МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1987

УДК 532.51

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ

ВЛАДИМИРОВ В. А.

Получены интегралы движения, сохраняющиеся в силу линеаризованных уравнений плоских движений идеальной несжимаемой стратифицированной по плотности жидкости и являющиеся квадратичными формами полей возмущений. Обсуждаются свойства этих интегралов и связанные с ними вариационные принципы. Делается ряд выводов, касающихся задачи устойчивости стратифицированных течений.

1. Интегралы движения. Рассматриваются плоские движения идеальной несжимаемой неоднородной по плотности ρ жидкости, находящейся в потенциальном поле массовых сил $\mathbf{g}=-\nabla\Phi$. Движения определяются решениями задачи

$$\rho D\mathbf{u}=-\nabla p-\rho\nabla\Phi,\quad D\rho=0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\qquad D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla$$

$$\mathbf{un}=0,\quad (x,\ y)\in\partial\tau \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}$ и p — поля скорости и давления. В плоскости декартовых координат x, y область течения τ может быть как ограниченной, так и неограниченной, $\partial\tau$ — граница с вектором нормали $\mathbf{n}$. Для решений (1.1), (1.2) имеет место интеграл энергии

$$E=\int\varepsilon\, d\tau=\text{const},\qquad d\tau\equiv dx\, dy \tag{1.3}$$

$$\varepsilon\equiv\rho(e+\Phi),\ e\equiv{}^1\!/_2(u^2+v^2),\ \mathbf{u}=(u,\ v)$$

С помощью следующих обозначений из первого уравнения (1.1) исключим давление:

$$\mu\equiv\rho u,\ \nu\equiv\rho v,\ \sigma\equiv\nu_x-\mu_y,\ \omega\equiv v_x-u_y,\ \varphi\equiv\Phi-e \tag{1.4}$$

$$D\sigma=\rho_y\varphi_x-\rho_x\varphi_y \tag{1.5}$$

Индексами обозначаются частные производные. Стационарные решения

$$U(\mathbf{x}),\ V(\mathbf{x}),\ P(\mathbf{x}),\ \rho_0(\mathbf{x}),\ \sigma_0(\mathbf{x});\ \ \mathbf{x}\equiv(x,\ y) \tag{1.6}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\sigma_0V+\rho_{0x}\varphi_0=H_x,\ \ -\sigma_0U+\rho_{0y}\varphi_0=H_y\\ H\equiv P+\rho_0(e_0+\Phi),\ e_0\equiv{}^1\!/_2(U^2+V^2),\ \varphi_0\equiv\Phi-e_0\end{gathered} \tag{1.7}$$

и граничным условиям (1.2). После введения функции тока $\Psi(\mathbf{x})$, такой, что $U=-\Psi_y$, $V=\Psi_x$, из (1.7), (1.1) следует $\rho_0=\rho_0(\Psi)$, $H=H(\Psi)$.

Линеаризация уравнений (1.1) на решении (1.6) дает

$$\rho_0\left(D_0u_i'+u_\alpha'\frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}\right)+\rho' U_\alpha\frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}=-\frac{\partial p'}{\partial x_i}-\rho'\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha}=0,\qquad D_0\rho'+u_\alpha'\frac{\partial \rho_0}{\partial x_\alpha}=0$$

$$D_0\equiv\frac{\partial}{\partial t}+U_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\qquad (u_1',u_2')\equiv(u',v'),\qquad (U_1,U_2)\equiv(U,V)$$

где U_i и u_i' — компоненты поля скорости основного течения и его возмущений, p' и ρ' — поля возмущений давления и плотности, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 2. Использование в одинаковых смыслах обозначений с индексами и без индексов производится для укорочения записи формул и не должно вызывать путаницы.

Можно проверить, что в силу (1.8), (1.2) справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}D_0M=\beta_y\gamma_x-\beta_x\gamma_y+U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\varkappa\beta-\rho_0\frac{q^2}{2}\right)+ \tag{1.9}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\rho_0u_n+\rho U_n)(U_ku_n-U_nu_k)-u_kp\right]$$

$$M=\rho_0q^2+\frac{2\rho\sigma}{\rho_0'}+(\varkappa+\mu)\rho^2,\qquad q^2=u^2+v^2$$

$$\beta=\frac{\rho^2}{2},\qquad \gamma=\frac{\varphi_0}{\rho_0'},\qquad \varkappa=\frac{\varphi\rho_0''}{(\rho_0')^2},\qquad \mu=-\frac{H''}{(\rho_0')^2}$$

Здесь и ниже штрихи у полей возмущений опущены, а штрих у ρ_0 и H обозначает производную по Ψ. Соотношение (1.9) является дифференциальной (дивергентной) формой закона сохранения, которому соответствует интегральное соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\tau M\,d\tau=\oint\limits_{\partial\tau}\gamma\,d\beta=-\oint\limits_{\partial\tau}\beta\,d\gamma \tag{1.10}$$

Из (1.10) видно, что условиями, достаточными для сохранения интеграла от M, являются $\varphi_0=\mathrm{const}$ или $\rho=\mathrm{const}$ на $\partial\tau$. Оба этих условия выделяют практически интересные классы движений. Требование $\rho=\mathrm{const}$ (или $\rho=0$) на $\partial\tau$ динамически непротиворечиво (т. е. не нарушается со временем) поскольку $\partial\tau$ есть линия тока, на которой $\rho_0=\mathrm{const}$.

К сожалению, отсутствие в квадратичной форме полей возмущений M слагаемого пропорционального квадрату вихря в общем случае исключает возможность ее знакоопределенности. Поэтому, пользуясь (1.10), достаточных условий устойчивости сформулировать не удается. Особым является случай гидростатического равновесия $\mathbf{U}=0$. При этом

$$M=\rho_0(u^2+v^2)-\frac{|\nabla\Phi|^2}{\nabla\rho_0\nabla\Phi}$$

и положительной определенности отвечает нарастание плотности ρ_0 вдоль поля тяжести. Соответствующие утверждения о нелинейной устойчивости даны в [1, 2].

Наиболее часто изучается частный случай (1.6), плоскопараллельные течения, в которых $U=U(y)$, $V=0$, $\rho_0=\rho_0(y)$, $\Phi=\Phi(y)$, область течения τ есть полоса $0<y<H$. Дивергентная форма (1.9) преобразуется к форме (1.11), из галилеевой инвариантности которой вытекает соотношение (1.12)

$$D_0M=(UA-2pu)_x+(UB-2pv)_y \tag{1.11}$$

$$M=\rho_0(u^2+v^2)-\frac{\varphi_{0y}\rho^2}{\rho_{0y}}+UI$$

$$I\equiv\frac{\sigma_{0y}\rho^2}{\rho_{0y}^{\,2}}-\frac{2\rho\sigma}{\rho_{0y}},\qquad A\equiv\rho_0(v^2-u^2)+\frac{\varphi_{0y}\rho^2}{\rho_{0y}}$$

$$B\equiv-2v(\rho_0u+\rho U)$$

$$D_0I=A_x+B_y \tag{1.12}$$

Формам (1.11), (1.12) отвечает независимость от времени двух интегралов

$$\int M\,d\tau=\text{const},\qquad \int I\,d\tau=\text{const} \tag{1.13}$$

При этом рассматриваются только такие классы движений, в которых либо существуют интегралы по всей полосе, либо имеется периодичность полей возмущений по x и интегралы берутся по длине периода. Случаев знакоопределенности интегралов (1.13) также выделить не удается (за исключением $U\equiv0$).

2. Вариационный принцип. Законы сохранения (1.10), (1.13) естественно возникают как вторые вариации функционалов в вариационных принципах. Здесь дана одна из возможных формулировок такого принципа.

Пусть $a(x,\ t)$ — скалярная функция, удовлетворяющая уравнению $Da=\varphi$. При помощи полей σ (1.4) и ρ вводится функция λ, сохраняющая свои значения в любой жидкой частице

$$D\lambda=0,\quad \lambda\equiv\sigma-\rho_ya_x+\rho_xa_y \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) эквивалентно (1.5). Стационарные поля λ и a, соответствующие течению (1.6), обозначим

$$a=A(\mathbf{x}),\ \lambda=\Lambda(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

С помощью (1.3) и произвольной функции $F(\lambda)$ составляется сохраняющийся в силу (1.1), (1.2), (2.1) функционал

$$R\equiv\int[\rho(e+\Phi)+F(\lambda)]d\tau$$

Для его первой вариации, вычисленной на решении (1.6), (2.2), справедливо представление

$$\delta R=\int(\delta\varepsilon+F_\Lambda\delta\lambda)d\tau=\int\rho_0\frac{\partial\delta\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\Psi-F_\Lambda)d\tau+\int_{\partial\tau}F_\Lambda\frac{\delta\varepsilon}{Q}dl$$

$$\delta\varepsilon\equiv\rho_0U_i\delta u_i+\delta\rho(\Phi+e_0),\ Q^2\equiv U^2+V^2$$

$$\delta\lambda\equiv\delta\sigma-\rho_{0y}\delta a_x+\rho_{0x}\delta a_y+A_y\delta\rho_x-A_x\delta\rho_y$$

$$\delta\sigma\equiv(\rho_0\delta v)_x-(\rho_0\delta u)_y+(V\delta\rho)_x-(U\delta\rho)_y$$

где Ψ и $\delta\psi$ — функция тока основного движения (1.6) и ее вариации; dl — дифференциал длины контура границы; использованы индексные обозначения из (1.8). Независимо варьируемые поля — u, v, ρ и a. Выбор функции F таков, что $F_\Lambda=\Psi$ сводит δR к интегралу по $\partial\tau$

$$\delta R=\int_{\partial\tau}\Psi\frac{\delta\varepsilon}{Q}dl$$

Если граница $\partial\tau$ состоит из одной компоненты, то, положив на ней $\Psi=0$, получим $\delta R=0$. При наличии в $\partial\tau$ нескольких компонент с различными значениями Ψ только на одной из них можно принять $\Psi=0$, на остальных полагается $\delta\rho=0$ (или $\delta\rho=\text{const}$). После этого в силу теоремы Кельвина о циркуляции δR становится не зависящей от времени и может быть выбрана равной нулю. Таким образом, в общем случае многокомпонентной границы течение (1.6), (2.2) является стационарной точкой функционала R на классе возмущений с $\delta\rho=0$ на $\partial\tau$.

Вычисления второй вариации дают

$$\delta^2 R=\int\left[\delta^2\varepsilon+\frac{1}{2}\Psi_\Lambda(\delta\lambda)^2+\Psi\delta^2\lambda\right]d\tau \tag{2.3}$$

$$\delta^2\varepsilon\equiv\rho_0[(\delta u)^2+(\delta v)^2]+2\delta\rho(U\delta u+V\delta v)$$

$$\delta^2\lambda\equiv(\delta\rho\delta v)_x-(\delta\rho\delta u)_y-(\delta\rho)_y(\delta a)_x+(\delta\rho)_x(\delta a)_y$$

$$2\delta^2 R=\int\left\{\rho_0[(\delta u)^2+(\delta v)^2]+\frac{2}{\rho_0'}\delta\rho(\delta\sigma-\delta\lambda)+\right.$$

$$\left.+\varphi\rho_0''\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0'}\right)^2+\Psi_\Lambda(\delta\lambda)^2\right\}d\tau,\qquad \rho_0'\equiv\frac{d\rho_0}{d\Psi}\neq 0$$

Здесь опущен поверхностный интеграл, обращающийся в нуль при $\delta\rho=0$ на $\partial\tau$. Случаев знакоопределенности квадратичных форм (2.3) выделить не удается (за исключением состояния покоя), поэтому стационарная точка (1.6), (2.2) в общем случае не является экстремумом.

Если в (2.3) опустить символы δ и рассматривать u, v, ρ, σ, λ, a как возмущения полей (1.6), (2.2), удовлетворяющие линеаризованным уравнениям (1.8), (2.1), то (2.3) сохраняются в силу этих уравнений и принадлежат к тому же типу, что и (1.10), (1.13). Для сведения (2.3) к форме (1.10) достаточно для возмущений принять

$$\frac{\lambda}{\Lambda'}=\frac{\rho}{\rho_0'},\qquad \Lambda\equiv\frac{d\Lambda}{d\Psi} \tag{2.4}$$

и использовать вытекающие из (2.1), (1.7) соотношение $H'=\sigma_0+\varphi\rho_0'=\Lambda$. Условие (2.4) динамически непротиворечиво, из его выполнения в начальный момент времени вытекает его справедливость в любой последующий момент. Роль (2.4) состоит в исключении из (2.3) дополнительного скалярного поля λ и тем самым в уравнивании числа независимых переменных в (2.3) и (1.10). Для исходной вариационной задачи равенство (2.4) означает дополнительную связь $\lambda=\lambda(\rho)$.

Другой возможный путь формулировки вариационного принципа для плоских движений неоднородной жидкости состоит в использовании подходов [3, 4] для однородной жидкости и аналогии эффектов плотностной стратификации и вращения в форме [1, 5]. При этом интегралы (1.10), (1.13) возникают из второй вариации энергии на множестве функций сравнения, обобщающем условие «равнозавихренности» [3].

В [6] предложен вариационный принцип для течений стратифицированной жидкости, использующий энергию и лагранжев инвариант $(\omega\nabla)\rho$ (где ω и ρ – поля завихренности и плотности). Этот подход неприменим к плоским течениям стратифицированной жидкости, поскольку для них $(\omega\nabla)\rho\equiv 0$. Поэтому из приведенных в [6] выражений для второй вариации интегралы (1.10), (1.13) не могут быть получены.

Даже в простом случае плоскопараллельного течения (1.11), (1.12) знакоопределенность квадратичной формы M имеется только на состояниях покоя $U\equiv 0$. Наложение сколь угодно слабого сдвига скорости $U_y\neq 0$ «дестабилизирует» течение в смысле нарушения знакоопределенности M. Особо следует отметить, что в коэффициентах формы M число Ричардсона $\mathrm{Ri}\equiv\rho_{0y}g/(U_y)^2$ не появляется. Этот факт удивителен, поскольку обычные способы демонстрации физического смысла числа Ричардсона как критерия устойчивости основываются на энергетических соображениях.

Тем не менее в [7] предпринята попытка получения из результатов [6] числа Ричардсона как меры устойчивости плоскопараллельного течения. Для этого вводится слабая неоднородность профиля U по третьей координате, после чего становится $(\omega\nabla)\rho\neq 0$. Далее из выражения для второй вариации [6] на основе физических соображений выбрасываются некоторые члены. Эти соображения представляются неверными.

При переходе к возмущениям в виде нормальных волн, в которых поля возмущений пропорциональны $e^{i(kx-vt)}$, из интегралов (1.13) получаются известные спектральные оценки Синга ([8, с. 253]).

По терминологии [9, 10] интегралы (1.13) могут быть охарактеризованы как псевдоэнергия и псевдоимпульс. Различие состоит в том, что речь идет не о случае волн, близких к гармоническим, а об интегралах для возмущений из более широкого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. Н., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
2. *Владимиров В. А.* Вариационный принцип и априорная оценка устойчивости для состояний покоя непрерывно стратифицированной жидкости // В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. Вып. 72. С. 12–18.
3. *Арнольд В. И.* Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 846–851.
4. *Fjortoft R.* Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex // Geophys. Publ. 1950. V. 17. № 6. 52 p.
5. *Владимиров В. А.* О сходстве эффектов плотностей стратификации и вращения // ПМТФ. 1985. № 3. С. 58–68.
6. *Дикий Л. А.* К нелинейной теории гидродинамической устойчивости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 852–855.
7. *Abarbanel H. D. I., Holm D. D., Mardsen J. E., Ratiu T.* Richardson number criterion for the nonlinear stability of three-dimensional startified flow // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. № 26. P. 2352–2355.
8. *Yih C. S.* Stratified Flows. N. Y.: Acad. Press, 1980. 417 P.
9. *Мак-Интайр М.* Миф о волновом импульсе // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 454.
10. *Grimshaw R.* Wave action and wave-mean flow interaction, with application to stratified shear flows // Ann. Rev. Fluid Mechanics. Palo Alto. Ca: Annu. Rev. Inc., 1984. V. 16. P. 11–44.

Новосибирск

Поступила в редакцию
7.V.1986