

УДК 532.546

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ НИЗОВОГО ОТКОСА ГРУНТОВОЙ ПЛОТИНЫ ПО УСЛОВИЯМ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ПРОЧНОСТИ НА ГРАНИЦЕ ОТКОСА**

**ИЛЬИНСКИЙ Н. Б., ЯКИМОВ Н. Д.**

Как известно, проницаемые откосы, через которые высачивается жидкость, являются одними из наиболее ответственных элементов грунтовых плотин, ядер каменнонабросных плотин, а также котлованов, карьеров и т. п. При проектировании таких откосов необходимо добиваться выполнения условий местной устойчивости. В определенном смысле наиболее выгодным был бы откос, находящийся во всех точках в предельно допустимом состоянии, без излишнего запаса по местной устойчивости. Для построения решений такого рода задач предлагается использовать метод теории обратных краевых задач (ОКЗ) [1, 2], суть которого — не проверять прочность откоса для заданного очертания профиля плотины, а определять форму откоса, точно удовлетворяющую условию устойчивости.

Идея отыскания откоса, находящегося в предельном по прочности состоянии, не нова (см., например, [3]). Так что сам подход к отысканию равнопрочного по высоте откоса вполне естествен. Однако строго обоснованные математические решения таких задач авторам не известны.

В настоящей работе предложена постановка обратных краевых задач об определении формы откоса земляной плотины (или ее ядра), при которой условия местной фильтрационной прочности выполняются на всем откосе точно, без излишнего запаса. Рассмотрены варианты таких условий для случаев суффозии, местного выпора, контактной суффозии. Установлена форма границы области в плоскости годографа скорости и показана возможность ее использования для построения решения. Обоснованы пути аналитического и численного решения. Показано, что задачи с условием, аналогичным возникающему при выпоре, могут быть решены аналитическим методом П. Я. Полубариновой-Кочкиной. Для частных случаев условий получены решения в явном виде и приведены результаты числовых расчетов.

**1. Общие положения.** Задачи построения откосов, удовлетворяющих условиям местной фильтрационной прочности, возникают при расчете на суффозию, местный выпор, контактную суффозию, устойчивость откоски, пригрузки, укрепляющих плит (в определенных случаях) и т. п. При этом откосы могут быть разные: откосы земляных плотин, откосы противофильтрационных ядер набросных плотин, укрепленные откосы и пр. Вопросы общей устойчивости откосов (например, общего оползания), когда нужно учитывать напряженное состояние в области, ниже не рассматриваются.

Остановимся на достаточно широком круге задач, в которых условие прочности для произвольной точки откоса удается записать в явном виде через угол наклона откоса и составляющие скорости фильтрации в этой точке (если считать заданными параметры, характеризующие свойства материалов и т. п.). Кроме того, на откосе будем задавать обычное краевое условие для задач фильтрации — условие, эквивалентное постоянству давления (случай постоянства напора, т. е. затопленного откоса, рассматривается значительно проще).

Требуется определить форму откоса так, чтобы условие прочности выполнялось точно, без излишнего запаса, т. е. в форме равенства.

**2. Варианты условий на откосе.** Для определенности будем считать материал плотины в области фильтрации однородным изотропным, филь-

трацию установившейся, плоской, линейной. Из условия постоянства давления на откосе для касательной составляющей  $v_s$  скорости фильтрации  $v$  имеем

$$v_s = -\kappa \sin \alpha \quad (2.1)$$

где  $\kappa$  — коэффициент фильтрации,  $\alpha$  — угол, образованный касательной к откосу и горизонтом (фиг. 1).

Рассмотрим второе крайнее условие, соответствующее условию прочности, для случаев суффозии, выпора и контактной суффозии.

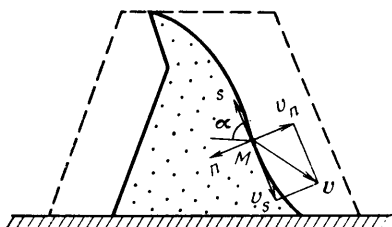
*Суффозия.* Условие прочности для заданного грунта в [4] указано в виде

$$|\nabla h| \leq I_* \quad (2.2)$$

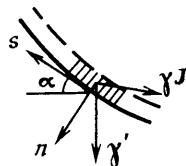
где  $\nabla$  — градиент,  $h$  — пьезометрический напор,  $I_*$  — заданная постоянная. Из (2.2) с учетом (2.1) следует  $(\partial h / \partial n)^2 \leq I_*^2 - \sin^2 \alpha$ . Как было указано, в обратной постановке условие прочности принимается в виде равенства

$$v_n = -\kappa \sqrt{I_*^2 - \sin^2 \alpha} \quad (2.3)$$

Тогда по условиям (2.1) и (2.3) отыскивается откос, на котором скорость фильтрации постоянна:  $v = \kappa I_*$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Вообще говоря, суффозия — не «краевое» явление, но предложенная постановка оправдывается, во-первых, тем, что обеспечивает суффозионную прочность грунта вблизи самого откоса (где это наиболее важно), во-вторых, применяемые ниже методы отыскания решения построением области в плоскости годографа скорости обеспечивают выполнение условия (2.2) и во всей области течения.

*Местный фильтрационный выпор грунта.* Физический смысл выпора заключается в том, что элемент грунта из-за действия сил фильтрации уже не удерживается силами трения (сцепление обычно не учитывают) и скользит по откосу.

В [3] при выводе формул для выпора выбирался элемент грунта вблизи откоса и считалось, что этот элемент не испытывает усилий (по скелету) на торцах (или эти усилия взаимно уравновешены) и удерживается на нижележащем слое за счет трения. Кроме трения действуют градиент напора (фильтрация) и сила тяжести (фиг. 2). Полученная в [3] формула (4.5) при  $k_s' = 1$  (случай предельного равновесия) после преобразований может быть представлена в виде

$$v_n = -\frac{\kappa}{\gamma} \left( \gamma' \cos \alpha - \frac{\gamma''}{k} \sin \alpha \right), \quad k = \operatorname{tg} v \quad (2.4)$$

где  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  — объемные веса воды, материала с учетом взвешивания водой и смоченного материала,  $v$  — угол трения, причем  $v_n < 0$ .

Вместе с (2.1) соотношение (2.4) дает искомые условия на откосе. В принципе в (2.4) можно также учесть силы сцепления, но решение усложнится. Обычно эти силы не учитываются [3].

*Контактная суффозия на границе с крупнозернистым материалом* (с обратным фильтром, ядра с упорной призмой и т. д.). По формулам

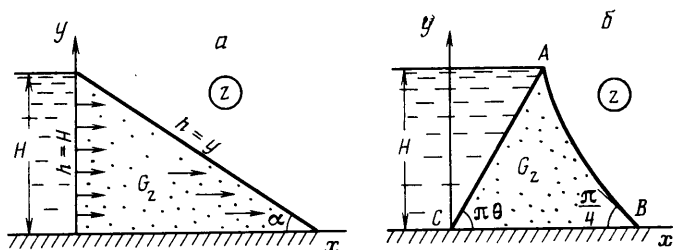
(4)–(29) и (4)–(32) из [3] критерий прочности в этом случае имеет вид

$$I_n - (\gamma'/\gamma) \cos \alpha \leq \beta_* \quad (2.5)$$

где  $I_n$  — нормальная составляющая градиента напора  $I = \nabla h$ , параметр  $\beta_*$  определяется свойствами грунтов и не зависит от  $\alpha$  и  $I$ . Из (2.5) следует краевое условие

$$v_n = -\kappa [\beta_* + (\gamma'/\gamma) \cos \alpha] \quad (2.6)$$

**3. Аналитические методы решения, общий подход.** В силу принятой математической модели в рассматриваемых задачах в области течения  $G_z$  существуют аналитические функции  $w(z)$  и  $\omega = dw/dz$ ; здесь  $z = x + iy$ ;  $x, y$  — декартовы координаты плоскости течения,  $w$  — комплексный потенциал течения. При этом в плоскости переменной  $\omega$  можно найти кривую, которой должен принадлежать образ неизвестного участка, так как по



Фиг. 3

исходным данным известны два (скалярных) условия, задающих вектор скорости на нем в функции параметра  $\alpha$  — угла наклона касательной к участку. Поэтому если рассматривать схемы плотин с известными образами остальных участков в плоскости  $\omega$  (кривых депрессии, кусочно-прямолинейных откосов и непроницаемых границ), то в плоскости  $\omega$  определится и область  $G_\omega$ . После построения  $G_\omega$  для каждой точки ее границы можно указать угол наклона касательной к границе в соответствующей точке, т. е. на всей границе  $G_\omega$  будет задан аргумент функции  $dz/d\omega$  или, если найдено отображение  $\zeta(\omega)$  на вспомогательную полу-плоскость  $\text{Im } \zeta > 0$ , функции  $dz/d\zeta$ .

Далее можно, например, решить задачу Шварца для функции  $-i \ln(dz/d\omega)$  (или  $-i \ln(dz/d\zeta)$ ) и, найдя  $dz/d\omega$  (или  $dz/d\zeta$ ), построить область  $G_z$  интегрированием, а затем определить остальные элементы решения. Конечно, это лишь один из возможных путей решения; в зависимости от особенностей конкретной задачи может дополнительно потребоваться определение каких-то параметров, выполнение условий разрешимости и т. п. С точки зрения математической теории ОКЗ эти задачи достаточно стандартны. Рассмотрим некоторые конкретные случаи.

**4. Простейший случай.** Рассмотрим перемышку с вертикальным верховым откосом на горизонтальном водоупоре и «сухим» нижним бьефом, у которой низовой откос прямолинейен (фиг. 3, а). В такой плотине градиент напора  $I$  направлен горизонтально и постоянен в  $G_z$ :  $I = \text{tg } \alpha$ , поэтому профиль этой плотины будет решением рассматриваемой обратной задачи, если правильно определить  $\alpha$  по условию прочности.

Для случая *суффозии* (см. разд. 2)  $\text{tg } \alpha = I_*$  или

$$\alpha = \text{arctg } I_* \quad (4.1)$$

Для задачи о *выпоре*, учитывая, что здесь  $v_n = -|v| \sin \alpha$ ,  $|v| = \kappa I$ , из (2.4) после выкладок получим

$$\text{tg } \alpha = \left[ \left( \frac{\gamma''}{2k\gamma} \right)^2 + \frac{\gamma'}{\gamma} \right]^{1/2} - \frac{\gamma''}{2k\gamma} \quad (4.2)$$

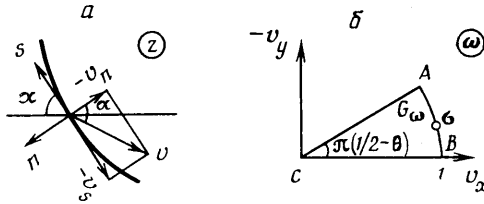
В частном случае  $k=\infty$  (см. ниже) будет  $\operatorname{tg} \alpha = (\gamma'/\gamma)^{1/2}$ .

*Контактная суффозия:* подставляя снова выражение  $v_n$  в (2.6) и обозначая  $\gamma''/\gamma = \beta_0$ , получим

$$\cos \alpha = (\sqrt{\beta_* + 4\beta_0} - \beta_*) / (2\beta_0) \quad (4.3)$$

В частном случае  $\beta_* = 0$  (см. ниже) будет, как и выше,  $\operatorname{tg} \alpha = (\gamma'/\gamma)^{1/2}$ .

**5. Форма кривых в плоскости  $\omega$  для различных типов условий. Частные случаи.** *Суффозия* (см. разд. 2). Условия (2.1), (2.3) дают окружность  $|\omega| = \kappa I_*$ . Однако краевое условие для  $\operatorname{arg}(dz/d\omega)$  громоздко и не позволяет построить решение в явном виде, кроме случая  $I_* = 1$ . Хотя столь большой градиент, видимо, не может быть допущен на откосе реальной плотины, представляется все же целесообразным рассмотреть



Фиг. 4

случай  $I_* = 1$ , имеющий сравнительно простое аналитическое решение. Кроме того, такое решение полезно для исследования основных закономерностей и свойств всего класса задач и ценно как эталон для проверки других методов. Как будет показано ниже, к той же математической задаче сводятся и частные случаи для условий других типов.

Построим решение задачи для земляной плотины с наклонным (под углом  $\pi\theta$ ) верховым откосом на непроницаемом основании (фиг. 3, б). При  $I_* = 1$  из (2.1), (2.3) имеем  $v_s = -\kappa \sin \alpha$ ,  $v_n = -\kappa \cos \alpha$ , т. е. угол между внешней нормалью и вектором  $v$  на искомом низовом откосе равен  $\alpha$ , поэтому  $\operatorname{arg} v = \pi/2 - 2\alpha$  (фиг. 4, а). Так как  $\operatorname{arg} v = 0$  в точке  $B$ , то там  $\alpha = \pi/4$ .

Считая для простоты  $\kappa = 1$  (например, за счет выбора размерностей), найдем вид  $G_\omega$  (фиг. 4, б). Обозначим через  $\alpha_1$  угол наклона касательной к границе  $G_2$  (при положительном обходе). Тогда  $\alpha_1 = \pi - \alpha$  на  $BA$  и поэтому  $\alpha_1 = -\sigma/2 + 3\pi/4$  на  $BA$ ,  $\alpha_1 = \pi(1 + \theta)$  на  $AC$ ,  $\alpha_1 = 0$  на  $CB$ , где  $\sigma$  — дуговая абсцисса окружности, отсчитываемая от точки  $B$ . Величину  $\operatorname{arg}(dz/d\omega) = \delta$  можно найти на границе  $G_\omega$  как разность  $\alpha_1$  и угла наклона касательной к границе  $G_\omega$  в данной точке

$$BA : \delta = -\frac{3}{2}\sigma + \frac{1}{4}\pi, \quad AC : \delta = \pi\left(2\theta_1 - \frac{1}{2}\right), \quad CB : \delta = 0 \quad (5.1)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению функции  $\Phi(\omega) = dz/d\omega$  по значениям ее аргумента на границе. Эта функция должна быть аналитична в  $G_\omega$ , иметь соответствующие интегрируемые особенности в точках  $B$  и  $A$  и обращаться в нуль или иметь интегрируемую особенность в точке  $C$  (нуль при  $\theta > 1/4$ , особенность при  $\theta < 1/4$ , непрерывность при  $\theta = 1/4$ ).

Представим  $\Phi(\omega)$  в виде

$$\Phi(\omega) = C_1 \Phi_0(\omega) \Phi_1(\omega) \quad (5.2)$$

где  $C_1$  — действительная постоянная, выражающая неопределенность отыскания функции по аргументу, а

$$\Phi_0(\omega) = \omega^{-1/2} \quad (5.3)$$

Так как  $\operatorname{arg} \Phi_0 = -3\sigma/2$  на  $BA$ ,  $-3\pi/4 + 3\pi\theta/2$  на  $AC$ ,  $0$  на  $CB$ , то по (5.1) и (5.2) найдем  $\operatorname{arg} \Phi_1$ , который будет равен  $\pi/4$  на  $BA$ ,  $\pi(\theta/2 + 1/4)$  на  $AC$ ,  $0$  на  $CB$ .

Следовательно, остается определить функцию  $\Phi_1(\omega)$  по заданным кусочно-постоянным значениям ее аргумента на границе. Для этого отобразим  $G_\omega$  на полушпо-

скость  $\text{Im } \zeta > 0$  вспомогательного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  с помощью функции

$$\zeta = [2(\omega^{1/(1/2-\theta)} - 1)^{-1} + 1]^2 \quad (5.4)$$

При этом точка  $A$  перейдет в  $\zeta = 0$ , точка  $B$  - в  $\zeta = \infty$ . Теперь можем найти

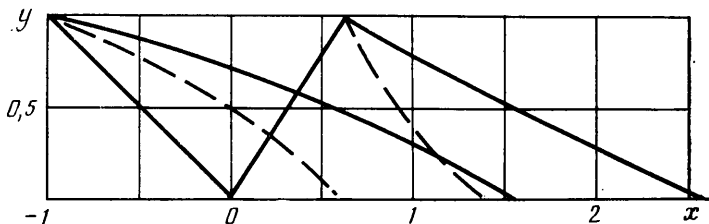
$$\Phi_1(\zeta) = \zeta^{-\theta/2} (\zeta - 1)^{1/4 + \theta/2} \quad (5.5)$$

Действительный произвольный коэффициент можно не вводить, так как в (5.2) уже входит  $C_1$ .

Таким образом, решение задачи в целом на основании (5.2), (5.3), (5.5) имеет вид

$$\zeta(\omega) = C_1 \int_0^\omega \omega^{-\theta/2} [\zeta(\omega)]^{-\theta/2} [\zeta(\omega) - 1]^{1/4 + \theta/2} d\omega \quad (5.6)$$

где функция  $\zeta(\omega)$  определяется по (5.4). За счет  $C_1$  допустимы изменения размеров области  $G_z$  с одновременным изменением напора  $H$  (уровня



Фиг. 5

воды в верхнем бьефе), так как здесь

$$w = \int (dz/d\omega) \omega d\omega$$

При этом значения скорости в соответствующих точках не изменяются. Таким образом, величина  $C_1$  должна определяться по  $H$  и  $\text{Im } w$ , где интеграл берется по  $BA$ .

Для определения формы искомого участка  $BA$  следует принять  $\omega = e^{i\sigma}$  ( $0 \leq \sigma \leq (1/2 - \theta)\pi$ ). Тогда из (5.6) получим его параметрические уравнения

$$x = x_1 - C_1 \int_0^\sigma f(\sigma, \theta) \cos \sigma^* d\sigma$$

$$y = C_1 \int_0^\sigma f(\sigma, \theta) \sin \sigma^* d\sigma$$

$$f(\sigma, \theta) = [\sin \sigma_1 (\cos \sigma_1)^\theta]^{-1/2}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{1-2\theta}, \quad \sigma^* = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\sigma$$

где  $x_1$  - абсцисса точки  $B$ .

На фиг. 5 штриховыми линиями показаны результаты расчетов по этим формулам для значений угла наклона верхового откоса  $\pi\theta$ , равного  $\pi/3$  и  $3\pi/4$ . Найденные профили можно трактовать как профили противofiltrационных ядер, удерживаемых упорными призмами, в которых фильтрация не учитывается. Видно, что площадь ядра, устойчивого к суффозии, существенно уменьшается при увеличении  $\theta$ . Аналогичная связь имеет место не только для суффозии, но и в других случаях, рассмотренных ниже.

*Выбор.* Полагая  $\kappa = 1$  и обозначая  $\gamma/\gamma' = a$ ,  $\gamma''/k\gamma = b$ , из (2.1) и (2.4) после перехода к  $v_x$  и  $v_y$  по формулам  $v_x = |v_s| \cos \alpha + |v_n| \sin \alpha$ ,  $v_y = -|v_s| \sin \alpha + |v_n| \cos \alpha$ , получим  $v_x = (a+1) \sin \alpha \cos \alpha - b \sin^2 \alpha$ ,  $v_y = a \cos^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha$ .

Для более наглядного определения кривой в плоскости  $\omega$ , соответствующей этим уравнениям, перепишем их в виде

$$v_x + \frac{b}{2} = \frac{a+1}{2} \sin 2\alpha + \frac{b}{2} \cos 2\alpha, \quad v_y - \frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2} \cos 2\alpha - \frac{b}{2} \sin 2\alpha \quad (5.7)$$

Уравнения (5.7) задают окружность радиуса  $0,5\sqrt{(a+1)^2 + b^2}$  с центром в точке  $[-b/2, (a-1)/2]$ , причем  $b > 0$ ,  $a > 0$ , но знак  $a-1$  зависит от исходных данных  $\gamma'$  и  $\gamma$ . Заметим, что величина  $a+1 = \gamma''/\gamma$  равна  $\beta_0$  из (4.3). Зависимость  $\alpha$  от  $\sigma$  (дуговой абсциссы окружности), необходимая для записи краевых условий, в соответствии с (5.7) линейна.

Таким образом, для плотин с прямоугольными откосами область  $G_\omega$  будет круговым многоугольником. Например, для «треугольной» плотины со схемой, показанной на фиг. 3, а, область  $G_\omega$  имеет вид кругового треугольника. К таким задачам можно применять метод П. Я. Полубариновой-Кочиной [5].

Сплошными линиями на фиг. 5 показаны профили, полученные методом П. Я. Полубариновой-Кочиной при  $a=1, 2$ ,  $b=2$  для тех же углов наклона  $\pi\theta$  верхового откоса, что и в примерах предыдущего пункта ( $\pi/3$  и  $3\pi/4$ ). В частном случае  $a=1, b=0$  краевая задача совпадает со случаем, разобранным в предыдущем разделе (штриховые линии на фиг. 5).

*Контактная суффозия.* Формулы (2.1), (2.7) определяют в плоскости  $\omega$  уравнение улитки Паскаля (конхоиды окружности с центром на оси ординат). При этом «обратное» краевое условие для  $\arg(dz/d\omega)$  задается линейным, но лишь от центрального угла (дуговой абсциссы) окружности. При  $\beta_* = 0$  эта постановка совпадает с частным случаем  $k = \infty$  при выпоре (окружность с центром на оси ординат). При  $\gamma'/\gamma = 1$  центр окружности лежит в начале координат, поэтому если одновременно  $\beta_* = 0$ , получаем разобранный выше частный случай суффозии с аналитическим решением в явном виде.

**6. Приближенные методы решения.** Выше было показано, что некоторые задачи с условиями вида (2.5) и (2.1) можно решать аналитическими методами. Более общие задачи требуют применения приближенных методов.

В тех случаях, когда удастся построить область  $G_\omega$ , можно применять способы, разработанные в теории ОУЗ, и отыскивать в этой области решение  $z(\omega)$  численными или аналоговыми методами. При этом можно применять обычный подход, определяя сначала функцию  $\chi(\omega) = \ln(dz/d\omega)$  по граничным значениям ее мнимой части и восстанавливая затем  $z(\omega)$  по формуле

$$z(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \exp \chi(\omega) d\omega$$

Видимо, более эффективным может оказаться непосредственное построение  $z(\omega)$  по заданному на границе аргументу ее производной  $dz/d\omega$ . При этом для  $z(\omega)$  получается задача, аналогичная задаче с наклонной производной, которую можно решать аналоговым методом или численно, например методом граничных интегральных уравнений [6].

Задачи со сложной геометрией области, с неоднородным грунтом, нелинейной фильтрацией и другими особенностями целесообразно решать итерационными методами непосредственно в физической плоскости.

В заключение отметим, что предложенный подход может быть применен и в других случаях: например при учете иных разрушающих факторов, при других условиях прочности. Так, в рассмотренных вариантах

условий отсутствует коэффициент запаса. Считается, что необходимый запас включен в величины, участвующие в формулах. Однако при необходимости коэффициент запаса может быть введен в формулы в явном виде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
2. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. 139.
3. Чугаев Р. Р. Земляные гидротехнические сооружения. Л.: Энергия, 1967. 460 с.
4. Мироненко В. А., Шестаков В. М. Основы гидрогеомеханики. М.: Недра, 1974. 295 с.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 554 с.
6. Метод граничных интегральных уравнений: Сб. статей/Под ред. Ишлинского А. Ю., Черного Г. Г. М.: Мир, 1978. 210 с.

Казань

Поступила в редакцию  
8.VII.1986