

УДК 532.542:532.526

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ТЕЧЕНИЯХ В КАНАЛЕ

ТИМОШИН С. Н.

На основе асимптотического подхода к решению уравнений Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса рассматривается пульсирующее ламинарное течение несжимаемой жидкости в плоском канале со слабой несимметричной деформацией стенок. Показано, что для деформаций большой протяженности изменение направления невозмущенного течения в пристеночных областях сопровождается резким увеличением амплитуды возмущений; этот процесс носит существенно нестационарный характер. Для течений с малым положительным напряжением трения в квазистационарном приближении получены два класса собственных решений.

1. Исследование нестационарных, в частности периодических по времени, внутренних течений вязкой жидкости представляет большой интерес с точки зрения физиологии и некоторых областей техники, например трубопроводного транспорта. Широкие перспективы в решении возникающих здесь задач открылись в последние годы в связи с бурным развитием асимптотических методов решения уравнений динамики жидкости.

Современное состояние асимптотической теории пульсирующих течений в каналах с деформированными стенками отражено в [1–3], где рассмотрены некоторые режимы течения при различных соотношениях между числом Рейнольдса, частотой и амплитудой пульсаций. Выбор параметров течения в данной работе обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, исследования [1–3] объединяет предположение об отсутствии перепада давления поперек канала в рассматриваемом приближении, что оправдано в несимметричном случае лишь для деформаций очень большой протяженности. Вместе с тем, как было показано в [4], учет поперечного перепада давления приводит к краевой задаче, типичной для теории свободного взаимодействия и описывающей распространение возмущений в пограничном слое вверх по потоку [4], самоиндуцированный отрыв [5], асимптотическую форму нижней ветви кривой нейтральной устойчивости [6]. В настоящей работе характерный продольный размер деформации подобран так, чтобы процесс взаимодействия проявлялся лишь в те моменты, когда напряжение трения невозмущенного потока мало по абсолютной величине. Тогда на остальной части периода решение может быть построено тем же методом, что и в [1–3].

Второе обстоятельство связано с выбором амплитуды и частоты пульсаций. В [2–3] приведены примеры течений с большой частотой (значения параметра Уомерсли  $\alpha \gg 1$ ), для которых малые возмущения, вносимые деформацией стенок, становятся экспоненциально растущими по времени при изменении направления течения у стенок канала. Ниже будем считать, что амплитуда пульсационной составляющей вектора скорости сравнима по величине с характерной средней скоростью и что параметр Уомерсли  $\alpha = O(1)$ . Кроме того, потребуем, чтобы минимальное за период напряжение трения невозмущенного течения было близко к нулю (в такие моменты невозмущенный профиль скорости имеет вид, показанный на фиг. 1). Параметры задачи подобраны так, что при обращении в нуль напряжения трения исходного потока возмущенное течение одновременно становится подверженным влиянию нестационарности, нелинейности и взаимодействия.

Рассмотрим пульсирующее движение несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_0$  и кинематическим коэффициентом вязкости  $\nu_0$  в бесконечном плоском канале с малой несимметричной деформацией стенок. Обозначим через  $d_0$  ширину канала в невозмущенном сечении, через  $d_1$  и  $d_2$  — соответственно продольный и поперечный масштабы деформации. Пусть  $xd_0$ ,  $yd_0$  — декартовы координаты точек плоскости в системе координат, начало которой расположено в окрестности деформации на линии нижней невозмущенной стенки (фиг. 1). Через  $uU_\infty$ ,  $vU_\infty$  обозначим составляющие

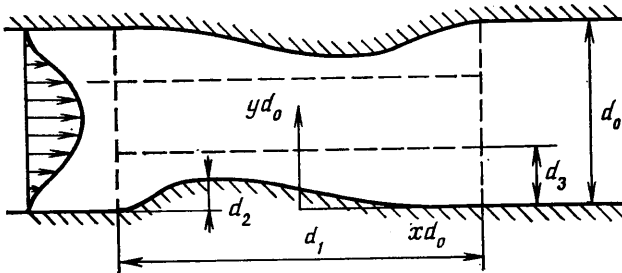
вектора скорости в этой системе,  $U_\infty$  — максимальная величина средней за период скорости невозмущенного течения. Давление представим в виде  $\rho_0 U_\infty^2 p + \rho_0 U_\infty v_0 d_0^{-1} x g(t)$ . Здесь  $t$  — время, отнесенное к периоду пульсаций  $T_0$ ,  $g(t)$  — невозмущенный градиент давления, зависящий только от времени. Уравнения Навье — Стокса в безразмерных переменных имеют вид

$$\alpha^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Re}[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + \nabla p] + \nabla(xg) = \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь параметр Уомерсли  $\alpha = d_0 v_0^{-1/2} T_0^{-1/2} = O(1)$ , число Рейнольдса  $\text{Re} = U_\infty d_0 v_0^{-1} \gg 1$ . Пусть  $d_1 \sim d_0 \text{Re}^{-1/2}$ ,  $d_2 \sim d_0 \text{Re}^{-1/2}$ , тогда форму канала можно задать соотношениями

$$\text{Re}^{-1/2} f_1(x \text{Re}^{-1/2}) \leq y \leq 1 - \text{Re}^{-1/2} f_2(x \text{Re}^{-1/2})$$

Функции  $f_1$  и  $f_2$  задают деформацию стенок,  $(f_1, f_2) = O(1)$ . Будем считать, что в отсутствие деформации в канале происходит одномерное пуль-



Фиг. 1

сирующее моногармоническое течение вида  $u = u(y, t)$ ,  $v = p = 0$ , причем функции  $u(y, t)$ ,  $g(t)$  определяются из решения следующей краевой задачи:

$$\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} + g = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

$$u(1/2, t) = 1 + k \cos(2\pi t), \quad 0 < k < 1$$

Если амплитуда пульсационной составляющей скорости фиксирована ( $k = k_0$ ), то параметр  $\alpha$  можно подобрать таким образом, что напряжение трения на стенке будет положительной величиной на всем периоде, кроме некоторого момента  $t = t_0$ . Положим при  $k = k_0$   $u = u_0(y, t)$ ,  $g = g_0(t)$ ,  $a(t) = -\partial u_0 / \partial y(0, t)$ . Тогда при  $t \in [0, 1]$ ,  $a(t) > 0$  при  $t \neq t_0$ ,  $a(t_0) = 0$ . Ясно, что величина  $t_0$  зависит от параметра  $k_0$ . Чтобы иметь возможность несколько варьировать невозмущенное течение, положим

$$k = k_0 + \text{Re}^{-1/2} k_1, \quad k_1 = \text{const} = O(1)$$

$$u = u_0 + \text{Re}^{-1/2} u_1(y, t), \quad g = g_0 + \text{Re}^{-1/2} g_1(t)$$

Определим аналитические свойства невозмущенного течения. Если  $y \rightarrow 0$ , то

$$u_0 = a(t) y + \frac{1}{2} g_0(t) y^2 + \dots, \quad u_1 = \lambda(t) y + \dots \quad (1.2)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать малую окрестность момента времени  $t = t_0$ . Пусть ( $i = 0; 1$ )

$$u_i(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{in}(y) (t - t_0)^n, \quad g_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{in}(t - t_0)^n$$

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n, \quad \lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (t-t_0)^n$$

Согласно определению момента  $t_0$ , справедливы соотношения  $a_0 = a_1 = 0$ ,  $a_2 > 0$ . Кроме того, будем считать, что  $g_{00} > 0$ .

2. Ограничимся исследованием асимптотической структуры решения уравнений (1.1) вблизи момента  $t=t_0$  в интервале длительностью  $O(\text{Re}^{-1/6})$ . Можно показать, что на остальной части периода уравнения для возмущенных функций течения линейные при заданной амплитуде деформации и не содержат производной по времени. Возмущение давления в главном приближении не меняется поперек канала и определяется движением жидкости в тонких пристеночных слоях, где справедливы линеаризованные уравнения Праудтля с известной толщиной вытеснения. В интересующем нас промежутке времени положим

$$t = t_0 + \text{Re}^{-1/6} t_1, \quad x = \text{Re}^{1/3} x_1, \quad (t_1, x_1) = O(1)$$

Как и в стационарном случае [4], область течения разбивается на два вязких пристеночных слоя, окружающих невязкое завихренное ядро потока (фиг. 1). Вязкие подслои имеют толщину  $d_3 \sim d_0 \text{Re}^{-1/6}$ , малую по сравнению с шириной канала, но гораздо больше, чем амплитуда деформации стенок. В основной части канала функции течения можно представить асимптотическими разложениями вида

$$u = u_{00}(y) + \text{Re}^{-1/6} t_1 u_{01}(y) + \text{Re}^{-1/3} [t_1^2 u_{02}(y) + u_{10}(y) + U_{10}(x_1, y, t_1)] + \\ + \text{Re}^{-1/2} [t_1^3 u_{03}(y) + t_1 u_{11}(y) + U_{11}(x_1, y, t_1)] + \text{Re}^{-2/3} [t_1^4 u_{04}(y) + \\ + t_1^2 u_{12}(y) + U_{12}(x_1, y, t_1)] + \dots \quad (2.1)$$

$$v = \text{Re}^{-2/3} V_{10}(x_1, y, t_1) + \text{Re}^{-5/6} V_{11}(x_1, y, t_1) + \text{Re}^{-1} V_{12}(x_1, y, t_1) + \dots$$

$$p = \text{Re}^{-1} P_{10}(x_1, y, t_1) + \dots$$

Подстановка разложений (2.1) в исходные уравнения (1.1) приводит к системе дифференциальных уравнений для последовательного определения коэффициентов разложений. Эта система уравнений может быть легко решена; укажем окончательный результат

$$U_{10} = A_1(x_1, t_1) \frac{du_{00}}{dy}, \quad V_{10} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_1} u_{00}$$

$$P_{10} = R_1(x_1, t_1) + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} \int_0^y u_{00}^2(s) ds$$

$$U_{11} = A_2(x_1, t_1) \frac{du_{00}}{dy} + A_1 t_1 \frac{du_{01}}{dy}$$

$$V_{11} = -\frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_{00} - t_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} u_{01}$$

(2.2)

$$U_{12} = t_1 A_2 \frac{du_{01}}{dy} + A_1 \left( t_1^2 \frac{du_{02}}{dy} + \frac{du_{10}}{dy} \right) + \frac{1}{2} A_1^2 \frac{d^2 u_{00}}{dy^2} + A_3(x_1, t_1) \frac{du_{00}}{dy} + Q(y, t_1)$$

$$V_{12} = -t_1 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u_{01} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} (t_1^2 u_{02} + u_{10}) - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \frac{du_{00}}{dy} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} u_{00}$$

Здесь  $R_1(x_1, t_1)$ ,  $A_i(x_1, t_1)$ ,  $i=1, 2, 3$ , и  $Q(y, t_1)$  — неизвестные пока функции.

Используя представление решения в основной части канала (2.1) и

(2.2), с помощью соотношений (1.2) и (1.3) можно построить асимптотические разложения функций течения в вязком подслое у нижней стенки канала. Положим

$$\begin{aligned}
 y &= \text{Re}^{-1/6} y_2, \quad (x_1, y_2, t_1) = O(1) \\
 u &= \text{Re}^{-1/6} \frac{1}{2} g_{00} y_2^2 + \text{Re}^{-1/6} \left[ \frac{1}{2} t_1 g_{01} y_2^2 + (a_2 t_1^2 + \lambda_0 + g_{00} A_1) y_2 \right] + \\
 &+ \text{Re}^{-2/3} \left[ \frac{1}{24} \alpha^2 g_{01} y_2^4 + \frac{1}{3} \alpha^2 a_2 t_1 y_2^3 + \frac{1}{2} (t_1^2 g_{02} + g_{10}) y_2^2 + \right. \\
 &+ (t_1^3 a_3 + \lambda_1 t_1 + g_{00} A_2 + t_1 g_{01} A_1) y_2 + \frac{1}{2} g_{00} A_1^2 + (a_2 t_1^2 + \lambda_0) A_1 + Q_0 + \\
 &\left. + U_{21}(x_1, y_2, t_1) \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
 v &= -\text{Re}^{-1} \frac{1}{2} g_{00} y_2^2 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \text{Re}^{-1/6} \left[ -\frac{1}{2} \left( g_{00} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} + t_1 g_{01} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) y_2^2 - \right. \\
 &\left. - g_{00} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} y_2 - (a_2 t_1^2 + \lambda_0) \frac{\partial A_1}{\partial x_1} y_2 + V_{21}(x_1, y_2, t_1) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

$$p = \text{Re}^{-1} R_1(x_1, t_1) + \dots, \quad Q_0 = Q(0, t_1)$$

Подставляя разложения (2.3) в систему уравнений (1.1) и используя условия прилипания на твердой поверхности, а также условия срачивания с решением (2.1) – (2.2), приходим к краевой задаче вида

$$\begin{aligned}
 U_{21} &= \frac{\partial \psi_{21}}{\partial y_2}, \quad V_{21} = -\frac{\partial \psi_{21}}{\partial x_1} \\
 L_2[\psi_{21}] &= \alpha^2 g_{00} y_2 \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + \frac{\partial R_1}{\partial x_1} \\
 \psi_{21} &= 0, \quad \frac{\partial \psi_{21}}{\partial y_2} = -\frac{1}{2} g_{00} (A_1 + f_1)^2 - (a_2 t_1^2 + \lambda_0) (A_1 + f_1) + Q_0 \quad (y_2 = +0) \\
 \frac{\partial \psi_{21}}{\partial y_2} &= 0 \quad (y_2 \rightarrow +\infty)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь и далее используется дифференциальный оператор

$$L_i[\varphi] = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y_i^3} - \frac{1}{2} g_{00} y_i^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial y_i} + g_{00} y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \tag{2.5}$$

Аналогично рассматривается движение в вязком подслое у верхней стенки канала. Если положить  $y = 1 - \text{Re}^{-1/6} y_3$ ,  $y_3 = O(1)$ , то разложения функций течения имеют вид (2.3) с заменой

$$\begin{aligned}
 y_2 &\rightarrow y_3, \quad U_{21} \rightarrow U_{31}, \quad Q_0 \rightarrow Q_1 \\
 A_1 &\rightarrow -A_1, \quad v \rightarrow -v, \quad A_2 \rightarrow -A_2 \\
 V_{21} &\rightarrow V_{31}, \quad R_1 \rightarrow R_1 + \kappa_0 \partial^2 A_1 / \partial x_1^2 \\
 \kappa_0 &= \int_0^1 u_{00}^2(s) ds, \quad Q_1 = Q(1, t_1)
 \end{aligned}$$

Соответствующая краевая задача имеет вид

$$U_{31} = \frac{\partial \psi_{31}}{\partial y_3}, \quad V_{31} = -\frac{\partial \psi_{31}}{\partial x_1}$$

$$L_3[\psi_{31}] = -\alpha^2 g_{00} y_3 \frac{\partial A_1}{\partial t_1} + \frac{\partial R_1}{\partial x_1} + \kappa_0 \frac{\partial^3 A_1}{\partial x_1^3} \quad (2.6)$$

$$\psi_{31} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{31}}{\partial y_3} = -\frac{1}{2} g_{00} (A_1 - f_2)^2 + (a_2 t_1^2 + \lambda_0) (A_1 - f_2) - Q_1 \quad (y_3 = +0)$$

$$\frac{\partial \psi_{31}}{\partial y_3} = 0 \quad (y_3 \rightarrow +\infty)$$

Как известно [7, 8], условие разрешимости краевых задач (2.4) и (2.6) с дифференциальным оператором вида (2.5) накладывает определенные ограничения на вид функций  $A_1$ ,  $R_1$ ,  $Q_0$  и  $Q_1$ . Ниже приведен анализ сформулированных краевых задач для некоторых типов деформаций.

3. Рассмотрим вначале течение в канале с локальной деформацией:  $f_1(\pm\infty) = f_2(\pm\infty) = 0$ . Из условия затухания возмущений вдали от деформации следует, что  $Q_0(t) = Q_1(t_1) = 0$ . Условия разрешимости краевых задач (2.4) и (2.6) [7, 8] в данном случае приводят к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} & \alpha^2 g_{00}^{-1/2} \pi^{-1} 2^{3/4} \Gamma(3/4) \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial A_1(s, t_1)}{\partial t_1} \frac{ds}{(x_1 - s)^{1/4}} - \\ & - \kappa_0 g_{00}^{-1/2} 2^{1/2} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial^3 A_1(s, t_1)}{\partial s^3} \frac{ds}{(x_1 - s)^{1/2}} = (f_2 - f_1 - 2A_1) \left[ \frac{1}{2} (f_2 + f_1) + \right. \\ & \left. + g_{00}^{-1} (a_2 t_1^2 + \lambda_0) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} R_1(x_1, t_1) = & -\alpha^2 \pi^{-1/2} g_{00}^{-1/2} 2^{3/4} \Gamma(3/4) \int_{-\infty}^{x_1} \frac{ds}{(x_1 - s)^{3/4}} \int_{-\infty}^s \frac{\partial A_1(\xi, t_1)}{\partial t_1} d\xi - \\ & - \pi^{-1} g_{00}^{-1/2} 2^{3/2} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \int_{-\infty}^{x_1} \left[ \frac{1}{2} g_{00} (A_1(s, t_1) + f_1(s))^2 + \right. \\ & \left. + (a_2 t_1^2 + \lambda_0) (A_1(s, t_1) + f_1(s)) \right] \frac{ds}{(x_1 - s)^{1/2}} \end{aligned}$$

$\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера.

Первое уравнение служит для определения функции  $A_1$ , второе уравнение играет подчиненную роль. Первое из уравнений (3.1) содержит производную по времени, следовательно, постановка задачи должна включать одно начальное условие. Оно может быть получено как условие того, что при  $t_1 \rightarrow -\infty$  решение становится квазистационарным. Несложные выкладки дают

$$A_1 = \frac{1}{2} (f_2 - f_1) \quad (t_1 \rightarrow -\infty) \quad (3.2)$$

В общем случае задача (3.1)–(3.2) требует численного интегрирования, однако можно указать примеры точных решений. Так, для симметричного канала ( $f_2 = f_1$ ) решение тривиально:  $A_1 = 0$ . Если канал антисимметричен ( $f_2 = -f_1$ ), то решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_1 = & -f_1(x_1) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \varphi_1(\omega) r_1(\omega) \exp\left(i\omega x_1 - \frac{1}{3} r_0(\omega) t_1^3 - r_2(\omega) t_1\right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{t_1} \exp\left(\frac{1}{3} r_0(\omega) s^3 + r_2(\omega) s\right) ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\varphi_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x_1) f_1(x_1) dx_1$$

$$r_0(\omega) = \alpha^{-2} g_{00}^{-1/4} 2^{1/4} a_2 \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} (i\omega)^{1/4}$$

$$r_1(\omega) = -\kappa_0 \alpha^{-2} g_{00}^{-3/4} 2^{-3/4} \pi^{1/2} (i\omega)^{13/4}$$

$$r_2(\omega) = \lambda_0 a_2^{-1} r_0(\omega) + r_1(\omega)$$

$$\arg[(i\omega)^m] \in (-m\pi, m\pi)$$

Наконец, для канала произвольной формы, но с малой деформацией задача может быть линеаризована и с погрешностью порядка  $O(f_1^2 + f_2^2)$  решение представляется в виде (3.3) с заменой  $f_1(x_1)$  на  $(f_1 - f_2)/2$ .

Заметим, что нестационарность существенна лишь для несимметричных деформаций, и если  $t_1 \rightarrow +\infty$ , то можно показать, что решение (3.3) приближается к квазистационарному пределу (3.2).

Для того чтобы исследовать зависимость решения от параметров задачи, рассмотрим движение в канале постоянной ширины с волнистыми стенками:  $f_1 = -f_2 = h \cos(\omega x_1)$ . В этом случае краевые задачи (2.4) и (2.6) допускают периодическое по  $x_1$  решение, в частности

$$A_1 = \frac{1}{2} h [e^{i\omega x_1} B(t_1) + e^{-i\omega x_1} B^*(t_1)]$$

$$Q_0 = Q_1 = -\frac{1}{4} g_{00} h^2 (B+1) (B^*+1)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} h e^{i\omega x_1} R_2(t_1) + \frac{1}{4} h^2 e^{2i\omega x_1} R_3(t_1) + \frac{1}{2} h e^{-i\omega x_1} R_2^*(t_1) +$$

$$+ \frac{1}{4} h^2 e^{-2i\omega x_1} R_3^*(t_1)$$

$$R_2(t_1) = \frac{1}{2} \kappa_0 \omega^2 B(t_1)$$

$$R_3(t_1) = -g_{00}^{3/4} \pi^{-1/2} \omega^{-1/2} i^{-1/2} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} (B+1)^2$$

Звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины. Функция  $B$  определяется из решения задачи

$$\frac{dB}{d\tau} + [i^{3/4}(\tau^2 + \sigma) + i^{5/4}\gamma] B = -(\tau^2 + \sigma) i^{1/4} \quad (3.4)$$

$$B(\tau) = -1 \quad (\tau \rightarrow -\infty)$$

$$i^m = e^{1/2 im\pi}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tau = c^{-1} t_1, \quad c = 2^{-1/4} g_{00}^{1/2} \alpha^{3/4} a_2^{-1/2} \omega^{-1/4} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) / \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \right]^{1/2}$$

$$\sigma = \lambda_0 a_2^{-1} c^{-2}, \quad \gamma = 2^{-3/4} \pi^{1/2} \kappa_0 \alpha^{-2} g_{00}^{-3/4} \omega^{13/4} c$$

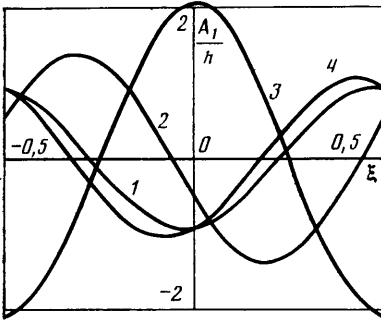
Параметр  $\sigma$  пропорционален минимуму трения невозмущенного потока,

величина  $\gamma$  характеризует интенсивность процесса взаимодействия: если  $\gamma \rightarrow 0$ , что соответствует длинноволновым деформациям, то поперечный перепад давления, а вместе с ним и эффект взаимодействия становятся слабыми.

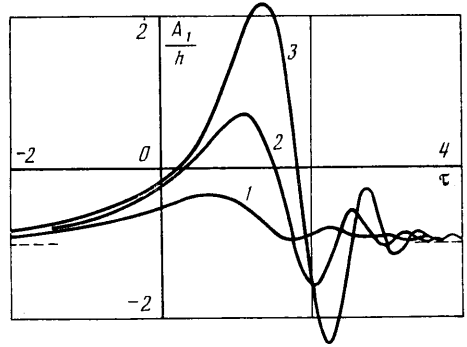
Решение задачи (3.4) очевидно

$$B(\tau) = -1 + i^{3/4} \gamma \int_{-\infty}^{\tau} \exp \left[ \frac{1}{3} i^{3/4} (s^3 - \tau^3) + (i^{5/4} \gamma + i^{3/4} \sigma) (s - \tau) \right] ds \quad (3.5)$$

На фиг. 2 показана зависимость  $A_1/h$  от  $\xi = \omega x_1 / (2\pi)$  в моменты времени  $\tau = -3; 0; 1,5; 3$  при  $\sigma = -1/2, \gamma = 1$  (кривые 1-4 соответственно). Как видим, при отрицательных значениях параметра  $\sigma$  амплитуда и фаза возмущений может значительно отличаться от квазистационарного предела



Фиг. 2



Фиг. 3

$A_1(\tau \rightarrow -\infty) = -h \cos(\omega x_1)$ . На фиг. 3 изображена зависимость  $A_1/h$  от времени  $\tau$  в фиксированной точке  $x_1 = 0$  при  $\gamma = 1$  и  $\sigma = 1; 0; -1/2$  (кривые 1-3). Усиление противотоков в невозмущенном течении, что соответствует уменьшению  $\sigma$ , сопровождается интенсивным ростом амплитуды возмущений, причем возмущения приобретают характер быстрых колебаний по времени.

Рассмотрим предельную форму решения (3.5) при  $\sigma \rightarrow -\infty$ . Вид уравнения (3.4) показывает, что характерный предел задачи имеет место при

$$\gamma = |\sigma| \gamma_1, \quad \tau = |\sigma|^{1/2} \tau_1, \quad (\gamma_1, \tau_1) = O(1) \quad (3.6)$$

Выполняя замену переменных (3.6) в решении (3.5) и оценивая интеграл с помощью метода перевала, можно показать, что существует такое значение  $\gamma_1 = \gamma_{10} \approx 6,34$ , что если  $\gamma_1 > \gamma_{10}$ , то

$$B(\tau) = -\frac{\tau_1^2 - 1}{\tau_1^2 - 1 + i^{1/2} \gamma_1} + o(1) \quad (\sigma \rightarrow -\infty)$$

Этот результат можно получить из уравнения (3.4), предполагая, что решение в главном приближении квазистационарно. Однако если  $\gamma_1 < \gamma_{10}$ , то существует промежуток времени, в котором решение представляется экспоненциально большими величинами. Продемонстрируем сказанное на примере  $\gamma_1 \ll 1$

$$(B+1)\gamma_1^{-1} = -\frac{i^{1/2}}{1-\tau_1^2} + \dots \quad (\tau_1 < -1; \tau_1 > 2) \quad (3.7)$$

$$(B+1)\gamma_1^{-1} = i^{7/8} \pi^{1/2} |\sigma|^{3/4} \exp \left[ -\frac{1}{3} |\sigma|^{1/2} i^{3/4} (\tau_1 + 1)^2 (\tau_1 - 2) \right] + \dots \quad (-1 < \tau_1 < 2)$$

Присутствие экспоненциально больших величин в решении (3.7) озна-

чает, что при появлении противотоков в несимметричном канале квазистационарное приближение, вообще говоря, непригодно. Исключение составляет тот случай, когда форма деформации может быть представлена в виде суммы гармоник, волновые числа которых превышают некоторую пороговую величину, причем пороговое значение волнового числа увеличивается с усилением противотоков в исходном течении. В рассмотренном выше примере  $\gamma = O(\omega^3)$ ,  $|\sigma| = O(|\lambda_0| \omega^{1/2})$ , поэтому квазистационарное приближение справедливо, если  $\omega > \text{const}$ .  $|\lambda_0|^{2/5}$ ,  $\lambda_0 \rightarrow -\infty$ .

Можно показать, что если  $\sigma \rightarrow +\infty$ , то возмущенное решение становится квазистационарным при всех  $\gamma$ .

Подчеркнем, что в симметричном канале  $A_1 = 0$  и квазистационарное приближение справедливо на всем периоде пульсаций.

4. В заключение рассмотрим собственные решения краевых задач (2.4) и (2.6) в недеформированном канале при  $\lambda_0 \rightarrow +\infty$ . Минимум невозмущенного трения при этом положителен и по порядку величины превышает  $\text{Re}^{-1/3}$ . Почленно вычитая (2.6) из (2.4) и выполнив замену переменных вида

$$\begin{aligned} t_1 &= \lambda_0^{1/2} a_2^{-1/2} T, & Q_1 &= Q_0 \\ y_2 &= c_1 Y_1, & x_1 &= g_{00} c_1^4 X_1 \\ U_{21} - U_{31} &= 2\lambda_0 \frac{\partial \Psi}{\partial Y_1}, & V_{21} - V_{31} &= -2\lambda_0 g_{00}^{-1} c_1^{-3} \frac{\partial \Psi}{\partial X_1} \\ c_1 &= 2^{-1/10} \lambda_0^{-1/10} g_{00}^{-3/10} \kappa_0^{1/10} \\ \delta &= 2^{-3/10} \lambda_0^{-9/5} g_{00}^{1/10} \kappa_0^{3/10} a_2^{1/2} \alpha^2 \end{aligned}$$

приходим к краевой задаче для нахождения функции  $A_1$

$$\begin{aligned} \delta Y_1 \frac{\partial A_1}{\partial T} - \frac{\partial^3 A_1}{\partial X_1^3} + \frac{1}{2} Y_1^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X_1 \partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial \Psi}{\partial X_1} &= \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y_1^3} \quad (4.1) \\ \Psi = 0, & \frac{\partial \Psi}{\partial Y_1} = -A_1 (T^2 + 1) \quad (Y_1 = +0) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y_1} &= 0 \quad (Y_1 \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

Выполним в (4.1) формальный предельный переход  $\delta \rightarrow 0$ . Задача становится квазистационарной и допускает затухающее вверх по потоку решение вида

$$\begin{aligned} A_1 &= G(T) \exp(\mu X_1) + O(\delta) \\ \mu &= 2^{3/5} (T^2 + 1)^{3/5} \left[ \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) / \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right]^{2/5} \end{aligned}$$

Функция  $G(T)$  остается произвольной. Подобное решение, по-видимому, описывает начальную (линейную) стадию развитого отрывного течения в канале с сильной несимметричной деформацией в те моменты времени, когда невозмущенное трение мало.

Второй класс собственных решений тесно связан с задачами асимптотической теории устойчивости. При малых  $\delta$  наряду с медленной временной переменной  $T$  можно ввести быструю переменную  $\vartheta$ :  $T = \delta\vartheta$ . Задача (4.1) допускает решение в виде бегущей волны

$$A_1 = \exp[i(\omega X_1 - \chi\vartheta)]$$



где

$$\chi = \frac{1}{3} b_0 i^{-1/4} \omega^{3/4} T^2 + b_0 i^{-1/4} \omega^{3/4} + b_1 i^{1/4} \omega^{13/4}$$
$$b_0 = 2^{1/4} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}, \quad b_1 = \pi^{1/2} 2^{-5/4}$$

Нейтральные колебания определяются соотношением

$$\omega = \omega_0 = \left[ \frac{b_0}{b_1} \left( \frac{1}{3} T^2 + 1 \right) \right]^{4/5} \quad (4.2)$$

Амплитуда колебания с волновым числом  $\omega > \omega_0$  увеличивается с ростом  $\Phi$ , следовательно, равенство (4.2) описывает асимптоту нижней ветви кривой нейтральной устойчивости при больших числах Рейнольдса для данного режима течения.

Автор благодарит В. В. Сычева и А. И. Рубана за ряд полезных консультаций, полученных при выполнении данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Duck P. W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1980. V. 33. № 1. P. 77–92.
2. Duck P. W. Pulsatile flow through constricted or dilated channels. 2 // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. № 4. P. 621–653.
3. Cowley S. J. Pulsatile flow through distorted channels: low-Strouhal-number and translating-critical-layer effects // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1985. V. 38. № 4. P. 589–619.
4. Smith F. T. Flow through constricted or dilated pipes and channels. Pt. 1. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. № 3. P. 343–376.
5. Smith F. T. Upstream interactions in channel flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. № 4. P. 631–655.
6. Жук В. И., Рыжов О. С. О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 1. С. 55–59.
7. Рубан А. И. Об устойчивости предотрывного пограничного слоя на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖТ. 1982. № 6. С. 55–63.
8. Smith F. T. Concerning dynamic stall // Aeron. Quart. 1982. V. 33. № 4. P. 331–352.

Москва

Поступила в редакцию  
3.VII.1986