

УДК 532.593

**СТРУКТУРА ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ
СО СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ СРЕДНИМ СЛОЕМ**

**АКСЕНОВ А. В., МОЖАЕВ В. В., СКОРОВАРОВ В. Е.,
ШЕРОНОВ А. А.**

Поведение внутренних волн в ограниченном по вертикали канале существенно отличается от волнового движения в безграничной стратифицированной жидкости. В [1] экспериментально и теоретически была исследована фазовая структура внутренних волн в экспоненциально стратифицированном слое жидкости между твердыми горизонтальными плоскостями. Характерной особенностью такого канала является ограниченность фазовой и групповой скоростей каждой моды. Ниже рассматривается случай экспоненциально стратифицированного канала между слоями однородной безграничной жидкости.

1. Теоретический анализ. Рассмотрим плоскую задачу о фазовой структуре внутренних волн в идеальной, несжимаемой, непрерывно стратифицированной жидкости, движущейся с постоянной скоростью. Считаем, что жидкость состоит из трех слоев, причем слой с экспоненциальной стратификацией находится между полубесконечными однородными слоями. В линейном приближении уравнения движения, неразрывности и условие несжимаемости можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, & \rho_0 \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - g\rho \\ \frac{d\rho}{dt} + v \frac{d\rho_0}{dy} + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}, & \rho_0 &= \rho_0(y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ось x направлена вдоль набегающего потока, движущегося с постоянной скоростью U ($U > 0$) (начало системы координат выбрано на невозмущенной нижней границе стратифицированного слоя), ось y направлена вертикально вверх, противоположно направлению действия силы тяжести; g — ускорение силы тяжести; $\rho_0(y)$ — заданное невозмущенное распределение плотности в набегающем потоке; $\rho_0(y) = \rho_0(0) \exp(-N^2 y/g)$ — распределение плотности в среднем слое ($N = \text{const}$ — частота Вайсяля — Брента), $\rho_0(y) = \rho_0(0) \exp(-N^2 H/g)$ — плотность верхнего слоя ($H = \text{const}$ — высота невозмущенного стратифицированного слоя), $\rho_0(y) = \rho_0(0)$ — плотность нижнего слоя; u, v, p, ρ — возмущения компонент вектора скорости (в направлении осей x, y), давления и плотности. В дальнейшем все величины, относящиеся к верхнему, среднему и нижнему слоям, будем обозначать с нижними индексами 1, 2, 3 соответственно.

Систему линейных уравнений (1.1) можно свести к одному уравнению для определения вертикальной составляющей скорости v . В безразмерной

форме в приближении Буссинеска, справедливом при $N^2H/g \ll 1$, имеем [1]

$$\Delta v_1=0, \quad \Delta v_3=0, \quad \left[\frac{d^2}{dt^2} \Delta + \frac{1}{F^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] v_2 = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad F = \frac{U}{NH}$$

Здесь F — внутреннее число Фруда среднего слоя. В качестве линейного масштаба взята высота канала H ; за масштаб времени принято отношение H/U ; масштаб скорости взят равным скорости набегающего потока U .

На границах слоев должно выполняться условие непрерывности нормальной скорости и полного давления. Для вертикальной скорости это условие принимает вид

$$v_1=v_2, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y} \quad (y=1); \quad v_2=v_3, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial v_3}{\partial y} \quad (y=0) \quad (1.3)$$

При этом требуем ограниченности решений в верхнем и нижнем слоях при $|y| \rightarrow \infty$.

Частные решения системы (1.2), удовлетворяющие граничным условиям (1.3) и условию ограниченности, ищем в виде прогрессивной волны

$$v_j = V_j(y, k, \omega) \exp[i(kx - \omega t)], \quad j=1, 2, 3 \quad (1.4)$$

где k, ω — постоянные действительные числа, а V_j — неизвестные функции. Тогда из условия существования отличного от нуля решения для функций V_j получаем зависимость между частотой ω и волновым числом k и соответствующие решения для V_j

$$\operatorname{tg} l = \frac{2|k|l}{l^2 - k^2}, \quad l^2 = k^2 \left[\frac{1}{F^2(\omega - k)^2} - 1 \right]$$

$$V_1 = C \left(\frac{|k| \sin l}{l} + \cos l \right) \exp[|k|(1-y)] \quad (1.5)$$

$$V_2 = C \left[\frac{|k| \sin(ly)}{l} + \cos(ly) \right], \quad V_3 = C \exp(|k|y)$$

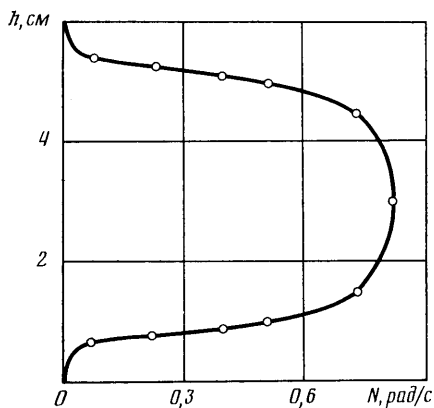
Здесь C — произвольная постоянная. Полученные частные решения называются нормальными волнами или модами [2]. Дисперсионное соотношение для рассматриваемой стратификации в случае $U=0$ получено в [3] в несколько иной форме.

Первое уравнение (1.5) имеет счетное число действительных решений $l_n = l_n(|k|)$, $n=0, 1, 2, \dots$, которые являются строго монотонно возрастающими функциями с выпуклостью вверх. При этом $\pi n \leq l_n < \pi(n+1)$. Следовательно, дисперсионное соотношение состоит из счетного числа ветвей $\omega_n = \omega_n(k, F)$.

В стационарном случае ($\omega=0$) из (1.5) можно найти зависимость волнового числа k от внутреннего числа Фруда F . При $n=0$ волновое число существует при всех значениях внутреннего числа Фруда, а при $n \geq 1$ — при условии $F < (\pi n)^{-1}$. В случае $n \geq 1$ безразмерная длина волны $\lambda = 2\pi/|k|$ больше длины волны для канала с горизонтальными твердыми границами, где $l_n = \pi n$.

2. Экспериментальные результаты. Исследование модовой структуры внутренних гравитационных волн в канале экспоненциально стратифицированной жидкости, заключенной между слоями однородной жидкости, проводилось в лабораторном бассейне с размерами $1,0 \times 0,5 \times 0,25$ м³. Линейная стратификация рабочего слоя жидкости осуществлялась заполнением лабораторного бассейна водным раствором поваренной соли переменной концентрации. Слой жидкости с переменной плотностью и толщиной от 5 до 10 см располагался посредине бассейна. Верхний и нижний слои однород-

ной жидкости имели толщину около 15–20 см. Контроль за вертикальным распределением градиента плотности после заполнения бассейна и измерение величины самого градиента проводились с помощью теневого прибора ИАБ-451. Для работы с тeneвым прибором в боковые стенки бассейна были вмонтированы плоскопараллельные оптические окна диаметром 20 и толщиной 3 см. Чтобы получить наиболее резкий скачок частоты Вэйсяля – Брента на границах канала, заливка бассейна проводилась по возможности быстро, а измерения начинались сразу после заливки. Типичное распределение частоты плавучести N по глубине h одного из каналов, в которых проводились измерения, показано на фиг. 1. Со временем это распределение из-за диффузии сглаживается и толщина канала растет. Для расчета значений



Фиг. 1

внутреннего числа Фруда F произведение Nh вычислялось по площади под кривой $N(h)$. За время измерений зависимость $N(h)$ изменялась незначительно.

Визуализация фазовых картин волновых возмущений в канале проводилась методом темного поля с помощью того же теневого прибора ИАБ-451. Ширина вертикальной щели осветительной части теневого прибора составляла 0,08 мм. В фокальной плоскости объектива приемной части теневого прибора устанавливалась решетка из непрозрачных вертикальных нитей. Это позволяло одновременно фиксировать не только нулевой горизонтальный градиент плотности жидкости, как это делается в методе темного поля, но и ряд дискретных ненулевых горизонтальных градиентов.

Возбуждение отдельных волновых мод осуществлялось горизонтальным движением цилиндра или тела в виде крыла с эллипсоидальным профилем для лучшего

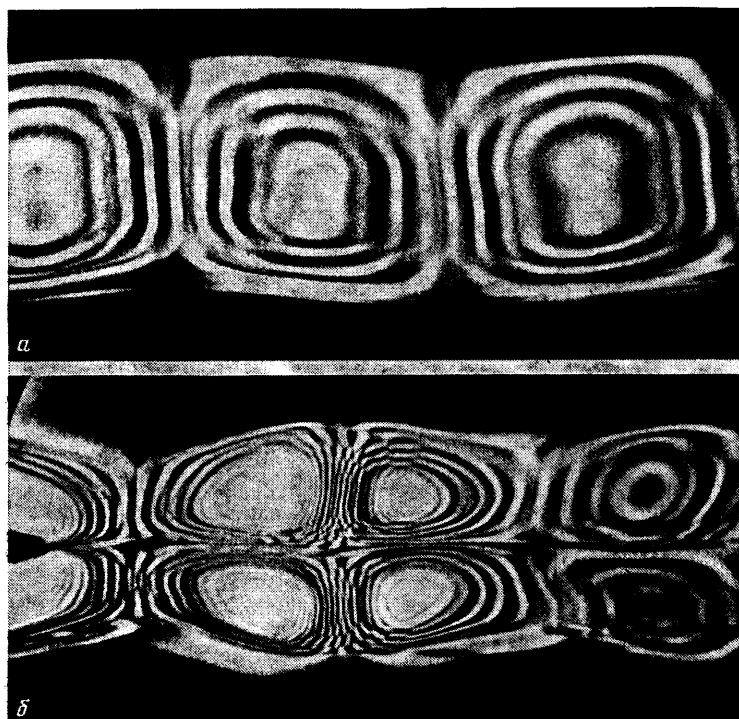
отбегания при относительно больших скоростях движения вдоль канала. Длина используемых цилиндров и тел в виде крыла 210 мм, а диаметры цилиндров от 5 до 10 мм.

Предварительными измерениями была исследована зависимость эффективности возбуждения волнового возмущения отдельной моды от глубины погружения источника возбуждения в канале. С этой целью были измерены амплитуды волны смещения частиц жидкости на фиксированном расстоянии от источника и при фиксированной его скорости от вертикального положения его как внутри канала, так и вне его. Измерения были выполнены для первых двух мод.

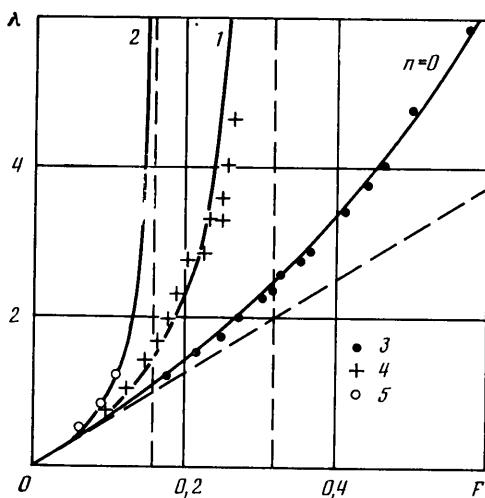
Расчет амплитуд проводился по измерениям расстояния между линиями постоянных горизонтальных градиентов плотности на фазовых картинах волнового поля. Было установлено, что максимальная эффективность возбуждения волновой моды наблюдается при движении цилиндра вблизи нулевых амплитуд вертикальных смещений частиц. Для нулевой моды это границы канала, а для первой — середина канала и его границы и т. д. Минимальная эффективность возбуждения наблюдается при движении цилиндра вдоль пучностей, т. е. максимальных амплитуд вертикальных смещений частиц. Поэтому при исследовании нулевой моды в области чисел Фруда $F < 1/\pi$, где помимо нулевой моды может возбуждаться и первая мода, возбуждение проводилось движением цилиндра на уровнях $H/4$ или $3H/4$. А в области больших чисел Фруда, где существует только нулевая мода, цилиндр двигался вблизи одной из границ канала. Первая мода возбуждалась движением по середине канала, а вторая — на уровне $H/3$.

Типичные фотографии фазовых картин внутренних волн для двух первых мод (нулевой и первой) в канале высотой $H=5$ см и частотой плавучести $N=0,6$ рад/с показаны на фиг. 2. Фотография на фиг. 2, а показывает картину линий постоянных горизонтальных градиентов плотности фрагмента внутренней волны нулевой моды при скорости движения источника $U=1$ см/с ($F=0,33$). На фиг. 2, б показана аналогичная картина для внутренней волны первой моды, возбуждаемая источником, движущимся по середине канала со скоростью $U=0,54$ см/с ($F=0,18$). Обе фотографии получены с использованием в фокальной плоскости объектива решетки с периодом 0,2 мм и диаметром проволочек 0,08 мм. Движение источника внутренних волн на обеих фотографиях справа налево.

По аналогичным фотографиям была исследована зависимость размерной длины волны λ^* от скорости цилиндра при фиксированных значени-



Фиг. 2



Фиг. 3

ях H и N для первых трех мод. Для сравнения с выводами линейной теории, изложенной в первом разделе, все экспериментальные результаты были нанесены на график (фиг. 3) зависимости безразмерной длины волны λ от внутреннего числа Фруда F . На данном рисунке сплошными линиями изображено семейство теоретических зависимостей $\lambda(F)$ для первых трех мод ($n=0, 1, 2$); пунктирные линии являются асимптотами данных кривых. Наклонная асимптота (прямая $\lambda=2\pi F$) является общей для всех кривых при $F \rightarrow 0$. Вертикальные асимптоты — прямые $F=1/(\pi n)$, $n=1, 2, \dots$, определяют границу существования соответствующей моды.

Экспериментальные результаты, полученные для внутренних волн нулевой, первой и второй мод, изображены точками 3–5 соответственно.

Полученные экспериментальные результаты исследования модовой структуры стационарных внутренних волн в стратифицированном канале между слоями однородной жидкости, вызываемых равномерно движущимся плоским телом, показали хорошее совпадение с выводами линейной теории. Основным отличием в поведении внутренних волн в рассматриваемом канале от канала с твердыми горизонтальными плоскостями является наличие низшей моды, которая существует при всех значениях внутреннего числа Фруда. При этом характер поведения высших мод качественно одинаков.

В заключение авторы выражают благодарность А. Т. Онуфриеву за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов А. В., Кириллов В. П., Можжев В. В. и др. Структура внутренних волн в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 106–110.
2. Бреговских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
3. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие при нестационарном движении источника в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 122–130.

Москва

Поступила в редакцию
30.VI.1986