**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1987**

УДК 532.5.032

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СВОЙСТВАХ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ГОЛУБКИН В. Н., СИЗЫХ Г. Б.

Получен интеграл уравнений плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости, выражающий сохранение функции Бернулли вдоль определенного семейства линий, которые при стремлении вязкости к нулю переходят в линии тока. Эти линии определяют также направление переноса завихренности вязкого потока.

Рассмотрим плоскопараллельное изотермическое движение вязкой несжимаемой жидкости в поле массовых сил, имеющих потенциал. Пусть t – время, xyz – декартова прямоугольная система координат с единичными ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ вдоль осей x, y, z соответственно, причем ось z перпендикулярна плоскости течения. Обозначим, как обычно, $\mathbf{V}$ – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, Π – потенциал массовых сил, ν – кинематический коэффициент вязкости. Уравнения Навье – Стокса запишем в виде [1]

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}=-\nabla H-\nu\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{V}=0,\quad \boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\mathbf{k}\omega \tag{2}$$

$$\nabla\equiv\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y},\qquad H=\frac{q^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi,\qquad q^2=\mathbf{V}\mathbf{V}$$

Нетрудно показать, что для рассматриваемого класса течений справедливо тождество

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{\omega}=-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a},\quad \mathbf{a}=\nabla\ln|\omega| \tag{3}$$

С учетом этого соотношения уравнение (1) преобразуется к следующему:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}=-\nabla H,\qquad \mathbf{U}=\mathbf{V}-\nu\mathbf{a} \tag{4}$$

Заметим, что из определения вектора $\mathbf{a}$ следует $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}=0$, поэтому $\mathrm{rot}\,\mathbf{U}=\mathrm{rot}\,\mathbf{V}=\boldsymbol{\omega}$. Однако векторное поле вектора $\mathbf{U}$ нельзя отождествить с каким-либо полем скорости течения несжимаемой жидкости, поскольку его дивергенция

$$\mathrm{div}\,\mathbf{U}=-\nu\nabla^2\ln|\omega|$$

в общем случае отлична от нуля.

После вычисления ротации от обеих частей уравнения (4) получим соотношение, связывающее кинематические характеристики течения вязкой жидкости – скорость и завихренность

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+\mathrm{rot}[\boldsymbol{\omega}\times U]=0$$

Вследствие того, что в плоском течении функции не зависят от координаты z, а вектор вихря параллелен оси z, это уравнение можно записать и в скалярном виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\mathrm{div}(\omega\mathbf{U})=0 \tag{5}$$

В случае невязкой несжимаемой жидкости отсюда следует известное уравнение Гельмгольца [1]

$$\frac{d\omega}{dt}\equiv\frac{\partial\omega}{dt}+\mathbf{V}\nabla\omega=0$$

Полученные выше уравнения позволяют установить ряд общих свойств рассматриваемых течений, полезных для практических приложений. Ниже они сформулированы в виде теорем.

Теорема 1. В стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости под действием массовых сил, имеющих потенциал, функция Бернулли H сохраняется постоянной вдоль векторных линий вектора $\mathbf{U}$. Действительно, в стационарном случае, умножая обе части уравнения (4) скалярно на $\mathbf{U}$, получаем

$$\mathbf{U}\nabla H=0, \qquad H=\frac{q^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\Pi=\text{const} \tag{6}$$

вдоль векторных линий вектора $\mathbf{U}$, что и требовалось.

Таким образом, найден первый интеграл системы уравнений, описывающий течение вязкой жидкости. Этот результат представляет собой обобщение теоремы Бернулли [1], справедливой для идеальной среды, на течение вязкой жидкости. Полученный интеграл может использоваться для получения аналитических решений системы уравнений (1)–(2). Отметим еще следующее обстоятельство. Проверка постоянства интеграла Бернулли вдоль линий тока является одним из основных средств контроля точности численных расчетов течений идеальной жидкости и газа на основе уравнений Эйлера. Совершенно аналогично установленный выше факт сохранения функции Бернулли вдоль векторных линий вектора $\mathbf{U}$ может служить для проверки точности численных расчетов плоских течений вязкой несжимаемой жидкости на основе полных уравнений Навье – Стокса, к которым в настоящее время проявляется возрастающий интерес (например, [2, 3]). Подобные расчеты часто проводятся путем численного решения системы дифференциальных уравнений для функции тока и завихренности, а затем определения поля давления из решения уравнения Пуассона (например, [2]). Имея в распоряжении интеграл (6), можно использовать его для расчета давления по известному полю скорости. Этот путь существенно проще, если распределение функции H по векторным линиям $\mathbf{U}$ известно, в частности, когда они начинаются в невозмущенном потоке вдали от обтекаемого тела.

Теорема 2. Вдоль векторных линий вектора $\mathbf{U}$ происходит перенос завихренности плоского стационарного течения вязкой жидкости.

В самом деле, для стационарных течений уравнение (5) аналогично уравнению неразрывности для газа с плотностью ω и полем скорости $\mathbf{U}$. Применяя теорему Остроградского – Гаусса к элементарной векторной трубке вектора $\mathbf{U}$ малой толщины σ, получим, что вдоль нее сохраняется «поток» завихренности

$$\omega U\sigma=\text{const}$$

Для сравнения укажем, что в плоском течении идеальной жидкости завихренность переносится вдоль линий тока (это как частный случай следует и из теоремы 2). Поэтому на основе теорем 1, 2 можно сформулировать результат общего характера, справедливый для течений как идеальной, так и вязкой жидкости: в стационарных плоских течениях несжимаемой жидкости при наличии потенциала массовых сил функция Бернулли сохраняется постоянной вдоль линий переноса завихренности.

Наличие вязкости обусловливает отклонение линий переноса завихренности от линий тока. Рассмотрим для наглядности конкретные примеры течений при малых и больших числах Рейнольдса Re.

Первый пример – задача о медленном обтекании вязкой жидкостью кругового цилиндра, когда $\mathrm{Re}\ll 1$, а массовые силы отсутствуют. Решение Стокса в полярных координатах r, θ (например, [4]) на конечных расстояниях от цилиндра дает в пределе при $\mathrm{Re}\to 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{U}=-\nu\nabla \ln|\omega|=\frac{\nu}{r}(\mathbf{e}_r-\mathbf{e}_\theta \operatorname{ctg}\theta)\\ p=p_\infty-2\nu\rho q_\infty\frac{\cos\theta}{r}, \qquad H=\frac{p}{\rho}\end{gathered} \tag{7}$$

Векторные линии вектора $\mathbf{U}$, определяемые из уравнения $dr=-r\operatorname{tg}\theta d\theta$, имеют вид окружностей с центрами на лучах $\theta=0$, π и касающихся лучей $\theta=\pi/2$, $3\pi/2$

$$r=\text{const}\cos\theta \tag{8}$$

Этим и объясняется тот факт, что завихренность, образовавшаяся на поверхности тела, переносится в большей степени поперек потока, чем вдоль тела [4].

Сравнение (8) с выражением (7) для H показывает, что в соответствии с теоремой 1 эта функция сохраняется постоянной вдоль векторных линий вектора $\mathbf{U}$, которые в пределе при $\mathrm{Re}\to 0$ совпадают таким образом с линиями постоянного давления (изобарами).

Второй пример относится к случаю $\mathrm{Re} \gg 1$ – задача о ламинарном пограничном слое на плоской пластине, параллельной набегающему потоку. Если x, y и u, v – координаты и компоненты вектора скорости вдоль и по нормали к пластине соответственно, то величинами порядка единицы в пограничном слое будут x, $Y = y\,\mathrm{Re}^{1/2}$, u, $V = v\,\mathrm{Re}^{1/2}$. Тогда выражение для вектора $\mathbf{U}$ с точностью до членов порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$ включительно

$$\mathbf{U} = u\mathbf{i} + \mathrm{Re}^{-1/2}\left(V - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right)\mathbf{j}$$

указывает на отличие его векторных линий от линий тока в масштабах пограничного слоя.

В заключение авторы благодарят В. В. Сычева и В. Я. Нейланда за обсуждение результатов и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
2. *Fornberg B.* A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. Pt 4. P. 819–855.
3. *Fornberg B.* Steday viscous flow past a circular cylinder up to Reynolds number 600 // J. Comput. Phys. 1985. V. 61. № 2. P. 297–320.
4. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.

Москва

Поступила в редакцию 15.X.1986

УДК 532.525.2:533.6.011

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУЙ ЖИДКОСТИ СО ВСТРЕЧНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

КОВАЛЬ М. А., ШВЕЦ А. И.

Рассматривается структура взаимодействия струй воды, истекающих из насадков навстречу дозвуковому и сверхзвуковому потокам воздуха. Исследования взаимодействия струй со встречным потоком проводились в аэродинамической трубе Института механики МГУ с размером рабочей части $0{,}6\times0{,}6$ м^2 и на специальном струйном стенде. Числа Маха M набегающего потока изменялись от 0,3 до 3, а числа Рейнольдса Re, вычисленные по параметрам набегающего потока и отнесенные к размеру 1 м, были равны $1\cdot10^6 - 3\cdot10^7$.

В качестве насадков использовались: цилиндрические трубки-сопла с толщиной стенки на выходе от 0,2 до 0,5 мм, торец диаметром $D_T = 200$ мм, коническое затупление с углом раскрытия 120° и диаметром основания 30 мм. Диаметр сопл на срезе струи изменялся дискретно: $d = 0{,}34$; 0,64; 1,48; 2,8; 3; 4; 5 мм.

Истечению струи жидкости из сопла может сопутствовать кавитация. Для исключения кавитации сопла имели плавный вход и протяженный цилиндрический участок длиной от 80 до 150 диаметров сопла.

В процессе экспериментов проводилось фотографирование картины течения с экспозицией $10^{-2} - 10^{-4}$ с, измерялись давление на сопле в отрывной области струи жидкости, а также исходные параметры набегающего потока и истекающей жидкости. Осредненная скорость истечения струи определялась по расходу жидкости, величина которого измерялась с помощью мерных шайб по перепаду давления на них. Относительная среднеквадратичная погрешность измерения скорости жидкости составляла $\pm0{,}02$.

Физическую структуру взаимодействия струи жидкости (воды) со сверхзвуковым встречным потоком, зафиксированную теневыми фотографиями, можно представить в виде четырех схем (режимов) взаимодействия (фиг. 1). При умеренных скоростях истечения жидкости из насадка *1* струя имеет протяженный, почти цилиндрический участок *4*, а затем струя резко расширяется в виде сферо- или грибообразной капли *6* (фиг. 1, *а*, *б*). Эта капля дробится в периферийной области и уносится в виде газожидкостной смеси *5*. Перед струей в набегающем сверхзвуковом потоке образуется ударная волна *7*. В окрестности цилиндрического участка имеется отрывная область течения *3*. В отрывной области давление измерялось с помощью приемника давления *2*, встроенного в сопловой насадок *1*.

Структура течения при взаимодействии струи со встречным потоком зависит от формы насадка и относительного диаметра струи, однако наиболее сильное влияние на нее оказывает соотношение между глубиной проникания струи и диаметром насадка. Если глубина проникания струи существенно больше внешнего диаметра насадка, то для удобообтекаемых насадков взаимодействие струи жидкости со