МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1987

УДК 533.6.01

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

БУРДЭ Г. И.

Исследуется устойчивость одномерных движений совершенного газа со сферической, цилиндрической и плоской симметрией, когда величина скорости пропорциональна расстоянию до центра симметрии. Соответствующие решения уравнений газовой динамики для случая адиабатических движений получены и исследованы в [1, 2]. Устойчивость этих решений исследовалась в [3] для пульсирующего движения гравитирующего шара, в [4] для движений газа в отсутствие сил тяготения и непериодических движений гравитирующего газа. Устойчивость движений вязкого теплопроводного газа с линейным распределением скорости по координате ранее не исследовалась.

Из результатов [4] следует, что адиабатические движения на стадиях, соответствующих сжатию газа, как правило, неустойчивы. В настоящей работе для одного класса движений, оказывающихся неустойчивыми в адиабатическом случае, показано, что при наличии вязкости и теплопроводности возможность возникновения неустойчивости определяется в первую очередь величиной показателя степени в законе изменения вязкости с температурой. При показателе степени, меньшем некоторого порогового значения, сжатие газа становится неустойчивым при любых величинах коэффициентов вязкости и теплопроводности.

1. Будем рассматривать движения газа в отсутствие сил тяготения, когда распределение скорости представляется формулой

$$v=\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}r \tag{1.1}$$

где r — расстояние до центра симметрии, $R(t)$ — функция, имеющая смысл некоторого масштабного фактора.

Запишем уравнения газовой динамики в переменных y_i, t

$$y_i=\frac{x_i}{R},\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\to\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial y_i},\quad \frac{\partial}{\partial t}\to\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}y_k\frac{\partial}{\partial y_k}$$

Здесь x_i — декартовы координаты, по повторяющимся индексам здесь и далее проводится суммирование.

Уравнения, описывающие движения вязкого теплопроводного совершенного газа, примут вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{R}\left(v_k-\frac{dR}{dt}y_k\right)\frac{\partial\rho}{\partial y_k}+\frac{1}{R}\rho\frac{\partial v_k}{\partial y_k}=0$$

$$\rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{R}\left(v_k-\frac{dR}{dt}y_k\right)\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right]=-\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial y_i}+$$

$$+\frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_k}{\partial y_k}\right]+\frac{\partial}{\partial y_k}(2\mu e_{ik})\right\} \tag{1.2}$$

$$\rho\left[\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{R}\left(v_k-\frac{dR}{dt}y_k\right)\frac{\partial E}{\partial y_k}\right]=\frac{\gamma}{R^2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\chi\frac{\partial E}{\partial y_k}\right)-$$

$$-\frac{1}{R}p\frac{\partial v_k}{\partial y_k}+\frac{1}{R^2}\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_k}\right)^2+2\mu e_{ik}e_{ik}\right]$$

$$p=(\gamma-1)\rho E,\quad e_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k}+\frac{\partial v_k}{\partial y_i}\right),\quad \lambda=a_1E^n,\quad \mu=a_2E^n,\quad \chi=a_3E^n$$

Здесь λ — коэффициент объемной вязкости, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, $\chi=\varkappa/c_p$, где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, E — внутренняя энергия единицы массы, остальные обозначения обычные. Индексы i, k пробегают значения $1,\ldots,\nu$, где величина ν указывает вид симметрии задачи ($\nu=1, 2, 3$).

Система (1.2) допускает решение вида

$$v_i^\circ=Vy_i,\qquad \rho^\circ=hR^{-\nu},\qquad E^\circ=E^\circ(t) \tag{1.3}$$

$$\frac{dV}{dt}=0,\quad \frac{dE^\circ}{dt}+N\frac{V}{R}E^\circ=\frac{\nu^2A}{h}\frac{V^2}{R^2}R^\nu(E^\circ)^n \tag{1.4}$$

$$V=\frac{dR}{dt},\quad N=\nu(\gamma-1),\quad A=a_1-\frac{2a_2}{3}+\frac{2a_2}{\nu} \tag{1.5}$$

Переходя в (1.4) к безразмерным переменным, получим

$$\frac{E^\circ}{V^2}=U=\begin{cases}\tau^N[H^{1-n}+(n-1)M(\tau)]^{1/1-n}, & n\neq1\\ \tau^NH\exp[-M(\tau)], & n=1\end{cases} \tag{1.6}$$

$$\tau=\frac{R_0}{R},\quad M=I\nu^2D\int_1^\tau z^{N(n-1)-\nu}dz,\quad I=\frac{V}{|V|},\quad D=\frac{A|V|^{2n-1}}{hR_0^{1-\nu}}$$

Здесь R_0 — значение R в момент времени $t=0$, h и H — постоянные.

В решение (1.3), (1.6) не входит коэффициент теплопроводности вследствие однородности поля E°, но эффекты теплопроводности присутствуют при исследовании устойчивости этого решения относительно возмущений произвольной структуры.

2. Исследуем устойчивость движения (1.3), (1.6) относительно малых возмущений

$$v_i=v_i^\circ+u_i,\qquad \rho=\rho^\circ(1+\Phi),\qquad E=E^\circ(1+W) \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.2), линеаризуя по возмущениям и преобразуя уравнение, получающееся из уравнения движения, сверткой с оператором $\partial/\partial y_i$, придем к системе

$$\begin{gathered}R^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-G\\ R^2\frac{\partial G}{\partial t}=\left(a_1+\frac{4a_2}{3}\right)\frac{(E^\circ)^n}{\rho^\circ}\Delta G+\\ +n\nu ARV\frac{(E^\circ)^n}{\rho^\circ}\Delta W-R^2(\gamma-1)E^\circ(\Delta W+\Delta\Phi)\\ R^2\frac{\partial W}{\partial t}=\gamma a_3\frac{(E^\circ)^n}{\rho^\circ}\Delta W+\nu^2V^2A\frac{(E^\circ)^{n-1}}{\rho^\circ}[(n-1)W-\Phi]-\\ -\left[(\gamma-1)-\frac{2\nu VA}{R}\frac{(E^\circ)^{n-1}}{\rho^\circ}\right]G\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$G=R\frac{\partial u_k}{\partial y_k},\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial y_k\partial y_k} \tag{2.3}$$

Разделяя переменные, будем искать решения уравнений (2.2) в виде разложения по собственным функциям $f^{(k)}$ оператора Δ $(\Delta f^{(k)}=-k^2 f^{(k)})$

$$G=\sum_k G^{(k)}(t) f^{(k)}, \quad \Phi=\sum_k \Phi^{(k)}(t) f^{(k)}, \quad W=\sum_k W^{(k)}(t) f^{(k)} \tag{2.4}$$

Соответствующие разложения для компонент возмущений скорости можно записать, используя (1.2). Значения k для конкретной задачи определяются из граничных условий (масштабному фактору R тогда можно придать смысл расстояния до граничной поверхности).

Подставляя (2.4) в (2.2), придем к уравнениям для амплитуд $G^{(k)}$, $\Phi^{(k)}$, $W^{(k)}$. Далее для определенности будем рассматривать случай сжатия ($V<0$, величина $\tau=R_0/R$ растет со временем); переход к случаю расширения в конечных формулах не вызывает трудностей. Вводя переменные τ, g_1, g_2, g_3, определенные ниже соотношениями (2.6), получим

$$\begin{gathered}
\frac{dg_1}{d\tau}=-k^2\gamma(\gamma-1)\tau^{-2}Ug_2-Bk^2\tau^{-\nu}U^n g_1-Dk^2 n\nu\tau^{-\nu-1}U^n(\gamma g_2-g_3) \\
\frac{dg_2}{d\tau}=g_1-Qk^2\tau^{-\nu}U^n(\gamma g_2-g_3)+D\left\{\frac{2\gamma}{\nu}\tau^{1-\nu}U^{n-1}g_1+\right. \\
\left.+\frac{\nu^2}{\gamma}\tau^{-\nu}U^{n-1}[n(\gamma g_2-g_3)-\gamma g_2]\right\} \\
\frac{dg_3}{d\tau}=g_1
\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$g_1=\frac{G^{(k)}}{R_0 V}, \quad g_2=\frac{\Phi^{(k)}+W^{(k)}}{\gamma}, \quad g_3=\Phi^{(k)} \tag{2.6}$$

$$D=\frac{A|V|^{2n-1}}{hR_0^{1-\nu}}, \quad B=\frac{(a_1+{}^4/_3 a_2)|V|^{2n-1}}{hR_0^{1-\nu}}, \quad Q=\frac{a_3|V|^{2n-1}}{hR_0^{1-\nu}} \tag{2.7}$$

В уравнения (2.5) входит функция $U(\tau)$, определенная в (1.6).

3. Рассмотрим свойства решений уравнений для амплитуд возмущений (2.5). Покажем сначала, что адиабатическое сжатие ($B=Q=D=0$) неустойчиво, причем нарастание возмущений происходит колебательным образом. Для простоты возьмем частный случай одноатомного газа и сферической симметрии ($\gamma={}^5/_3$, $\nu=3$, откуда $N=2$, см. (1.5)). Тогда $U=H\tau^2$ и (2.5) сводится к уравнению для g_1 вида

$$\frac{d^2 g_1}{d\tau^2}+\omega^2 g_1=0, \quad \omega^2=k^2\gamma(\gamma-1)H \tag{3.1}$$

Учитывая, что величина G (ее временная часть g_1), согласно (2.3), включает множитель R, получаем для амплитуды возмущений скорости $u^{(k)}\sim R^{-1}g_1\sim\tau\sin(\omega\tau+\varphi_0)$.

Влияние вязкости и теплопроводности на возникновение неустойчивости можно представить, рассматривая решения системы (2.5) при больших k (больших частотах ω, см. (3.1)) и малых величинах безразмерных параметров Q, B, D, определенных в (2.7). Ниже будет показано, что применимость получаемых результатов не ограничивается указанной областью изменения параметров. Предполагая, что $Q\sim 1/k^2$, $B\sim 1/k^2$, $D\sim 1/k^2$, введем новые параметры q, β, α (соотношения (3.4)) и для применения метода усреднения преобразуем систему (2.5) к переменным ϑ, Z_1, Z_2, Z_3, определенным в (3.5). Разлагая $U(\tau)$ в ряд по степеням D и оставляя в правых частях члены порядка до ε^2 включительно ($\varepsilon=1/\omega$), придем к системе

$$\begin{gathered}\frac{dZ_1}{d\vartheta}=-\Omega^2 Z_2-\varepsilon\beta\sigma Z_1-\varepsilon^2\alpha\left[\nu\gamma NF\Omega^2 Z_2+n\nu\frac{\sigma}{\tau}(\gamma Z_2-Z_3)\right]\\ \frac{dZ_2}{d\vartheta}=Z_1-\varepsilon q\sigma(\gamma Z_2-Z_3)+\varepsilon^2 2\alpha N\frac{\sigma}{\tau\Omega^2}Z_1\end{gathered}\tag{3.2}$$

$$\frac{dZ_3}{d\vartheta}=Z_1,\quad \Omega=\tau^{N/2-1},\quad \sigma=\tau^{nN-\nu},\quad F=\int_1^\tau s^{N(n-1)-\nu}\,ds\tag{3.3}$$

$$\alpha=Dk^2H^n,\qquad \beta=Bk^2H^n,\qquad q=Qk^2H^n\tag{3.4}$$

$$\vartheta=\omega\tau,\qquad Z_1=g_1,\qquad Z_2=\omega g_2,\qquad Z_3=\omega g_3\tag{3.5}$$

Переменная $\tau=\varepsilon\vartheta$ играет здесь роль «медленного» времени.

Для приведения системы (3.2) к стандартному виду [5] производится замена переменных $(Z_1, Z_2, Z_3)\to(M, \varphi, b)$ по формулам, определяемым видом решения при $\varepsilon=0$, $\tau=\mathrm{const}$

$$Z_1=-\Omega M\sin\varphi,\qquad Z_2=M\cos\varphi,\qquad Z_3=M\cos\varphi+b\tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.2), после преобразований получим уравнения для функций $M(\vartheta)$, $\varphi(\vartheta)$, $b(\vartheta)$. Производя в полученных уравнениях усреднение правых частей по переменной φ, получим систему, определяющую M, φ и b в первом приближении. Решения этой системы имеют вид

$$\begin{gathered}M=M_0\tau^{1/2-N/4}\exp\left\{-\delta\int_1^\tau s^{nN-\nu}\,ds\right\},\qquad \varphi=\frac{2\omega}{N}\tau^{N/2}+\varphi_0\\ b=b_0\exp\left\{-q\int_1^\tau s^{nN-\nu}\,ds\right\};\qquad \delta=\frac{\beta+(\gamma-1)q}{2}\end{gathered}\tag{3.7}$$

Рассмотрим на основе (3.7) влияние вязкости и теплопроводности на колебательные моды неустойчивости. Запишем с учетом (3.3), (3.5), (3.6) выражение для амплитуды возмущения скорости $u^{(k)}$ ($u^{(k)}\sim\tau g_1=\tau Z_1$):

$$\begin{gathered}u^{(k)}=C(\tau)\sin\left(\frac{2\omega}{N}\tau^{N/2}+\varphi_0\right)\\ C(\tau)=C_0\tau^{1/2+N/4}\exp\left(-\delta\int_1^\tau s^{nN-\nu}\,ds\right)\end{gathered}\tag{3.8}$$

Колебания, описываемые (3.8), нарастают, если $dC/d\tau>0$. Таким образом, условие возникновения колебательной неустойчивости получается в виде

$$\delta<\frac{1/2+N/4}{\tau^{nN-\nu+1}}\tag{3.9}$$

Из (3.9) следует существование некоторого порогового значения $n_*=(\nu-1)/N=(\nu-1)/\nu(\gamma-1)$ (в случае одноатомного газа и сферической симметрии $n_*=1$). При $n<n_*$ правая часть (3.9) увеличивается со временем и с некоторого момента движение теряет устойчивость. При $n>n_*$ условие возникновения неустойчивости на начальных стадиях сжатия есть $\delta<1/2+N/4$, но в этом случае течение может со временем стабилизироваться, если неустойчивость не успела достаточно развиться. При $n=n_*$ условие нарастания возмущений не зависит от времени и имеет вид $\delta<1/2+N/4$.

Покажем, что область применимости формулы (3.7), описывающей зависимость амплитудного множителя от времени, не ограничивается рассмотренным предельным случаем. Для этого укажем некоторые точные решения уравнений (2.5), существующие при отдельных значениях параметров, а также приведем выражения для M и φ во втором приближении метода усреднения.

Будем рассматривать случай одноатомного газа и сферической симметрии. При $n=1$ и $\beta=q+1$ уравнения (2.5) сводятся к уравнению $g_2''+ +\tau^{-1}(5/3q+1)g_2'+\omega^2 g_2=0$, решение которого выражается через функции Бесселя. Если $q=3/5$, то $g_2=\tau^{-1}\sin(\omega\tau+\varphi_0)$, что совпадает с (3.6), (3.7), поскольку $N=2$, $\delta=1$. При $n=3/2$ и $\beta=q$ из (2.5) получим

$$g_2''+\frac{5}{3}qg_2'+\omega^2 g_2=0 \qquad (3.10)$$

$$g_2=e^{-5/6q\tau}\sin\left[\omega\left(1-\frac{25q^2}{36\omega^2}\right)+\varphi_0\right]$$

Видно, что при выбранных значениях параметров выражение для амплитуды M также совпадает с (3.6), (3.7). Сдвиг частоты, присутствующий в (3.10), описывается формулами второго приближения.

В формулах второго приближения метода усреднения для упрощения записи также ограничимся случаем одноатомного газа и сферической симметрии. Выражения для M и φ имеют вид

$$M=M_1\left[1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{q}{3}-\frac{\beta}{2}\right)\tau^{2n-3}\sin 2\varphi_1\right]$$

$$\varphi=\varphi_1-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{q}{3}-\frac{\beta}{2}\right)\tau^{2n-3}\cos 2\varphi_1$$

$$\varphi_1=\omega\left\{\tau-\varepsilon^2\left[\frac{q^2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{3}-\frac{\beta}{2}\right)^2\right]\int_1^\tau s^{4n-6}\,ds\right\}+\varphi_0$$

$$M_1=M_0\exp\left\{-\delta\int_1^\tau s^{2n-3}\,ds\right\}$$

Формулы для решений получаются на основе (3.6) с учетом членов первого порядка по ε.

Для перехода к случаю, когда основному движению соответствует расширение газа, в конечных формулах следует произвести замену $\tau=\eta^{-1}$ (переменная $\eta=R/R_0$ растет со временем). Из выражения (3.8) получим для амплитуды колебаний C уравнение

$$\frac{dC}{d\eta}=C\left[-\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{4}\right)\eta^{-1}-\delta\eta^{\nu-nN}\right]$$

откуда следует, что в этом случае $dC/d\eta<0$, т. е. возмущения всегда затухают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об интегрировании уравнений одномерного движения газа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. № 5. С. 735.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
3. *Сибгатуллин Н. Р.* Об устойчивости однородных нелинейных пульсаций гравитирующих газовых шаров // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 14–20.
4. *Бурдэ Г. И.* Устойчивость некоторых одномерных неустановившихся движений газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 120–127.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

Пермь

Поступила в редакцию 12.V.1986