

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
№ 3 · 1987

УДК 533.6.011.5:532.526.2

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГИПЕРЗВУКОВОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ
ОКОЛО ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ОБТЕКАНИИ**

ЕРЕМЕЙЦЕВ И. Г., ПИЛЮГИН Н. Н., ЮНИЦКИЙ С. А.

При обтекании затупленных тел неравномерными сверхзвуковыми потоками газа представляет интерес изучение влияния параметров неравномерности на структуру ударного слоя, на распределения газодинамических величин, на коэффициенты трения и теплообмена. Неравномерное обтекание тел потоком газа от сверхзвукового источника при разных предположениях о величине числа Рейнольдса рассмотрено в ряде работ [1–5]. Асимптотическое решение невязкой задачи получено в [1, 2], аналитические формулы для расчета сопротивления трения и теплового потока, обобщающие известные результаты Лиза, предложены в [2, 3]. На основе численных решений уравнений Эйлера, уравнений пограничного слоя и уравнений Навье – Стокса в [5] построены универсальные зависимости для коэффициентов трения и теплообмена, применимые в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса при различной неравномерности набегающего потока.

Более сложным и менее изученным примером неравномерного сверхзвукового обтекания является обтекание тела потоком типа следа [6–12]. В этом случае, в зависимости от соотношения между определяющими параметрами задачи, возможно существование двух типов течения: безотрывного и отрывного, при котором на лобовой поверхности тела образуется зона возвратно-циркуляционного течения [7]. Моделирование вязкого отрывного течения на основе численного решения уравнений Навье – Стокса проводилось в [8, 9], невязкого – на основе решения уравнений Эйлера – в [9]. Было показано, в частности, что применение уравнений Эйлера при наличии в ударном слое возвратно-циркуляционной зоны может дать только качественные результаты, а не количественные. Задача безотрывного обтекания в приближении невязкого ударного слой – пограничный слой решена в [10], аналитическое решение при малых числах Рейнольдса получено в [12].

В данной работе в рамках теории тонкого вязкого ударного слоя [13–15] проводится численное исследование безотрывного обтекания тела вязким газом. Уравнения гиперзвукового вязкого ударного слоя с обобщенными условиями Рэнкина – Гюгонио на ударной волне решены конечно-разностным методом [16] в широком диапазоне чисел Рейнольдса, значений температурного фактора и параметров неравномерности. Приводятся результаты расчетов, характеризующие влияние неравномерности набегающего потока на профили скорости и температуры поперек ударного слоя, на коэффициенты трения и теплообмена, отход ударной волны. Исследуются условия безотрывного обтекания, получены критические значения параметра неравномерности a_k [10], при которых возникают возвратно-циркуляционные зоны на лобовой поверхности тела в зависимости от числа Рейнольдса. Проведено сопоставление расчетов с асимптотическими решениями [10, 12].

1. Рассмотрим осесимметричное обтекание гладкого затупленного тела гиперзвуковым неравномерным потоком вязкого газа. Пусть x, y – система ортогональных криволинейных координат, нормально связанных с поверхностью тела: x определяет расстояние вдоль образующей тела, измеренное от критической точки, y – расстояние по нормали к поверхности тела. Будем считать, что распределение газодинамических функций в набегающем потоке имеет вид [7, 10]

$$V_1(z) = 1 - ae^{-bz^2}, \rho_1(z) = B[1 + C(1 - dV_1^2)]^{-1} \quad (1.1)$$
$$p_1(z) = \text{const}, B = 1 + C(1 - d), d = (1 - a)^{-2}$$

Здесь $V_\infty V_1$, $\rho_\infty \rho_1$, $\rho_\infty V_\infty^2 p_1$ – соответственно скорость, плотность и дав-

ление в набегающем потоке; $R_0 z$ – расстояние до оси симметрии потока; R_0 – характерный линейный размер обтекаемого тела; a, b, C – параметры, характеризующие неравномерность набегающего потока, V_∞, ρ_∞ – скорость и плотность газа при $z \rightarrow \infty$.

Из формул (1.1) следует, что на оси симметрии при $z=0$ $V_1(0)=1-a$, $\rho_1(0)=B$, а при $z \rightarrow \infty$ $V_1(\infty)=\rho_1(\infty)=1$. Параметр a определяет дефект скорости V_1 на оси симметрии течения и характеризует степень неравномерности набегающего на тело потока. Случай $a=0$ соответствует обтеканию затупленного тела равномерным потоком газа. Оценки, проведенные в [7], показывают, что в области течения, где выполняется условие $p_1(z)=\text{const}$, величина параметра a много меньше единицы.

Уравнения ламинарного гиперзвукового вязкого ударного слоя в безразмерных переменных в системе координат x, y имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\rho r_w u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho r_w v) = 0 \\ & \rho D u = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \rho \kappa u^2 = \frac{\partial p}{\partial y} \\ & \rho D T = 2\varepsilon u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\mu}{K} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & p = \rho T, \quad \mu = T^\circ, \quad D = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \\ & K = \varepsilon \text{Re}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma-1}{2\gamma}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \\ & \sigma = \frac{\mu_0 \mu C_p}{\lambda}, \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad T_0 = \frac{V_\infty^2}{2C_p} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $V_\infty u, \varepsilon V_\infty v$ – компоненты вектора скорости, соответствующие осям x, y ; $\rho_\infty V_\infty^2 p, \varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho, T_0 T, \mu_0 \mu, \lambda$ – соответственно давление, плотность, температура, коэффициенты вязкости и теплопроводности; C_p, C_v – удельные теплоемкости газа; κ – продольная кривизна поверхности тела. Все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру R_0 , нормальная координата – к εR_0 ; в качестве R_0 выбирался радиус кривизны затупления тела при $x=0$. Модифицированные соотношения Рэнкина – Гюгонио на ударной волне в случае неравномерного обтекания могут быть получены обычным образом [13, 14] путем упрощения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для структуры скачка уплотнения. В отличие от случая равномерного обтекания ($a=0$) при неравномерном обтекании ($a \neq 0$) эти уравнения содержат не равные нулю градиенты скорости и температуры набегающего потока. При упрощении уравнений скачка с учетом порядков величин в собственно ударном слое оказывается, что члены, содержащие градиенты V_1, T_1 , имеют порядок $[1/(\gamma-1) M_\infty^2]^\alpha$ и, следовательно, в гиперзвуковом приближении могут быть опущены. Окончательно модифицированные соотношения Рэнкина – Гюгонио при неравномерном обтекании можно записать в виде

$$\begin{aligned} y = y_s(x): \quad & \rho \left(v - u \frac{\partial y_s}{\partial x} \right) = \rho_1 V_1 v_\infty, \quad p = \rho_1 V_1^2 v_\infty^2 \\ & \rho_1 V_1 v_\infty (u - V_1 u_\infty) = \frac{\mu}{K} \frac{\partial u}{\partial y} \\ & \rho_1 V_1 v_\infty (T + u^2 - V_1^2) = \frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{2\mu}{K} u \frac{\partial u}{\partial y} \\ & u_\infty = \cos \alpha, \quad v_\infty = -\sin \alpha \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь α — угол между касательной к поверхности тела и осью симметрии $z=0$.

На непроницаемой поверхности тела будем задавать условие прилипания и температуру стенки

$$y=0: u=v=0, T=T_w(x) \quad (1.4)$$

Модель вязкого ударного слоя с модифицированными условиями Рэнкина — Гюгонио (1.2)–(1.4) позволяет изучать безотрывное течение на лобовой поверхности тела в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса от умеренно малых до больших, при которых становится справедливым приближение пограничного слоя. Обоснование данного подхода для описания гиперзвукового обтекания гладких затупленных тел вязким газом дано в [13, 14]. Уравнения невязкого ударного слоя, записанные в гиперзвуковом приближении, получаются из (1.2) предельным переходом $K \rightarrow \infty$. Асимптотическое решение задачи об обтекании тела неравномерным невязким потоком газа получено в [10]. Отметим, что при $a=0$ система (1.2)–(1.4) описывает течение в гиперзвуковом вязком ударном слое при равномерном обтекании.

Численное решение задачи получено методом [15], основанным на применении конечно-разностной схемы [16]. Основные черты метода кратко изложены ниже.

При численном решении системы (1.2)–(1.4) записывалась в переменных типа Дородницына

$$\begin{aligned} \xi = x, \quad \eta &= \frac{1}{\Delta} \int_0^y \rho dy, \quad \Delta = \int_0^{ys} \rho dy \\ u = u^\circ(\xi) \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad T = T^\circ(\xi) \theta, \quad \rho r_w v &= - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = r_w \Delta u^\circ f \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь ψ — функция тока. Функции u° , T° полагались равными u_∞ и v_∞^2 соответственно. Такой выбор удобен, так как при больших числах Рейнольдса ($K \rightarrow \infty$) из гравитационных условий при $y=ys$ следует $u \rightarrow u_\infty$, $T \rightarrow v_\infty^2$ ($a=0$). Кроме того, при $u^\circ(\xi) = u_\infty$ разрешаются особенности, возникающие в уравнении импульсов в критической точке $\xi=0$.

Для определения градиента давления $p_2 = (1/u_\infty)(\partial p/\partial \xi)$, входящего во второе уравнение системы (1.2), использовалось уравнение импульсов (третье в системе (1.2)) в проекции на нормаль, которое дифференцировалось по переменной ξ . В переменных Дородницына (1.5) для p и p_2 получаются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \kappa \Delta u_\infty^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2, \quad \frac{\partial p_2}{\partial \eta} = \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\kappa \Delta u_\infty^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] \quad (1.6)$$

которые интегрировались по квадратурной формуле Симпсона от ударной волны до тела. Границное условие для p_2 получается дифференцированием условия для давления p на ударной волне. Уравнения для приведенной функции тока f и температуры θ интегрировались с помощью неявной конечно-разностной схемы [16], имеющей точность аппроксимации $O(\Delta \eta^4 + \Delta \xi^2)$. Уравнения решались поочередно методом прогонки с итерациями. Линеаризация разностных уравнений проводилась по значениям функций, известным из предыдущей итерации; начальное приближение на критической линии выбиралось линейным, на последующих лучах начальное приближение задавалось с предыдущего слоя.

В целом последовательность численного интегрирования системы (1.2)–(1.4) на каждой итерации была следующей: сначала определялись профили p и p_2 из (1.6), плотность ρ определялась из уравнения состояния, вязкость μ — из закона вязкости (в данном случае $\mu = T^\circ$); затем находились функции f и θ и подсчитывалось новое значение отхода в переменных Дородницына Δ . Для нахождения Δ использовалось первое граничное условие в системе (1.3). Итерации продолжались до тех пор, пока максимальное отличие всех профилей и параметра Δ на данной итерации от предыдущей не становилось меньше 10^{-4} . Для достижения указанной точности на критической линии требовалось 15–30 итераций, по обводу тела — 2–5 итераций. Параметры конечно-разностной сетки в расчетах выбирались следующими: $N=41$, $\Delta \xi=2,5^\circ$ (N — число узлов сетки в направлении η).

Численное решение получено в следующем диапазоне определяющих параметров задачи: $1 \leq Re \leq 10^6$; $1,1 \leq \gamma \leq 1,4$; $0,1 \leq T_w \leq 0,3$; $0,5 \leq \omega \leq 1$ при $\sigma=0,7$. Безразмерные

параметры a , b , C , характеризующие неравномерность профилей скорости и температуры набегающего потока, по оценкам лежат в диапазоне $0 \leq a \leq a_k$, $0 < b < \infty$, $3 \leq C \leq 5$. При значениях параметра a , больших a_k , на лобовой поверхности тела образуются возвратно-циркуляционные зоны, расчет которых необходимо проводить в рамках полных уравнений Навье – Стокса [8, 9].

2. Некоторые результаты расчетов обтекания сферы неравномерным гиперзвуковым потоком вязкого газа представлены ниже для $T_w=0,15$; $\gamma=1,4$; $\omega=0,5$. На фиг. 1 приведены характерные профили скорости $u^* = u/u_\infty$ и температуры θ на критической линии для различных значений параметра неравномерности a : $a=0; 0,04; 0,07$ (кривые 1–3 соответственно) при $b=2,6$; $C=4$; $Re=100$. С увеличением параметра a профили u^* становятся менее наполненными, наклон их вблизи тела монотонно уменьшается и при некотором значении $a=a_k$ производная $du^*/d\eta$ на поверхности тела обращается в нуль. При дальнейшем увеличении a скорость вблизи тела становится отрицательной и образуется зона возвратно-циркуляционного течения [8, 9]. Отметим, что величина a_k является функцией числа Рейнольдса (см. ниже фиг. 3). Температура газа в ударном слое уменьшается с ростом a (фиг. 1), оставаясь монотонно возрастающей функцией от η .

На фиг. 2, 3 при различных значениях параметра a для $\xi=0$ изображены зависимости безразмерного теплового потока q (фиг. 2) и безразмерного отхода ударной волны y_s (фиг. 3) от числа Рейнольдса (кривые 1–3 соответствуют $a=0; 0,02; 0,04$).

Выражения для q и y_s имеют вид (тепловой поток отнесен к $\rho_\infty V_\infty^3$, отход ударной волны – к ϵR_0)

$$y=0: \quad q' = \frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q=q' \sqrt{Re}, \quad y_s = \Delta \int_0^1 \frac{d\eta}{\rho} \quad (2.1)$$

Из представленных на фиг. 2 результатов видно значительное влияние параметра a на тепловой поток: увеличение параметра неравномерности a от 0 до 0,04 приводит к уменьшению теплового потока q приблизительно в 2 раза при всех числах Рейнольдса ($1 \leq Re \leq 10^6$).

Неравномерность набегающего потока, как видно из фиг. 3, заметно влияет на отход ударной волны y_s в критической точке во всем диапазоне чисел Рейнольдса от умеренно малых до больших. С ростом параметра a ударная волна отходит от тела все больше и больше. Зависимости величины a_k от числа Рейнольдса приведены сплошными линиями на фиг. 3 (кривые 1–3 соответствуют $b=2,6; 7,2; 11,8$ при $C=4$; кривые 4, 5 – $C=3$; 5 при $b=7,2$). Отметим немонотонный характер этой зависимости и наличие максимума при малых числах Рейнольдса ($\approx 6–16$). При больших числах Рейнольдса ($\geq 10^3–10^4$) значение a_k асимптотически стремится к постоянному значению a_k^∞ . Приближенное значение может быть получено из решения невязкой задачи гиперзвукового обтекания сферы неравномерным потоком [10]

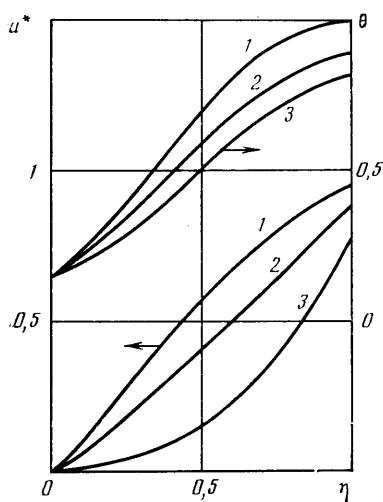
$$a_k^\infty = \frac{\gamma/\epsilon - 1}{\gamma/\epsilon + 2b(1-\epsilon)(1+C)} \quad (2.2)$$

Расчеты a_k^∞ по формуле (2.2) приведены на фиг. 3 штриховой линией. Область значений параметра a , соответствующая безотрывному обтеканию, лежит ниже кривых a_k .

Расчеты, выполненные в настоящей работе в рамках теории гиперзвукового вязкого ударного слоя, полностью подтверждают вывод [10] о том, что значение a_k^∞ является нижней границей критического значения a_k . Увеличение параметра неравномерности b при прочих равных условиях ведет к уменьшению области безотрывного обтекания (кривые 1–3); увеличение параметра C дает аналогичный результат (кривые 4, 2, 5).

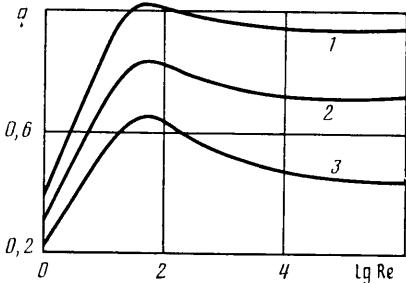
Распределения давления по поверхности сферы p_w (сплошные линии) и отхода ударной волны y_s (штриховые линии) приведены на фиг. 4 для $Re=100$; $b=2,6$; $C=4$ (кривые 1–3 соответствуют $a=0; 0,04; 0,06$) в зависимости от угла $\theta_1=\pi/2-\alpha$. Видно, что с ростом параметра неравномерности a давление на лобовой части сферы ($0^\circ \leq \theta_1 \leq 50^\circ$) монотонно уменьшается, распределения p_w становятся более пологими и при некотором значении a максимум давления смещается из критической точки на боковую поверхность. Отход ударной волны с ростом a растет только при значениях угла θ_1 от 0 до $\sim 40^\circ$. Далее по обводу сферы отход при неравномерном обтекании меньше, чем при равномерном. При значениях $a=0,06$ и выше форма ударной волны имеет точку перегиба (см. кривую 3 на фиг. 4).

Влияние неравномерности на тепловой поток q и коэффициент трения $C_f = \mu K^{-1} \sqrt{Re} \partial u / \partial y$ по обводу сферы показано на фиг. 5 для тех же значений параметров, что и на фиг. 4 (сплошные линии — q , штриховые линии — C_f ; остальные обозначения те же, что и на фиг. 4). Здесь отметим уменьшение теплового потока и коэффициента трения с ростом неравномерности набегающего потока. Распределения тепло-

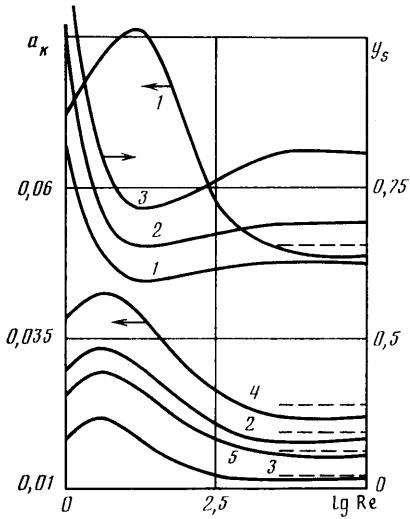


Фиг. 1

ния — q , штриховые линии — C_f ; остальные обозначения те же, что и на фиг. 4). Здесь отметим уменьшение теплового потока и коэффициента трения с ростом неравномерности набегающего потока. Распределения тепло-



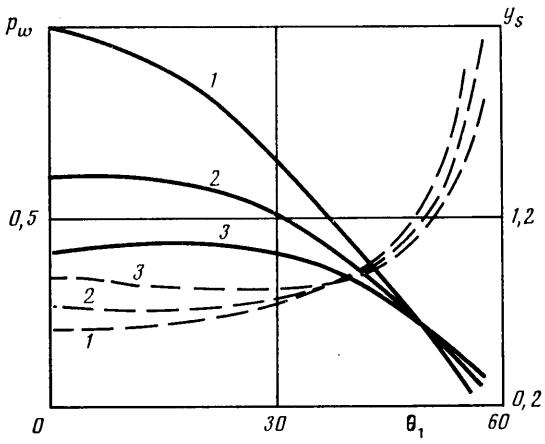
Фиг. 2



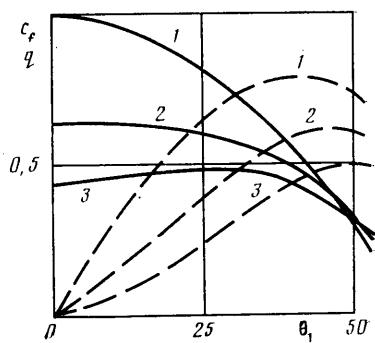
Фиг. 3

вого потока, как и давления p_w , имеют при $a=0,06$ максимум не в критической точке, а на боковой поверхности тела. Максимум коэффициента трения уменьшается с ростом a и смещается вниз по обводу сферы.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $K \sim O(1)$ в [12] получено асимптотическое решение данной задачи в окрестности критической точки. С целью определения пределов применимости решения [12] были выполнены специальные расчеты системы (1.2)–(1.4) с отброшенными членами, пропорциональными $\varepsilon \partial r / \partial x$, и проведено сопоставление с решением полной системы. Получено, что расчет по аналитическим формулам [12] при $Re \leq 50$ удовлетворительно согласуется с численным решением: различие по тепловым потокам не



Фиг. 4



Фиг. 5

превышает 20% при всех $a \leq a_k$, по коэффициенту трения согласование несколько хуже, однако при $a \leq 0,03$ различие порядка 30%.

ЛИТЕРАТУРА

- Лунев В. В., Храмов Н. Е. Течение в окрестности критической точки тупого тела в расходящемся гиперзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 102–105.
- Еремейцев И. Г., Пилигин Н. Н. Конвективный нагрев затупленного тела при его гиперзвуковом обтекании неравномерным потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 127–133.
- Еремейцев И. Г., Пилигин Н. Н. Трение и теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничных слоях при обтекании осесимметричных тел неоднородным сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 2. С. 65–72.
- Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Вязкий ударный слой у поверхности затупленного тела в расходящемся сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 176–179.
- Golovach Yu. P. Similarity properties in the problem of flow from a supersonic source past a spherical bluntness // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1985. V. 28. № 6. P. 1165–1171.
- Хлебников В. С. Исследование течения перед сферой, помещенной в следе тела, при сверхзвуковом обтекании // Уч. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 1. С. 42–48.
- Lin T. C., Reeves B. L., Siegelman D. Blunt-body problem in non-uniform flow-fields // AIAA Journal. 1977. V. 15. № 8. P. 1130–1137.
- Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В. Циркуляционное течение у лобовой поверхности сферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком типа следа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 143–148.
- Головачев Ю. П., Леонтьева Н. В., Цымбалов В. В. О численном моделировании некоторых отрывных течений на основе уравнений Навье – Стокса и Эйлера // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 7. С. 1267–1269.
- Еремейцев И. Г., Пилигин Н. Н. Теплообмен и сопротивление тела, расположенного в дальнем сверхзвуковом следе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 60–67.
- Хлебников В. С. Об инженерном методе расчета давления и теплового потока на поверхности тела, расположенного в следе другого, когда перед задним телом реализуется схема течения с головным скачком уплотнения // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1763. С. 12–21.
- Пилигин Н. Н., Талипов Р. Ф. Гиперзвуковое обтекание затупленного тела неравномерным потоком вязкого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 120–125.
- Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // Pap. Inst. Aerospace Sci. 1963. № 92. 100 р.
- Тирский Г. А. К теории гиперзвукового обтекания плоских и осесимметричных затупленных тел вязким химически реагирующим многокомпонентным потоком газа при наличии вдува // Научн. тр. Ин-та механики МГУ. 1975. № 39. С. 5–38.
- Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Исследование гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при наличии вдува или отсоса // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 817–828.
- Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 304–325.

Москва

Поступила в редакцию
12.VIII.1986