

УДК 533.6.011:532.52.2

**ТЕЧЕНИЕ В ПЕРИФЕРИЙНОЙ ОБЛАСТИ СВОБОДНО
РАСПИРЯЮЩЕЙСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

СОКОЛОВ Е. И.

При истечении идеального газа из сопла в вакуум значительную часть струи может занимать периферийная область, в которой величина угла наклона вектора скорости W к оси симметрии близка к $\pi/2$ или превосходит это значение. Известные решения [1–4] для дальнего поля струи непригодны для ее описания, так как справедливы только при относительно малых значениях θ .

В данной работе получено аналитическое решение, описывающее в явном виде форму линий тока и распределение параметров в периферийной области струи, истекающей в вакуум из сопла, с произвольным распределением их на срезе. На кромке сопла решение описывает течение Прандтля – Майера. При удалении на бесконечность линии тока в полученном решении стремятся к асимптотам, угол наклона которых зависит от распределения параметров на срезе сопла, а местные числа Маха неограниченно возрастают.

1. Течение в периферийной области во многом определяется закономерностями расширения газа в окрестности кромки сопла. В случае равномерного потока на срезе течение вблизи кромки проанализировано в [6, 7]. В [8–10] исследовалось сходное течение в окрестности излома образующей тела вращения. Все эти работы рассматривают разворот потока до значений $\theta < \pi/2$.

Рассмотрим в окрестности кромки сопла течение идеального совершенного газа, в котором энтропия $S(\psi)$ и полная энтальпия $I(\psi)$ зависят только от функции тока ψ . В естественной системе координат (фиг. 1) оно может быть описано системой уравнений [5, с. 334]

$$\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial n} + j \frac{\sin \theta}{y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial z}{\partial n} = 0; \quad z = \ln p^{\Gamma} \quad (1.1)$$

Здесь s и n – направления по касательной и нормали к линии тока, $j=0$ и 1 в плоском и осесимметричном течениях. Линейные размеры будем относить к радиусу среза сопла.

Перейдем при $M > 1$ в системе (1.1) к характеристическим координатам $\xi\eta$ (фиг. 1)

$$U_1 \frac{dz}{d\xi} + \frac{d\theta}{d\xi} = jU_2, \quad U_1 \frac{dz}{d\eta} + \frac{d\theta}{d\eta} = jU_2$$

$$U_1 = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad U_2 = -\frac{\sin \theta \sin \alpha}{1+r \sin \varphi}$$

$$\frac{d}{d\eta} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial n} = \cos(\mu - \alpha) \frac{\partial}{\partial r} + \sin(\mu - \alpha) \frac{\partial}{r \partial \varphi}$$

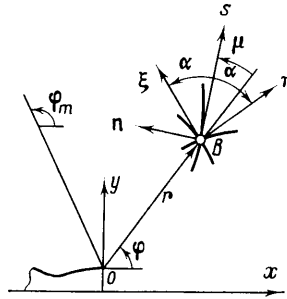
$$\frac{d}{d\xi} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial n} = \cos(\mu + \alpha) \frac{\partial}{\partial r} + \sin(\mu + \alpha) \frac{\partial}{r \partial \varphi}$$

Здесь $\alpha = \arcsin M^{-1}$ — угол Маха, r и φ — полярные координаты точки в системе с центром на кромке сопла (фиг. 1). Газодинамические функции будем относить к их критическим значениям на линии тока, проходящей через кромку сопла. Введя функцию Прандтля — Майера $\omega(M)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\eta} &= -2U_2 + 2U_1 \frac{dz^\circ}{d\eta}; & \frac{dF}{d\xi} &= -2U_2 + 2U_1 \frac{dz^\circ}{d\xi} \\ \Phi &= 2(\omega + \theta), & F &= 2(\omega - \theta), & d\omega &= -U_1 d(z - z^\circ) \\ z^\circ(\psi) &= \frac{1}{\gamma} \ln \frac{p^\circ(\psi)}{\rho_* W_*^2}, & p^\circ(S, I) &= p^\circ(\psi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь p° — давление торможения.

На кромке сопла направление характеристик η -семейства совпадает с радиальным, а интегрирование системы (1.2) дает известные формулы



Фиг. 1

течения Прандтля — Майера. Для дальнейшего анализа удобно в этих формулах вычислять постоянную интегрирования не при $M=1$, как это делается обычно, а при $M=\infty$, считая известной величину предельного угла разворота потока φ_m . Зависимости параметров течения Прандтля — Майера от угла φ принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_e &= \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \nu, & \nu &= \sqrt{\varepsilon} \Delta\varphi, & \Delta\varphi &= \varphi_m - \varphi, & \mu_e &= \alpha_e \\ \varphi_m &= \left(\frac{1}{\gamma\varepsilon} - 1 \right) \frac{\pi}{2} - \omega(M_a) + \theta_a, & \varepsilon &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Индексами a и e здесь и ниже обозначены параметры в плоскости среза сопла и в течении Прандтля — Майера.

Следуя [6—8], представим все газодинамические функции, входящие в (1.2), асимптотическими рядами по переменной r вида

$$f(r, \varphi) = f_e(\varphi) + r f_1(\varphi) + O(r^2) \quad (1.4)$$

Проанализируем геометрию η -характеристик в окрестности кромки. Исходя из (1.4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} &= \frac{d}{dr} \frac{dr}{d\eta} = \cos(\mu - \alpha) \frac{d}{dr} = \cos(\mu_e - \alpha_e) \frac{d}{dr} - \\ &- r(\mu_1 - \alpha_1) \sin(\mu_e - \alpha_e) \frac{d}{dr} + O(r^2) = \frac{d}{dr} + O(r^2) \end{aligned}$$

Отсюда с принятой точностью направление η -характеристик в окрестности кромки совпадает с радиальным. Это делает оправданным приме-

нение для последующего анализа именно уравнений (1.2) в переменных $\xi\eta$. В отличие от системы в переменных $r\varphi$ (см. ниже, (2.1)) она содержит такие комбинации искомых величин, которые позволяют получить решение в удобном для анализа виде. Действительно, замена в первом уравнении (1.2) $d\eta$ на dr и подстановка разложений для Φ , θ , α и z° вида (1.4) приводит к простому уравнению

$$\frac{1}{2}\Phi_1 = \omega_1 + \theta_1 = \omega_1 + \mu_1 = j \sin(\mu_e + \varphi) \sin \alpha_e + \frac{1}{2} z_1^\circ \sin 2\alpha_e \quad (1.5)$$

Чтобы правая часть (1.5) содержала только известные функции, остается получить выражение для z_1° — второго члена ряда (1.4) для z° . Очевидно

$$\frac{dz^\circ}{ds} = \frac{\partial z^\circ}{\partial s} = \cos \mu \frac{\partial z^\circ}{\partial r} + \frac{\sin \mu}{r} \frac{\partial z^\circ}{\partial \varphi} = 0$$

Подставляя в это уравнение разложения (1.4) для z° и μ , получим дифференциальное уравнение, интеграл которого имеет вид $z_1^\circ = A \sin^{1/\varepsilon} \nu$. Постоянная A определяется условиями при $\varphi = \varphi_0$.

Рассмотрим в окрестности кромки второе уравнение (1.2). Первое слагаемое в его правой части с подстановкой (1.4) примет тот же вид, что и в (1.5). Подставим разложение (1.4) для F в левую часть

$$\frac{dF}{d\xi} = F_1 \cos(\mu_e + \alpha_e) + \frac{\sin(\mu_e + \alpha_e)}{r} \left(\frac{dF_e}{d\varphi} + r \frac{dF_1}{d\varphi} \right) + O(r^2)$$

Такой же вид примет и второе слагаемое в правой части второго уравнения (1.2) при подстановке разложения для z° . Используя z_1° и учитывая, что z_e° и F_e не зависят от φ , $\mu_e = \alpha_e$, получим в итоге следующее уравнение:

$$\frac{dF_1}{d\varphi} + F_1 \operatorname{ctg} 2\alpha_e = j \frac{\sin(\alpha_e + \varphi)}{\cos \alpha_e} - A \sin^{1/\varepsilon} \nu \quad (1.6)$$

Уравнение имеет две особые точки φ_1^* . Первая точка соответствует звуковой скорости, вторая — числу $M = \infty$

$$\varphi_1^* = \pi/2, \cos \alpha_e = 0, \alpha_e^* = \pi/2; \varphi_2^* = \varphi_m, \sin \alpha_e = 0, \alpha_e^* = 0$$

Общий интеграл линейного уравнения (1.6) имеет вид

$$F_1 = jQ(\nu)J_1|_{\varphi_0} - AQ(\nu)J_2|_{\varphi_0} + F_1(\varphi_0)Q(\nu)Q^{-1}(\nu_0) \quad (1.7)$$

$$Q(\nu) = \sin^{1/2} \nu \cos^{1/2} \nu, \quad J_1 = \int \frac{\sin(\alpha_e + \varphi)}{\cos \alpha_e} Q^{-1} d\varphi, \quad J_2 = \int \frac{Q}{\cos \nu} d\varphi$$

Если луч φ_0 совпадает с разрывной характеристикой, постоянная интегрирования $F_1(\varphi_0)$ должна определяться в соответствии с указаниями, содержащимися в [6, 7]. Интегралы J_1 и J_2 не выражаются через элементарные функции и в пределах от φ_1^* до φ_2^* являются несобственными. Первое слагаемое в (1.7) определяется только осесимметричностью течения, второе — завихренностью течения и третье — только его начальной неравномерностью. Таким образом, формула (1.7) дает четкое представление о вкладе этих возмущающих факторов в исследуемое течение.

Рассмотрим поведение решения уравнения (1.6) в особых точках. При интегрировании от φ_1^* $Q(\pi/2) = 0$, что приводит к бесконечным значениям F_1 для любого φ за счет последнего слагаемого в (1.7). Такая особенность присуща и решениям [6–8], однако это обстоятельство осталось там без внимания. Отмеченная особенность, очевидно, указывает на непригодность разложений (1.4) в окрестности произвольной звуковой линии. В трансзвуковой области имеют силу другие, отличные от областей с $M > 1$ оценки порядков величин возмущений. В дальнейших рассуждениях будем счи-

тать, что нижний предел интегрирования ограничен величиной $\varphi_0 = \varphi_1^* - \delta$, $\delta \ll 1$, гарантирующей конечное значение $Q^{-1}(v_0)$. Такой «традиционный» прием позволяет исключить в рассматриваемой задаче случай $Q(v_0) = 0$, $F_1 = \infty$, требующий подробного анализа трансзвуковой зоны. Исследуем с учетом этого поведения решения при $\varphi \rightarrow \varphi_m$.

При $\varphi_0 \neq \varphi_1^*$ и $\varphi = \varphi_m$ третье слагаемое в (1.7) равно нулю вместе с величиной $Q(v_m)$. Для анализа двух первых слагаемых разобьем промежуток интегрирования $\varphi_0 - \varphi_m$ на два

$$J_i|_{\varphi_0}^{\varphi_m} = J_i|_{\varphi_0}^{\varphi_1} + J_i|_{\varphi_1}^{\varphi_m}, \quad \varphi_1 = \varphi_m - \Delta\varphi$$

Первые интегралы здесь всегда конечны, и произведение их суммы на $Q(v_m)$ равно нулю. Выберем $\Delta\varphi$ достаточно малым и разложим подынтегральные функции в (1.7) в ряды Тейлора в окрестности значения $v=0$. Особенности в интегралах будут определяться в таком представлении главными членами разложений. Например, для J_2 при $\varphi \rightarrow \varphi_m$ получим

$$J_2|_{\varphi_1}^{\varphi_m} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_m} v^{1/2\varepsilon} d\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{v_1}^0 v^{1/2\varepsilon} dv = -\frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} v_1^{(1+2\varepsilon)/2\varepsilon}$$

Отсюда произведение $QJ_2=0$ при $\varphi=\varphi_m$. Аналогичный анализ интеграла J_1 показывает, что при $\varphi \rightarrow \varphi_m$ он пропорционален $v^{1-1/2\varepsilon}$, но, поскольку $Q(\varphi \rightarrow \varphi_m) \sim v^{1/2\varepsilon}$, произведение $QJ_1 \sim v$ стремится при этом к нулю. Таким образом, для произвольных начальных условий на луче $\varphi_0 \neq \varphi_1^*$ $F_1(\varphi_m) = 0$. Раскроем в точке φ_m неопределенность в (1.6) и проведем интегрирование по φ

$$F_1 = 2j \frac{\gamma-1}{3-\gamma} (\varphi_m - \varphi) \sin \varphi_m \quad (1.8)$$

Последнее слагаемое в (1.6), определяемое завихренностью, имеет при $\varphi \rightarrow \varphi_m$ порядок $O(v^{1/2\varepsilon})$ и при интегрировании опущено. Это оправданно и по физическим соображениям, так как вихрь $\Omega \sim TW^{-1}$ стремится к нулю вместе с температурой T при $M \rightarrow \infty$ и $W \rightarrow W_m$.

Решая совместно при $\varphi \rightarrow \varphi_m$ уравнения (1.8) и (1.5) без учета последнего члена, получим

$$\omega_1 = 2j \frac{(\gamma-1) \sin \varphi_m}{(3-\gamma)(\gamma+1)} (\varphi_m - \varphi), \quad \mu_1 = -\frac{1}{2} (\gamma-1) \omega_1$$

При $\alpha \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$ и $\Delta\varphi \rightarrow 0$ уравнения (1.3) принимают вид

$$\alpha_\varepsilon = \mu_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} v = \varepsilon \Delta\varphi \quad (1.9)$$

Благодаря малому параметру ε это выражение практически совпадает с (1.3) вплоть до значений $\Delta\varphi \sim 1$. Выразив функцию $\omega(M)$ через α и подставляя (1.4), получим

$$\omega_1 = -\frac{\alpha_1 \cos^2 \alpha_\varepsilon}{\sin^2 \alpha_\varepsilon + 1/2(\gamma-1)} \simeq -\frac{2\alpha_1}{\gamma-1}$$

Используя эту зависимость и учитывая (1.9), получим в итоге следующие представления для μ и α :

$$\frac{\alpha}{\alpha_\varepsilon} = \frac{\mu}{\mu_\varepsilon} = \left(1 - jr \frac{\gamma-1}{3-\gamma} \sin \varphi_m \right) + O(r^2) \quad (1.10)$$

Таким образом, в периферийной области все возмущения, не связанные с осевой симметрией, пренебрежимо малы, а равенство $\mu = \alpha$ сохраняется не только на кромке сопла, но и в ее окрестности с точностью до членов порядка $O(r^2)$. Данный вывод справедлив, очевидно, при $\sin \varphi_m > 0$. Течение в окрестности предельной линии тока при $\varphi_m \ll \pi$ должно исследоваться

с привлечением в (1.4) членов порядка $O(r^2)$. Свободное расширение при $\varphi_m > \pi$ физически не может быть реализовано (при $M_e = 1$ это имеет место для всех газов с $\gamma < 1,25$).

Получим выражение для функции тока в окрестности кромки. Подставим соответствующие разложения вида (1.4) в формулу для $d\psi$ и проведем интегрирование вдоль направления r

$$\begin{aligned} d\psi &= \rho W(1+r \sin \varphi)(r \cos \mu d\varphi - \sin \mu dr) \\ \psi &= \psi_e - r \sin^{1/\epsilon} \nu + PO(r^2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь P — функция, зависящая от трех возмущающих факторов. Как видно из (1.11), они не оказывают заметного влияния на распределение расхода газа вблизи кромки сопла.

2. Для анализа течения в периферийной области при произвольных расстояниях от центра расширения перейдем в системе (1.1) к переменным $r\varphi$ (фиг. 1)

$$\cos^2 \alpha \left(\cos \mu \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\sin \mu}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + \frac{\cos \mu}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} - \sin \mu \frac{\partial \mu}{\partial r} = - \frac{\cos \mu}{r} - j \frac{\sin(\mu + \varphi)}{1 + r \sin \varphi} \quad (2.1)$$

$$\frac{\sin \mu}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \cos \mu \frac{\partial \mu}{\partial r} + \sin^2 \alpha \left(\frac{\cos \mu}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \sin \mu \frac{\partial z}{\partial r} \right) = - \frac{\sin \mu}{r}$$

При $r=0$ система описывает течение Прандтля — Майера, при $r=\infty$ ей удовлетворяют значения $\mu = \alpha = 0$, $z = -\infty$. Упростим эту систему, основываясь на общих закономерностях рассматриваемого течения.

Периферийная область ограничена предельной линией тока, вдоль которой $\mu = \alpha = 0$, $z = -\infty$, и содержит кромку сопла, где величины μ и α при $\varphi \rightarrow \varphi_m$ подчиняются уравнениям (1.9). Считая $\mu \sim \alpha \leq \alpha_e \ll 1$, заменим тригонометрические функции μ и α в (2.1) первыми членами их рядов Тейлора. Точность такого представления достаточно высока (так, при $M_e = 3,28$ $\mu_e = \alpha_e = 0,3$, но погрешность не превышает 4,7%). Для оценки порядка величины членов уравнений (2.1) проанализируем изменение функций μ и z при перемещении из некоторой точки B (фиг. 1) вдоль координатных линий. Очевидно, что при увеличении φ предельные значения $\mu=0$ и $z=-\infty$ достигаются на конечном приращении $\Delta\varphi_B$, а при изменении r — лишь при бесконечном удалении от точки B . Это дает основание заключить, что при любых конечных r $\partial/\partial\varphi \gg \partial/\partial r$. Кроме того, будем считать, что имеет силу оценка $\mu\partial/\partial\varphi \sim \partial/\partial r$. В этом случае становится возможным опустить последние слагаемые в левых частях уравнений (2.1). В итоге получим

$$\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = - \frac{1}{r} - j \frac{\mu \cos \varphi + \sin \varphi}{1 + r \sin \varphi} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \frac{\alpha^2}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = - \frac{\mu}{r}$$

Дальнейшее упрощение достигается при $\mu \ll \varphi$, когда слагаемое $\mu \cos \varphi$ справа в первом уравнении может быть опущено. Величины z и α в (2.2) связаны соотношением

$$dz = dz^\circ + \frac{\text{ctg } \alpha d\alpha}{\sin^2 \alpha + 1/2(\gamma - 1)} \simeq dz^\circ + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (2.3)$$

Оценим решение системы (2.2) для безвихревого течения ($z^\circ = 0$) при $\varphi \sim \pi/2$ и

$r \gg 1$. С учетом (2.3) система примет вид

$$\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\partial \ln \alpha}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \ln \alpha}{\partial \varphi} \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + 1 \right) - \frac{j}{1+r} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \frac{2}{\gamma-1} \frac{\alpha}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = -\frac{\mu}{r}$$

При $r \rightarrow \infty$ слева в системе можно оставить только первые члены. Пренебрегая также величиной $\mu_\varphi' < (\mu_e)' \ll 1$ в первом уравнении, получим значительно упрощенную систему

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial \ln \alpha}{\partial r} \approx -\frac{1+j}{r}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r} \approx -\frac{\mu}{r}$$

Уравнения системы стали независимыми — изменение числа M описывается уравнением неразрывности, а уравнение движения дает кинематическое соотношение для μ

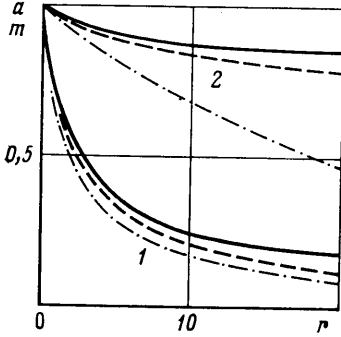
$$\alpha \approx \chi_1(\varphi) r^{0,5(1-\gamma)(1+j)}, \quad \mu \approx \chi_2(\varphi) r^{-1} \quad (2.5)$$

Здесь χ_i — произвольные функции. Отметим, что первое уравнение (2.5) по структуре совпадает с полученным в [1, 2].

Проанализируем систему (2.4) для безвихревых осесимметричных течений при произвольных r . Ее структура позволяет искать решение в форме $\alpha = \alpha_e a(r)$, $\mu = \mu_e m(r)$. Из (2.4) с учетом равенства $\mu_e' = -\varepsilon$ получим

$$\frac{d \ln \alpha^{2/(\gamma-1)}}{dr} = \frac{1}{r} \left(m - 1 - \frac{1}{1+r} \right), \quad (2.6)$$

$$\frac{d \ln m}{dr} = \frac{\varepsilon m}{r} \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a^2}{m^2} \right) - \frac{1}{r}$$



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены результаты численного интегрирования (2.6) в виде зависимостей величин $\alpha/\alpha_e = a$ и $\mu/\mu_e = m$ от r (сплошные и штриховые кривые) для $\gamma=1,1$, $M_a=5$ и $\gamma=1,67$, $M_a=1$. Начальные условия задавались при $r=0,05$ по (1.10). Видно, что в некотором диапазоне $r > 1$ кривые остаются близкими, причем для $\gamma=1,1$ этот диапазон весьма значителен (при $r=10^3$ $\alpha/\mu=1,35$, для $\gamma=1,67$ это же значение достигается при $r \approx 50$). Такое поведение величин μ и α согласуется с результатом (2.5).

Пользуясь теперь полученными оценками, найдем аналитическое решение для промежуточных r в более общем случае вихревого течения. Считая $\mu \ll \varphi$, исключим из (2.2) $\partial z / \partial \varphi$

$$\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \frac{\partial \ln \mu}{\partial r} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha^2} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \left(\frac{\mu^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{1}{r} - \frac{j \sin \varphi}{1+r \sin \varphi}$$

В уравнение явно входит параметр $K = \alpha^2 / \mu^2$, сходный с введенным в [2]. Согласно (2.5), для $r \rightarrow \infty$ $K^{-1} \sim r^{2\gamma-4} \rightarrow 0$. Нетрудно видеть, что при $K \rightarrow \infty$ решение уравнения совпадает с (2.5). С другой стороны, ранее было получено, что при $r < 1$ $K=1$ (1.10), при $r \gg 1$ $K \sim 1$ (фиг. 2). Очевидно, последним слагаемым слева можно пренебречь при любых r , так как при $K \rightarrow \infty$ оно, согласно (2.5), имеет порядок $O(r^{-3})$. Полагая затем $K=1$ и интегрируя по r , получим

$$z = \ln \mu - j \ln y + \chi_3(\varphi), \quad y = 1 + r \sin \varphi$$

Произвольная функция χ_3 должна определяться в окрестности кромки с помощью формул, полученных в разд. 1. Однако, поскольку возмущения, вносимые в периферийную область неравномерностью и завихренностью, малы, а влияние осевой симметрии отражено структурой полученной формулы для z , функцию χ_3 можно определить при $r=0$

$$\chi_3(\varphi) = z_e - \ln \mu_e, \quad \frac{d\chi_3}{d\varphi} = \mu_e^{-1} \frac{3-\gamma}{\gamma-1} \frac{d\mu_e}{d\varphi}$$

Подставим z во второе уравнение (2.2)

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} + \frac{\mu}{r} (1+K) \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + \frac{\alpha^2}{r \mu_e} \frac{3-\gamma}{\gamma-1} \frac{d\mu_e}{d\varphi} - \frac{j\alpha^2 \cos \varphi}{1+r \sin \varphi} = -\frac{\mu}{r}$$

Очевидно, последнее слагаемое слева с ростом φ становится по крайней мере на порядок меньше остальных и может быть опущено. Подставляя в оставшееся уравнение $\mu = \mu_e m(r)$, получим

$$\frac{d \ln m}{dr} + \frac{m}{r} \frac{d\mu_e}{d\varphi} \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{\alpha^2}{\mu_e^2 m^2} \right) = -\frac{1}{r}$$

В периферийной области производная μ_e' не зависит от φ (1.9). Полагая в скобках $K=1$ и интегрируя, получим окончательное выражение для μ в виде $\mu = \mu_e (1+Cr)^{-1}$. Подставляя μ в формулу для z и используя (2.3), найдем закон изменения α

$$\alpha = \alpha_e \left[\frac{\exp[\gamma(z^\circ - z_e^\circ)]}{(1+Cr)(1+r \sin \varphi)^j} \right]^{0,5(\gamma-1)}, \quad z_e^\circ = \ln \left(\frac{p_e^\circ}{\rho_* W_*^2} \right)^{1/\gamma} \quad (2.7)$$

Далее рассматриваются только осесимметричные течения.

Определим постоянную C из условия $K \approx 1$ при $r \sim 1$. Используем полученные выражения для μ и α

$$K = \frac{\alpha^2}{\mu^2} = \frac{(1+r \sin \varphi)^{\gamma-1}}{g(1+Cr)^{3-\gamma}} = \frac{1+(\gamma-1)r \sin \varphi + \dots}{g[1+(3-\gamma)Cr + \dots]} \sim 1, \quad g = \left(\frac{p^\circ}{p_e^\circ} \right)^{\gamma-1}$$

Приравняв коэффициенты при r в числителе и знаменателе, получим $C \sim (\gamma-1)(3-\gamma)^{-1} \sin \varphi$. Поскольку величина C не должна зависеть от φ , в этом выражении следует положить φ равным некоторому характерному для периферийной области значению φ_i . Формулы для μ и z примут тогда вид

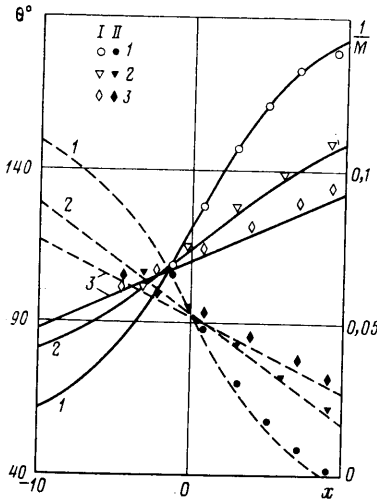
$$\mu = \mu_e R^{-1}, \quad z = z_e - \ln(Ry), \quad R = 1 + \frac{\gamma-1}{3-\gamma} \sin \varphi_i \quad (2.8)$$

В формуле (2.7) следует положить $C = (\gamma-1)(3-\gamma)^{-1} \sin \varphi_i$. Поскольку в периферийной области характерным является направление течения, ортогональное оси струи, логично принять $\varphi_i \approx \pi/2$, $\sin \varphi_i = 1$. Нетрудно убедиться, что при $z^\circ \equiv z_e^\circ$, $r < 1$ и $\sin \varphi_i \sim \sin \varphi_m$ формула (2.7) переходит в (1.10), а при $r \gg 1$ — в (2.5). Выражение (2.8) для μ при этих условиях также соответствует своим предельным формам. Формулы (2.7), (2.8) удовлетворяют второму уравнению (2.2) с точностью до множителя $(1-K)$. Несколько неожиданный результат дает подстановка этих формул в первое уравнение: будучи полученными в предположении $\mu \ll \varphi$, они при любых r тождественно удовлетворяют первому уравнению (2.3), справедливому при менее строгом ограничении $\mu \ll 1$. Таким образом, при $M_a > 3,5$ эти результаты формально справедливы во всем веере разрежения при любых φ .

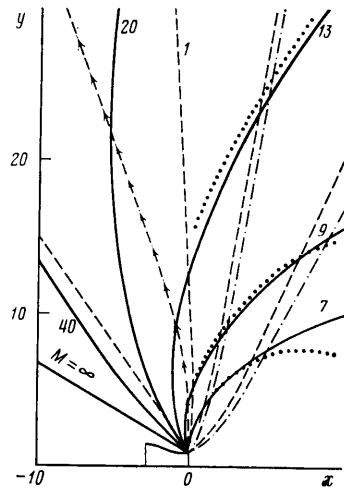
Дифференциальное уравнение линии тока в системе координат $r\varphi$ имеет вид $r(\mu')^{-1} = \text{tg } \mu \approx \mu$. Подстановка (2.8) с последующим интегрированием приводит к зависимости

$$\frac{r_b}{r} = \left(\frac{v}{v_b} \right)^{1/\epsilon} \left(1 + \frac{\gamma-1}{3-\gamma} r_b \right) - \frac{\gamma-1}{3-\gamma} r_b \quad (2.9)$$

Здесь угловая величина v_b определяет координату φ_b точки на начальной окружности $r_b \ll 1$, из которой выходит данная линия тока. Значение φ в ней рассчитывается по (1.11). Поскольку форма линий тока не зависит от α , применение (2.9) совместно с (2.7) дает возможность определить поле параметров в вихревом течении с известным распределением $z^\circ(\varphi)$. Первая скобка в (2.9) описывает форму линий тока течения Прандтля —



Фиг. 3



Фиг. 4

Майера, которые при $\gamma \rightarrow 1$ все меньше отличаются от своих аналогов в осесимметричном течении. При $r \rightarrow \infty$ линии тока стремятся к асимптотам, наклоненным к оси под углом

$$\varphi_l = \varphi_m - (\varphi_m - \varphi_b) \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{3 - \gamma} r_b \right)^{-1} \right]^{-\varepsilon} \quad (2.10)$$

В соответствии с замечаниями разд. 1 (см. (1.10) и ниже) полученное решение справедливо при $\varphi_m < \pi$. При $\gamma < 1,25$ это накладывает ограничение на минимальное значение M_a (так, для $\gamma = 1,2$ $M_a \geq 1,6$, для $\gamma = 1,05$ $M_a \geq 5,5$). Нижний предел применимости полученного решения по φ определяется тремя факторами: затуханием возмущений при развороте потока у кромки (это существенно при определении функции χ_3 в формуле для z), справедливостью линеаризованного соотношения (1.9), которое позволяет проинтегрировать уравнение для μ , и точностью замены функций μ и α их аргументами в исходной системе (2.1).

Приведем примеры расчетов по полученным формулам. На фиг. 2 штрихпунктиром нанесены графики изменения величины $\mu/\mu_\varepsilon = m$, рассчитанные при $\varphi = \pi/2$ по (2.8) (графики для $\alpha/\alpha_\varepsilon = a$ сливаются в масштабе фиг. 2 с соответствующими сплошными кривыми). При $\gamma = 1,67$ (кривые 1) наблюдается хорошее соответствие численному решению системы (2.6), при $\gamma = 1,1$ (кривые 2) формула (2.8) дает заметно больший темп уменьшения μ с радиусом. Это обстоятельство, однако, не приводит к сколько-нибудь серьезному падению точности определения угла наклона вектора скорости, поскольку при малых γ ($\varepsilon \rightarrow 0$) как численное решение $\mu = \mu_\varepsilon m$ (2.6), так и приближенное (2.8) дают величины углов, пренебрежимо малые по сравнению с соответствующими значениями φ . В то же время окрестность сопла $r \geq 1$, как видно из фиг. 2, рассчитывается с достаточной точностью и при $\gamma = 1,1$.

Это подтверждается данными на фиг. 3, где для струи с $M_a = 3,8$; $\gamma = 1,15$; $\theta_a = 10^\circ$, $\varphi_m = 168,6^\circ$ приведены результаты расчета величины $1/M$ и $\theta = \mu + \varphi$ по формулам (2.7), (2.8) (сплошные и штриховые кривые) в сопоставлении с результатами численного расчета методом, описанным в [11]. Сравнение проводилось в сечениях $y = \text{const} = 7,5$; 15 и 22,6 (цифры 1-3 соответственно). Значками I обозначены результаты численного расчета величины $1/M$, II - угла θ . Левее сечения $x = -4,5$ численного решения получить не удастся. В то же время расчеты по формулам (2.7), (2.8) могут быть продолжены вплоть до предельной линии тока ($1/M = 0$, $\theta = \varphi_m$).

На фиг. 4 приведены результаты расчета линий $M = \text{const}$ (2.7) и линий тока ((2.9), $r_b = 0,2$) (сплошные и штриховые кривые) для струи с $M_a = 1,01$; $\gamma = 1,33$; $\theta_a = 0^\circ$; $\varphi_m = 150^\circ$. Для сравнения при $x > 0$ приведены данные из атласа [12] (пунктир - линии $M = \text{const}$, штрихпунктир - линии тока $\psi/\psi_a = 0,8$ и $0,95$). Цифрами обозначены соответствующие числа $M = \text{const}$. Ниже приведены значения ψ/ψ_a (1.11), φ_b и φ_l (2.10) для построенных линий тока:

| | | | | |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|
| ψ/ψ_a | 0,94270 | 0,98621 | 0,99641 | 0,99999 |
| φ_b° | -2,05 | 34,32 | 57,60 | 112,92 |
| φ_l° | 64,61 | 81,32 | 93,73 | 126,48 |

Видно, что результаты расчетов удовлетворительно согласуются с данными [12]. Количественные различия в форме линий $M = \text{const}$ имеют место при малых φ , выходящих за пределы применимости решения. Отметим, что, согласно [12], расчеты на периферии струи проводились с неконтролируемой точностью. Стрелками на фиг. 4 показана линия тока течения Прандтля – Майера, исходящая из той же точки, что и помеченная цифрой 1. Видно существенное влияние осевой симметрии на форму линий тока в периферийной области.

Приведенные данные свидетельствуют о том, что полученное решение достаточно хорошо описывает течение в периферийной области струи идеального газа, истекающей в вакуум. Формулы для расчета параметров в периферийной области остаются справедливыми и в окрестности предельной линии тока струи, истекающей из сопла с $M_a \gg 1$, когда $\varphi_m \ll \pi/2$. Этот случай, не рассмотренный отдельно в настоящей работе, потребует лишь пересмотра величины коэффициента C в выражении для μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В. Н., Ладыженский М. Д. Газодинамический расчет ударных труб и гиперзвуковых сопел в условиях равновесной диссоциации и ионизации воздуха // Тр. ЦАГИ. 1960. Вып. 779. 39 с.
2. Ладыженский М. Д. Пространственные гиперзвуковые течения газа. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.
3. Крайко А. Н., Шеломовский В. В. О свободном расширении двумерных струй идеального газа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 2. С. 271–280.
4. Лифшиц Ю. Б., Маревцева Н. А. О свободном расширении трехмерных струй идеального газа // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 428–432.
5. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
6. Johannesen N. H., Meyer R. E. Axially-symmetrical supersonic flow near the centre of an expansion // Aeronaut. Quart. 1950. V. 2. Pt 2. P. 127–142.
7. Ginsburg Th. Prandtl – Meyer – expansion in rotations – symmetrischer strömung // ZAMP. 1963. V. 14. P. 270–279.
8. Шмыглевский Ю. Д. Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения // Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 89–115.
9. Миносцев В. Б. О градиенте давления в точке излома или разрыва кривизны контура затупленных конусов и клиньев, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 110–116.
10. Тимошенко В. И. Расчет вихревого сверхзвукового течения газа в окрестности излома образующей тела вращения // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1973. Вып. 17. С. 25–30.
11. Дьяконов Ю. Н., Усков В. И. Расчет сверхзвуковых струй идеального газа методом сеток // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1970. № 5. С. 73–87.
12. Жохов В. А., Хомутский А. А. Атлас сверхзвуковых течений свободно расширяющегося идеального газа, истекающего из осесимметричного сопла // Тр. ЦАГИ. 1970. Вып. 1224. 117 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
30.VI.1986