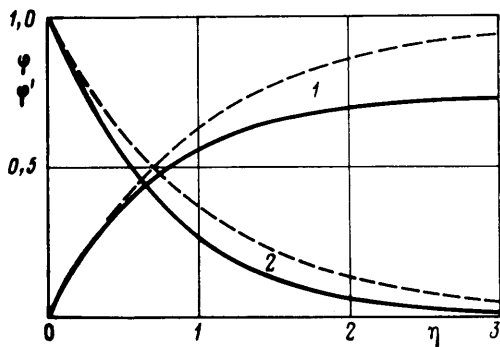
Константа c в (6) определяется из условия (4). При $P=1$ и 2 ряд (6) обрывается и имеем простые решения уравнений (2): $\psi = {}^2/3 e^{-\xi} (1 + 1/2 e^{-\xi})$, $\psi = e^{-2\xi}$ соответ-

ственно. Не представляет труда написать в квадратурах решение для Φ . Главный член его асимптотики при $\xi \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Phi \sim e^{-P\xi} [A - cP^{-1}(la)^{-2}\xi] \quad (7)$$

где A — некоторое число. Решения (6), (7) описывают тепловой пограничный слой толщиной $\delta_r \sim \delta/P$.

Выражения (5) представляют собой точное решение уравнений Навье — Стокса. Следует отметить, что формула для Φ встречалась ранее [2, 3] при решении уравнений пограничного слоя в задачах, не допускающих явного точного решения с использованием уравнений Навье — Стокса. В [2] изучался пограничный слой, развивающийся на эластичной пластине, поступающей из щели перпендикулярно стенке в покоящуюся жидкость. Полагалось, что скорость пластины пропорциональна расстоянию от щели. В [3] формулой (5) представлен один из членов решения задачи о пограничном слое, на внешней границе которого скорость потока постоянна, а на стенке линейно нарастает по длине. Есть определенная вероятность того, что решение



(5) известно и как формальное решение уравнений Навье — Стокса. Данное рассмотрение представляет тогда его возможную физическую интерпретацию.

Можно построить точное решение уравнений Навье — Стокса для пространственного осесимметричного течения, подобного (5). Плоскость $z=0$ цилиндрической системы координат совместим с границей жидкости, начало координат поместим в точку растекания. Для компонент скорости потока сохраним прежние обозначения $v_r = u$, $v_z = v$. Воспользуемся граничными условиями

$$u(r, 0) = \omega r, \quad v(r, 0) = 0, \quad u(r, \infty) = 0, \quad u(0, z) = 0$$

где постоянная ω связана с условиями тепловой задачи, если имеется в виду термокапиллярное движение. Нетрудно проверить, что для рассмотренной плоской задачи $\omega = (\alpha' \Delta T / \rho \nu^{1/2} l^2)^{1/2}$. Решение ищется в виде

$$u = rf'(z), \quad v = -2f(z), \quad p - p_0 = \rho \omega^2 F(z)$$

Переходя с помощью аффинного преобразования к безразмерным переменным, приходим вместо (1), (3) к следующей задаче:

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} z, \quad f(z) = \sqrt{\omega \nu} \varphi(\eta), \quad F(z) = \frac{\nu}{\omega} \Phi(\eta)$$

$$\varphi''' + 2\varphi\varphi'' - \varphi'^2 = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1, \quad \varphi'(\infty) = 0$$

$$\frac{1}{2} \Phi' = -2\varphi\varphi' - \varphi'', \quad \Phi(0) = 0 \quad (8)$$

Решение (8) может быть найдено в виде степенного ряда. Кроме того, (8) допускает представление решения рядом экспонент

$$\varphi = b - b_1 e^{-2b\eta} - \dots - b_n e^{-2nb\eta} - \dots \quad (9)$$

$$2n^2(n-1)bb_n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(2n-3k)b_{n-k}b_k = 0 \quad (n \geq 2)$$

В асимптотическом разложении для Φ , как и в (5), отсутствует главный член асимптотики φ

$$\Phi = 2(1 - b^2) - \frac{3}{2} b_1^2 e^{-4b\eta} + \dots$$

В выражения для коэффициентов степенного ряда входит произвольная константа, (9) содержит две произвольные постоянные. Их определяет сшивка указанных разложений: $b = \varphi(\infty) = 0,741$, $b_1 = 0,777$.

На фигуре сравниваются безразмерные скорости φ и φ' (кривые 1 и 2 соответственно) для осесимметричного (сплошные) и плоского (штриховые линии) течений.

В осесимметричном случае пограничный слой оказывается несколько тоньше, а скорость потенциального течения на бесконечности в $\sim 1,5$ раза выше. В соответствии с этим перепад давления в осесимметричном случае в ~ 2 раза больше, чем в плоском.

Автор благодарен Г. А. Любимову и С. А. Региреру за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. Crane L. J. Flow past a stretching plate // ZAMP, 1970. V. 21. № 4. P. 645–647.
3. Danberg J. E., Fansler K. S. A nonsimilar moving-wall boundary-layer problem // Quart. Appl. Math. 1976. V. 34. № 3. P. 305–309.

Москва

Поступила в редакцию
14.V.1986