

УДК 532.59

## ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ ЖИДКОСТИ О ДНО НА ДИНАМИКУ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

ХАБАХПАШЕВ Г. А.

При изучении волновых движений в вязкой жидкости основное внимание уделялось затуханию волн, а эффект их торможения практически не рассматривался. Однако в экспериментах (например, [1]) отмечалось, что скорости распространения гравитационных возмущений несколько ниже значений, предсказываемых невязкой теорией. Кроме того, при теоретических исследованиях волновых процессов обычно использовали квазистационарное (пропорциональное скорости) [2] или усредненное (на длине волны) [3–5] трение жидкости о дно. Только в [6] с помощью стандартного метода разложения по малому параметру и преобразования Фурье для толщины слоя получено уравнение Кортевега — де Вриза с дополнительным диссипативным членом типа интеграла Дюамеля. Физический анализ выведенного уравнения в этой работе сделан не был. В дальнейшем проводились лишь численные расчеты [7]. Наиболее полно торможение и затухание как линейных монохроматических, так и слабонелинейных уединенных волн в тонком слое вязкой несжимаемой жидкости изучено в [8]. Результаты последней изложены также в монографии [9].

Целью данной работы является детальный анализ поля скорости вблизи дна и решений модельного волнового уравнения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим слой вязкой несжимаемой жидкости над горизонтальным дном, которое будем считать неограниченным в двух измерениях — в плоскости  $x, y$  (ось  $z$  направлена вертикально вверх). При исследовании плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  (в системе уравнений, описывающей этот процесс, отсутствует не только  $y$ -компонента скорости жидкости, но и производные по координате  $y$ ), уравнения неразрывности и движения запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

Здесь  $u$  и  $w$  — соответственно  $x$ - и  $z$ -компоненты скорости жидкости,  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения.

Воспользуемся приближениями больших длин волн и малости их амплитуды, т. е. будем полагать, что  $h/x_0 \sim \sqrt{\epsilon}$  и  $\Delta h/h \sim \epsilon$ , где  $x_0$  — характерный размер возмущения,  $h$  — глубина слоя,  $\Delta h$  — амплитуда ее возмущения, а  $\epsilon$  — малый параметр. Допустим также, что жидкость первоначально находилась в состоянии покоя. Это дает возможность не учитывать в уравнении (1.3) члены  $u \partial w / \partial x$ ,  $w \partial w / \partial z$  и  $\nu \partial^2 w / \partial x^2$ , имеющие третий порядок малости. Пусть, кроме того, время развития пограничного слоя на всю толщину жидкости много больше характерного времени волнового процесса  $t_0 (t_0 \nu / h^2 \sim \epsilon^2)$ . Тогда в уравнении (1.2) можно пренебречь членом

$v\partial^2 u/\partial x^2$ , а в уравнении (1.3) — членом  $v\partial^2 w/\partial z^2$ , которые после деления на соответствующие гидростатические члены оказываются третьего и четвертого порядка малости. Таким образом, получаем систему уравнений движения в упрощенной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (1.5)$$

При сделанных предположениях в уравнении (1.4) члены  $\partial u/\partial t$ ,  $(1/\rho)(\partial p/\partial x)$ , а вблизи дна и  $v\partial^2 u/\partial z^2$  важнее, чем нелинейные члены. Аналогично в уравнении (1.5) основными членами являются  $(1/\rho)(\partial p/\partial z)$  и  $g$ . Поэтому для решения задачи в первом приближении достаточно взять линейную систему уравнений движения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (1.7)$$

Уравнения (1.4) и (1.5) будут необходимы при дальнейшем анализе.

**2. Определение поля скорости жидкости и вертикального профиля давления.** Из уравнения (1.7) с учетом граничного условия на свободной поверхности слоя ( $p=0$  при  $z=h$ ) находим вертикальный профиль давления

$$p = \rho g(h-z) \quad (2.1)$$

Поверхностным натяжением пока пренебрегаем, так как оно дает поправки следующего порядка малости (число Вебера  $We \leq \epsilon$ ). С помощью (2.1) уравнение движения (1.6) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

Будем искать решение в форме  $u = v(t, z)f(x)$  и применим к уравнению (2.2) преобразование Лапласа по времени

$$\frac{\partial^2 V(s, z)}{\partial z^2} - \frac{s}{v} V(s, z) = \frac{H(s, x)}{vf(x)} \equiv G(s) \quad (2.3)$$

Здесь  $V(s, z)$  и  $H(s, z)$  — соответственно изображения  $v(t, z)$  и  $g\partial h(t, x)/\partial x$ . Считается также, что  $v=0$  при  $t=0$ . Правая часть этого уравнения есть функция только переменной  $s$ , так как левая его часть не зависит от координаты  $x$ . Решением уравнения (2.3), удовлетворяющим граничным условиям  $V=0$  при  $z=0$  и  $\partial V/\partial z=0$  при  $z=h$ , является

$$V(s, z) = G(s) \frac{v}{s} \left[ \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{v}} z\right) - 1 + \frac{2 \operatorname{sh}(\sqrt{s/v} z)}{1 + \exp(\sqrt{s/v} 2h)} \right] \quad (2.4)$$

При  $h \gg \sqrt{v/s}$  в формуле (2.4) можно пренебречь последним слагаемым в квадратных скобках. Таким образом, профиль горизонтальной составляющей скорости оказывается почти «заполненным».

Профиль нормальной компоненты скорости жидкости, найденный из линейной задачи при пренебрежении диссипацией и удовлетворяющий условию «непротекания» на дне ( $w=0$  при  $z=0$ ), хорошо известен (например, [10]):  $w = w_0 \operatorname{sh}(kz)$ . Величина  $w_0$  легко определяется с помощью кинематического условия на свободной поверхности слоя жидкости ( $w =$

$=\partial h/\partial t$  при  $z=h$ )

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\operatorname{sh}(kz)}{\operatorname{sh}(kh)} \approx \frac{\partial h}{\partial t} \frac{z}{h} \quad (2.5)$$

так как благодаря приближению длинных волн можно ограничиться лишь первыми членами разложений гиперболических синусов в ряд Тейлора. Из предположений  $\Delta h \ll h$  и  $h \gg \sqrt{vt_0}$  следует, что учет слабой нелинейности возмущений и тонкого пограничного слоя не должен заметно изменить выражение (2.5).

Случай  $h \gg \sqrt{vt_0}$  не только характерен для большинства реальных ситуаций, но и интересен одним нестационарным эффектом. Рассмотрим профиль горизонтальной составляющей скорости жидкости вблизи дна, т. е. при  $z \ll \sqrt{v/s}$ . Для этого в формуле (2.4) разложим экспоненту в ряд Тейлора в окрестности точки  $z=0$  и ограничимся первыми двумя членами. В результате приходим к более простой зависимости:  $V(s, z) = -z\sqrt{v/s}G(s)$ . Применяя к этому соотношению обратное преобразование Лапласа, получаем для продольной компоненты скорости выражение типа свертки

$$u(t, x, z) = -\frac{gz}{\sqrt{\pi v}} \int_0^t \frac{\partial h(t-t_i, x)}{\partial x} \frac{\partial t_i}{\sqrt{t_i}} \quad (2.6)$$

Следовательно, такое движение жидкости относится к процессам «памятью». Действительно, вычисление интеграла Дюамеля, входящего в правую часть формулы (2.6), требует знания всей предыстории. Но значения  $\partial h/\partial x$ , соответствующие моменту времени  $t_i \ll t$ , суммируются с большим «весом», чем величины  $\partial h/\partial x$  при  $t-t_i \ll t$ . Поэтому при распространении уединенных возмущений типа «горб» с достаточно крутым задним фронтом горизонтальная составляющая скорости жидкости в придонной области сменит направление. Этот эффект обусловлен тем, что на склоне волны продольная компонента градиента давления действует против возмущения скорости.

Таким образом, при прохождении гравитационных волн возможно наблюдение отрыва тонкого пристенного слоя и возникновения у дна зоны возвратного течения. В экспериментальных исследованиях этот вопрос не изучался.

Для нахождения зависимости  $p$  от  $z$  достаточно подставить выражение (2.5) в закон сохранения нормальной компоненты импульса (1.5), проинтегрировав который по  $z$ , получаем

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

Величина  $p_0$  определяется с помощью граничного условия на свободной поверхности слоя жидкости ( $p = -\sigma \partial^2 h/\partial x^2$  при  $z=h$ , где  $\sigma$  — поверхностное натяжение). В итоге

$$p = \rho g(h-z) - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \rho \frac{h}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

т. е. к обычным гидростатическому и капиллярному членам добавилась параболическая поправка, связанная с учетом инерции слоя жидкости.

**3. Вывод волнового и эволюционного уравнений для толщины слоя.** Подставляя в уравнение (1.4) вертикальный профиль давления (2.7), получаем уравнение движения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h}{2} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности (1.1) и уравнение движения (3.1) по координате  $z$  от 0 до  $h$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \langle u \rangle h}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u \rangle h}{\partial t} + h_0 \frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial x} + c_0^2 \frac{\partial h}{\partial x} + gh' \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h_0^2}{3} \frac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial x} - \\ - \frac{\sigma h_0}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = -v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь угловыми скобками помечены средние по толщине слоя жидкости значения величин,  $h_0$  — невозмущенное значение глубины слоя,  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  — скорость распространения линейных волн в идеальной мелкой воде, при пренебрежении поверхностным натяжением,  $h' = h - h_0$ . При выводе уравнения (3.3) в гидродинамическом нелинейном члене, в коэффициентах при инерционном и капиллярном членах  $h$  заменено на  $h_0$ , так как опущенные поправки имеют третий и четвертый порядок малости. Кроме того, использован тот факт, что трение на свободной поверхности отсутствует.

Получение в уравнении движения дисперсионного члена со второй производной по времени является принципиальным моментом, так как именно в этой форме оно соответствует приближению Буссинеска (например, [11]). В [4] учет влияния инерции слоя жидкости был проведен подобно тому, как это сделано в данной работе. Однако, воспользовавшись преобразованием Фурье, автор работы [4] нашел менее точный вид дисперсионного члена  $-c_0^2 \partial^3 h / \partial x^3$  вместо  $\partial^3 h / \partial t^2 \partial x$ . Форма записи инерционного члена существенно сказывается на зависимости фазовой скорости от длины волны. Это утверждение будет проиллюстрировано ниже.

Продифференцировав закон сохранения массы (3.2) по времени, а закон сохранения горизонтальной составляющей импульса (3.3) по координате  $x$  и вычитая второй из первого, находим для возмущений свободной поверхности уравнение волнового типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{3}{2} g \frac{\partial^2 [(h')^2]}{\partial x^2} - \frac{h_0^2}{3} \frac{\partial^4 h}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\sigma h_0}{\rho} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = \\ = -g \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^t \frac{\partial h(t-t_i, x)}{\partial x} \frac{dt_i}{\sqrt{t_i}} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

При выводе уравнения (3.4) считается, что  $\langle u^2 \rangle = \langle u \rangle^2 = (gh'/c_0)^2 = = g(h')^2/h_0$ , так как опущенные слагаемые имеют порядок малости не меньше третьего. Трение о дно определено с помощью формулы (2.6). При  $\sigma=0$  и  $v=0$  уравнение (3.4) становится похожим на модифицированное уравнение Буссинеска [12], которое учитывает лишь слабую нелинейность возмущений и длинноволновую инерцию колебательной системы.

Решениями уравнения (3.4) являются волны, которые могут бежать вдоль оси  $x$  в обе стороны. В этом заключается одно из преимуществ волновых уравнений по сравнению с эволюционными.

Если возмущение распространяется в направлении роста координаты  $x$ , то в членах второго порядка малости можно заменить  $\partial/\partial t$  на  $-c_0 \partial/\partial x$  и наоборот. Таким образом, дифференциальный оператор  $\partial/\partial t - c_0 \partial/\partial x$  выделяется не только из линейных волновых членов, но и из нелинейного, инерционного, капиллярного и диссипативного. В результате уравнение (3.4) запишется в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + c_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3g}{2c_0} h' \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h_0^2 c_0}{6} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \right.$$

$$-\frac{\sigma h_0}{2\rho c_0} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{g}{2c_0} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t \frac{\partial h(t-t_i, x)}{\partial x} \frac{dt_i}{\sqrt{t_i}} = 0$$

Проинтегрировав данное уравнение вдоль прямой  $\xi=t-x/c_0$ , приходим к эволюционному уравнению для толщины слоя жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + c_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3g}{2c_0} h' \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{h_0}{2} \left( \frac{h_0 c_0}{3} - \frac{\sigma}{\rho c_0} \right) \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \\ = \frac{g}{2c_0} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t \frac{\partial h(t-t_i, x)}{\partial x} \frac{dt_i}{\sqrt{t_i}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

При  $v=0$  уравнение (3.5) сводится к уравнению типа уравнения Кортевега — де Вриза (например, [13]).

**4. Дисперсионный анализ модельных уравнений.** Если уравнение (3.4) линеаризовать, решение искать в виде  $h=h_0+\Delta h \exp(i\omega t-ikx)$ , где  $\omega$  — циклическая частота,  $k$  — комплексное волновое число, нижний предел интегралов заменить на  $-\infty$ , а верхний на  $+\infty$ , то находим дисперсионное соотношение следующего вида:

$$\omega^2 - k^2(c_0^2 - g\sqrt{v/i\omega} - 1/3 h_0^2 \omega^2 + k^2 \sigma h_0 / \rho) = 0 \quad (4.1)$$

Аналогичным способом из уравнения (3.5) получаем

$$\omega - k [c_0 - 1/2 g \sqrt{v/i\omega} / c_0 - 1/2 k^2 h_0 (1/3 h_0 c_0 - \sigma / \rho c_0)] = 0 \quad (4.2)$$

С точностью до членов второго порядка малости выражение (4.1) согласуется с дисперсионным соотношением, приведенным в монографии [14].

Формулы для фазовой скорости имеют довольно громоздкий вид, а потому рассмотрим здесь только частные случаи. Для идеальной жидкости из равенств (4.1) и (4.2) имеем

$$c^* = \sqrt{\frac{1+k^2 \sigma / \rho g}{1+1/3 k^2 h_0^2}}, \quad c^* = \frac{c}{c_0}, \quad c = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} \quad (4.3)$$

$$c^* = 1 - \frac{k^2 h_0^2}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{\rho g h_0^2} \right) \quad (4.4)$$

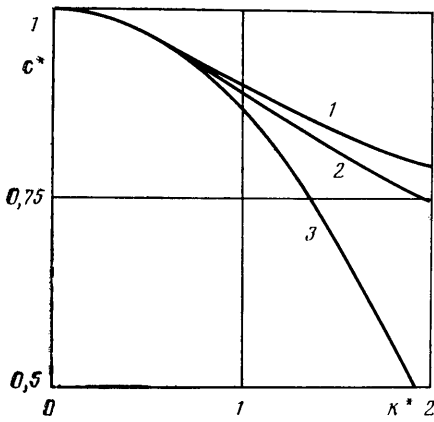
Сравнение дисперсионных кривых осуществлено на фиг. 1. Здесь сплошной линией 1 изображено точное решение линейной задачи

$$c^* = \sqrt{(1+k^2 \sigma / \rho g) \operatorname{th}(k h_0) / k h_0}$$

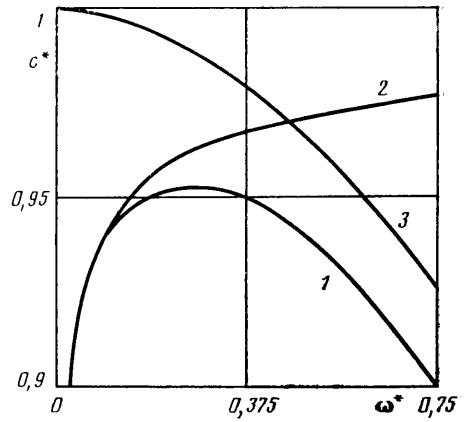
линией 2 — зависимость (4.3), 3 — (4.4), а  $k^* = k h_0$ . При этом полагалось, что  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $h_0 = 10$  мм,  $\sigma = 70$  мН/м. Уравнение волнового типа справедливо в существенно большем диапазоне длин волн, чем эволюционное уравнение. Так, при  $k h_0 = 2$  моделирование с помощью модифицированного уравнения Буссинеска приводит к ошибке, не превышающей 6%, а в результате использования уравнения Кортевега — де Вриза отклонение от точного решения достигает почти 40%.

В случае вязкой жидкости волновое число является комплексным, и удобнее представить фазовую скорость в зависимости от частоты. При пренебрежении поверхностным натяжением

$$\begin{aligned} c^* = \left( 1 - \frac{2\omega^2 h_0}{3g} - \sqrt{\frac{2v}{\omega h_0^2}} \right)^{1/4} \frac{1}{\cos(\varphi/2)} \\ \varphi = \arctg \left[ \frac{1 - \omega^2 h_0 / 3g}{\sqrt{v/2\omega h_0^2}} - 1 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Поведение дисперсионных кривых в наиболее интересном интервале частот показано на фиг. 2. Здесь кривой 1 изображено решение соотношения (4.1), кривой 2 — зависимость (4.5) без учета инерции слоя жидкости, кривой 3 — зависимость (4.3), а  $\omega^* = \omega h_0 / c_0$ . Эти вычисления сделаны при  $\nu = 10 \text{ мм}^2/\text{с}$ ; остальные параметры равны тем же численным значениям, что и при расчетах, результаты которых приведены на фиг. 1. Данный график позволяет сделать вывод, что в вязкой жидкости происходит существенное уменьшение фазовой скорости. Кроме того, при  $\omega^* > 0,1$  нельзя пренебрегать инерционными и капиллярными эффектами.

**5. Качественный анализ распространения нелинейных возмущений и численное моделирование.** В случае идеальной жидкости одним из частных решений уравнения (3.4) является уединенная волна, распространяющаяся с постоянной скоростью и неизменной формой

$$h = h_0 + \Delta h_0 \operatorname{sech}^2[(x - Ut)/l]$$

$$U = c_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta h_0}{h_0}}, \quad l = \frac{2h_0}{c_0} \sqrt{\frac{1}{\Delta h_0} \left( \frac{h_0 U^2}{3} - \frac{\sigma}{\rho} \right)} \quad (5.1)$$

где  $\Delta h_0$ ,  $U$  и  $l$  — соответственно амплитуда, скорость и ширина солитона. При  $h_0 U^2 / 3 < \sigma / \rho$  имеет место уединенное возмущение типа «впадина» ( $\Delta h_0 < 0$ ). Если вязкость отсутствует, то уединенные решения существуют и у уравнения (3.5). Но характеристики солитона определяются другими формулами

$$h = h_0 + \Delta h_0 \operatorname{sech}^2[(x - U_0 t)/l_0]$$

$$U_0 = c_0 \left( 1 + \frac{\Delta h_0}{2h_0} \right), \quad l_0 = 2h_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta h_0} \left( \frac{h_0}{3} - \frac{\sigma}{\rho c_0^2} \right)} \quad (5.2)$$

Из сравнения формул (5.1) и (5.2) находим, что скорость уединенной волны модифицированного уравнения Буссинеска меньше скорости солитона уравнения Кортевега — де Вриза (при одинаковых амплитудах), а ширина, наоборот, больше. В [15] подобные решения были получены не только для возмущений свободной поверхности, но и для возмущений границы раздела двухслойной жидкости. Там же было продемонстрировано, что солитонные решения уравнения волнового типа лучше согласуются с экспериментальными данными, чем зависимости, предсказываемые эволюционным уравнением.

В случае вязкой жидкости поиск аналитических решений затруднен. Тем не менее ситуация поддается качественному исследованию. Разложим функцию  $h(t - t_i, x)$  входящую в подынтегральное выражение урав-

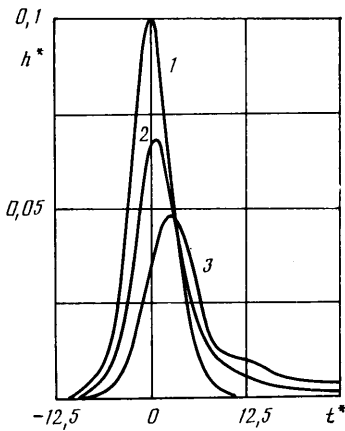
нения (3.4), в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_i=0$

$$h(t-t_i, x) = h(t, x) - \frac{\partial h(t, x)}{\partial t} t_i + \frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial t^2} \frac{(t_i)^2}{2} - \dots \quad (5.3)$$

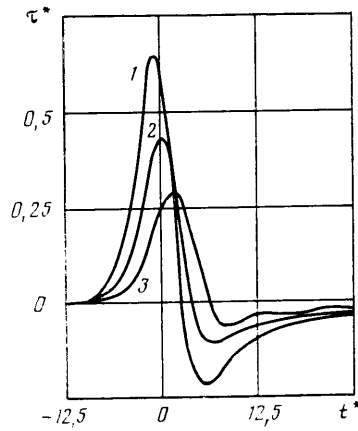
Данный ряд будет быстро сходиться для волн типа «ступенька» достаточно большой протяженности. Поэтому если ограничиться первыми тремя членами, подставить разложение (5.3) в уравнение (3.4) и взять интеграл, то имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \left( c_0^2 - 2g \sqrt{\frac{vt}{\pi}} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{3}{2} g \frac{\partial^2 [(h')^2]}{\partial x^2} - \frac{2}{3} g \sqrt{\frac{vt^3}{\pi}} \frac{\partial^3 h}{\partial t \partial x^2} - \\ - \left( \frac{h_0^2}{3} - \frac{g}{5} \sqrt{\frac{vt^5}{\pi}} \right) \frac{\partial^4 h}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\sigma h_0}{\rho} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Анализируя эту запись, легко определить, что по мере распространения возмущения его скорость будет снижаться, а ширина фронта — уве-



Фиг. 3



Фиг. 4

личиваться. Кроме того, будет уменьшаться «эффективная» инерция слоя жидкости. Уточним, что в уравнении (5.4) время меняется от нуля до  $t_0$ , где  $t_0$  — время прохождения фронта волны мимо точки с координатой  $x$ . Очевидно, что такие же выводы можно сделать, если разложение (5.3) подставить в уравнение (3.5).

Для уединенных возмущений типа солитона ряд (5.3) расходится и результаты могут быть получены только путем численного интегрирования волнового уравнения (3.4) или эволюционного уравнения (3.5). Перейдем в систему отсчета  $t' = t - x/U$  и  $x' = x$ , в которой  $U \partial / \partial x' \ll \partial / \partial t'$ . Проинтегрировав уравнение (3.4) один раз по  $t'$  и домножив все его члены на  $U/2c_0^2$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{U^2 - c_0^2 - 3gh'}{2Uc_0^2} \frac{\partial h}{\partial t'} - \frac{h_0^2}{2Uc_0^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{\sigma}{\rho h_0 U^2} \right) \frac{\partial^3 h}{(\partial t')^3} + \\ + \frac{g}{2Uc_0^2} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{-x'/U}^{t'} \frac{\partial h(t' - t_i', x')}{\partial t_i'} \frac{dt_i'}{\sqrt{t_i' + x'/U}} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Внешне это уравнение похоже на эволюционное уравнение (3.5), но при  $v=0$  солитонные решения уравнения (5.5) точно такие же, как и у волнового уравнения (3.4), т. е. совпадают с зависимостями (5.1).

На фиг. 3 показано изменение формы уединенной волны, определенное с помощью уравнения (5.5). Здесь  $h^* = h'/h_0$ ,  $t^* = t'c_0/h_0$ , кривые 1–3 соответствуют  $x^* = x'/h_0 = 0, 40, 80$ . В рассматриваемой системе отсчета при  $v=0$  солитонное решение (кривая 1) не меняло бы не только своей формы, но и местоположения. Наличие вязкости приводит к затуханию возмущений, уменьшению их скорости и образованию «хвоста» за основной волной. Аналогичные эффекты характерны и для двухслойной жидкости [16].

На фиг. 4 представлена эволюция профиля трения о дно, соответствующего распространению возмущения, изображенного на фиг. 3. Здесь  $\tau^* = \tau_0 h_0 / \mu c_0$ , где  $\tau_0 = \mu \partial u / \partial z$  при  $z=0$ , а  $\mu$  — динамическая вязкость. Численные значения параметров были такими же, как и при расчетах, результаты которых приведены на фиг. 1 и 2. Хорошо видна смена знака трения о дно. Это является количественным подтверждением предположения о том, что при прохождении гравитационных волн возможно наблюдение отрыва тонкого пристенного слоя и возникновения у дна зоны возвратного течения.

Сформулируем основные результаты и выводы данной работы.

В вязкой несжимаемой жидкости детально изучено поле скорости, вызванное распространением длинных поверхностных возмущений. Предсказана возможность наблюдения отрыва тонкого пристенного слоя и возникновения у дна зоны возвратного течения.

Для системы уравнений неразрывности и движения разработан достаточно простой и физически наглядный метод сведения ее к одному уравнению. Получены волновое и эволюционное уравнения, учитывающие слабую нелинейность возмущений, длинноволновую инерцию слоя, поверхностное натяжение и нестационарное трение о дно.

С помощью дисперсионного анализа показано, что уравнение волнового типа справедливо в существенно большем диапазоне длин волн, чем эволюционное уравнение, а наличие вязкости приводит к значительному уменьшению фазовой скорости. Путем численного решения модельного интегродифференциального уравнения продемонстрированы затухание уединенного возмущения, уменьшение его скорости, образование «хвоста» за основной волной и смена знака трения о дно.

В заключение автор выражает признательность В. Е. Накорякову за постоянное внимание к этой работе, а также благодарит А. А. Борисова, П. И. Гешева, Е. Н. Пелиновского, С. А. Рыбака и И. Р. Шрейбера за полезное обсуждение ряда вопросов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hammack J. L., Segur H. The Korteweg – de Vries equation and water waves. Pt 2. Comparison with experiments // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. № 2. P. 289–314.
2. Пелиновский Е. Н. О поглощении нелинейных волн в диспергирующих средах // ПМТФ. 1971. № 2. С. 68–71.
3. Keulegan G. H. Gradual damping of solitary waves // J. Res. Nat. Bureau Standards. 1948. V. 40. № 6. P. 487–498.
4. Chester W. Resonant oscillations of water waves. I. Theory // Proc. Roy. Soc. London. A. 1968. V. 306. № 1484. P. 5–22.
5. Ott E., Sudan R. N. Damping of solitary waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 6. P. 1432–1434.
6. Kakutani T., Matsuuchi K. Effect of viscosity on long gravity waves // J. Phys. Soc. Jap. 1975. V. 39. № 1. P. 237–246.
7. Matsuuchi K. Numerical investigations of long gravity waves under the influence of viscosity // J. Phys. Soc. Jap. 1976. V. 41. № 2. P. 681–687.
8. Хабахнашев Г. А. Торможение и затухание гравитационных волн в тонком слое вязкой жидкости // Гидродинамические течения и волновые процессы. Новосибирск, 1983. С. 41–55.



9. *Нагоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР. 1983. 237 с.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
12. *Боголюбский И. Л.* Модифицированное уравнение нелинейной струны и неупругое взаимодействие солитонов // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24. № 3. С. 184—186.
13. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
14. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
15. *Хабахпашев Г. А.* Динамика уединенных волн на границе раздела и свободной границе двухслойной жидкости // Гидродинамика и акустика одно- и двухфазных потоков. Новосибирск, 1983. С. 107—113.
16. *Хабахпашев Г. А.* Влияние вязкости на эволюцию возмущений свободной поверхности и границы раздела двухслойной жидкости // Гидродинамика и тепло-массообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск, 1985. С. 126—145.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
28.IV.1986