

УДК 532.529:537

**ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННОЙ  
ДИСПЕРСНОЙ СРЕДОЙ ПРИ БОЛЬШИХ ЗАПИРАЮЩИХ  
ПОТЕНЦИАЛАХ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ**

**ВАРЕНЦОВ О. К., ВАТАЖИН А. Б.**

Рассматривается обтекание электрически заряженной сферы двухфазным потоком, несущая фаза которого является несжимаемой электрически нейтральной жидкостью, а дисперсная фаза образована инерционными заряженными частицами. Предполагается, что параметр электрогидродинамического взаимодействия незначителен и реализуется режим потенциального безотрывного обтекания сферы несущей средой. Движение дисперсной фазы описывается континуальными динамическими уравнениями, в которые входит электрическое поле, являющееся суммой внешнего, создаваемого сферой поля, и собственного поля, индуцированного дисперсными частицами. Электрическое поле определяется с помощью уравнений электродинамики, которые должны рассматриваться совместно с динамическими уравнениями. Изучается режим, когда на сферу подается большой электростатический потенциал, препятствующий попаданию частиц на поверхность сферы и приводящий к пересечению траекторий заряженных частиц. Для решения такой задачи в рамках двухскоростного континуума вводится поверхность разрыва параметров, заменяющая зону многофазного течения. Положение поверхности разрыва, распределение скорости и плотности дисперсной фазы и распределение электростатического потенциала находятся в результате решения системы эллиптических и гиперболических уравнений в двух областях, разделенных поверхностью разрыва. Представляются результаты численного интегрирования сформулированной системы уравнений.

**1. Постановка задачи.** Обтекание сферы электрически заряженной дисперсной средой без учета собственных электрических полей заряженных частиц рассматривалось в [1—4]. При учете индуцированных электрических полей задача значительно усложняется, и имеются примеры расчета таких течений лишь в случаях отсутствия пересечения траекторий заряженных частиц или когда пересечение имеется, но можно ограничиться введением трехскоростного континуума [3, 4]. Если на сферу подается большой запирающий потенциал, то возникают многократные пересечения траекторий частиц и для решения задачи в рамках двухскоростного континуума целесообразно вводить поверхности разрыва, заменяющие зоны многофазного течения [5]. Возможная постановка таких задач в электрогазодинамике была дана в [4], однако конкретных решений при различных условиях на поверхности разрыва получено не было. Данная работа посвящена построению таких решений.

Рассматривается проводящая сфера радиуса  $R^0$ , помещенная в середину межэлектродного промежутка длины  $L$ , ограниченного двумя бесконечными параллельными заземленными сетками-электродами  $x^0=0$  и  $L$  (фиг. 1). На поверхность сферы подается потенциал  $\varphi^0$ . Предполагается, что сетки и электрическая цепь сферы не вносят возмущений в газодинамический поток, скорость которого на бесконечности равна  $U_0$  и перпендикулярна плоскостям электродов. Предполагая, что дисперсная фаза не влияет на движение жидкости, примем, что обтекание сферы несжимаемой жидкостью осуществляется в режиме безотрывного потенциального

течения

$$U_x = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R^0}{r} \right)^3 \left( 1 - 3 \frac{(x^0 - 1/2 L)^2}{r^2} \right)$$

$$U_y = \frac{3}{2} \left( \frac{R^0}{r} \right)^3 \frac{(1/2 L - x^0) y^0}{r^2}, \quad r^2 = \left( x^0 - \frac{1}{2} L \right)^2 + y^0{}^2$$

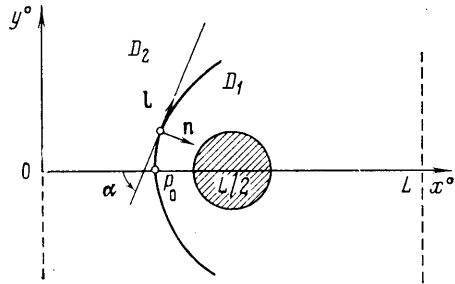
Здесь  $U_x, U_y$  — безразмерные (отнесенные к  $U_0$ ) скорости несущей фазы в проекции на оси цилиндрической системы координат  $(x^0, y^0)$ .

Будем считать, что на дисперсные частицы радиуса  $a$ , обладающие массой  $m$  и электрическим зарядом  $Q$ , действует сила сопротивления

$$F_c = 6\pi\mu a U_0 (U - u) \psi, \quad \psi = 1 + \frac{1}{6} \text{Re}^{3/2},$$

$$\text{Re} = \text{Re}_0 |U - u|, \quad \text{Re}_0 = \frac{2\rho U_0^2 a}{\mu} \quad (1.1)$$

где  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости несущей среды,  $u$  — отнесенная к  $U_0$  скорость движения дисперсной фазы,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса.



Фиг. 1

При сделанных предположениях стационарное течение дисперсной фазы описывается уравнениями

$$(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} = \frac{1}{\tau} [(\mathbf{U} - \mathbf{u}) \psi + \mathbf{E}], \quad \tau = \frac{m U_0}{6\pi\mu a L} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} \nabla q + q \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

$$\Delta \varphi = -\beta q, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1.4)$$

$$x=0: \quad \varphi=0, \quad \mathbf{u}=\mathbf{U}, \quad q(y)=1 \quad (1.5)$$

$$x=1: \quad \varphi=0, \quad (x-0,5)^2 + y^2 = R^2: \quad \varphi=\varphi_s \quad (1.6)$$

Здесь  $q$  — объемная плотность электрического заряда (пропорциональная массовой плотности дисперсной фазы),  $\mathbf{E}$  и  $\varphi$  — вектор электрического поля и электростатический потенциал.

Уравнения (1.2)–(1.3) представляют собой уравнения импульса и неразрывности дисперсной фазы, (1.4) — электродинамические уравнения, (1.5)–(1.6) — граничные условия. При записи второго условия в (1.5) предполагалось, что скольжение дисперсных частиц в набегающем потоке отсутствует. Величина  $\tau$  представляет собой параметр инерции. Все величины — безразмерные, связаны с размерными (помеченными индексом градус) величинами соотношениями

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{r} L, \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{u} U_0, \quad \mathbf{E}^0 = \mathbf{E} \frac{U_0}{b}, \quad \varphi^0 = \varphi \frac{U_0 L}{b}, \quad q^0 = q q_0 \quad (1.7)$$

$$b = \frac{Q}{6\pi\mu a}, \quad \varphi_s = \frac{b \varphi_s^0}{U_0 L}, \quad \beta = \frac{4\pi b L}{\varepsilon U_0} q_0, \quad R = \frac{R^0}{L}, \quad q_0 = q(0, y) = \text{const}$$

Из (1.2)–(1.7) вытекает, что рассматриваемые течения характеризуются параметрами  $\beta, \varphi_s, R, \tau, \text{Re}_0$ .

Будем считать, что величина  $\varphi_s$  достаточно велика и заряженные частицы не попадают на поверхность сферы. В [3, 4] было показано, что при отсутствии индуцированных электрических полей заряженные частицы собираются в достаточно узкий слой, расположенный перед сферой. Естественно предположить, что подобная картина обтекания реализуется и при наличии индуцированных электрических полей. Однако в рассматриваемом

мом случае указанный слой будем заменять поверхностью разрыва  $S$ , отделяющей область двухфазного течения  $D_2$  от области  $D_1$ , где дисперсная фаза отсутствует. Соотношения на поверхности разрыва  $S$ , необходимые для решения задачи, следуют из интегральных уравнений сохранения массы и импульса дисперсной фазы. Эти соотношения выписаны в монографии [4] и в предположении постоянства скорости частиц поперек слоя имеют следующий вид:

$$qu_n^2 = -\frac{\sigma}{\tau} \left( U_n + \frac{E_{n2} + E_{n1}}{2} \right) - \frac{\sigma V^2}{R_s} \quad (1.8)$$

$$\frac{d}{dl} (y\sigma V^2) = y \left[ qu_n u_l - \frac{\sigma}{\tau} (V - U_l - E_l) \right] \quad (1.9)$$

$$\frac{d}{dl} (y\sigma V) = yqu_n \quad (1.10)$$

$$\beta\sigma = E_{n1} - E_{n2}, \quad E_{l1} = E_{l2} = E_l \quad (1.11)$$

$$u_n = u_{n2}, \quad u_{n1} = 0, \quad u_{l1} = u_{l2}, \quad u_{l1} = 0, \quad q = q_2$$

Здесь  $V$ ,  $\sigma$  — скорость частиц и поверхностная плотность заряда на  $S$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$  — нормаль и касательная к поверхности  $S$ ,  $R_s$  — ее радиус кривизны в меридиональной плоскости ( $1/R_s = d\alpha/dl$ ,  $\alpha$  — угол между осью и направлением  $\mathbf{l}$ ), индексы 1 и 2 относятся к областям  $D_1$  и  $D_2$  соответственно, параметры частиц и газа соответствуют состоянию двухфазной среды перед разрывом.

Предположения о структуре разрыва могут быть, разумеется, и иными. Можно представить, например, ситуацию, когда при вступлении частиц в слой происходит их торможение вязкими силами, причем потери импульса пропорциональны полному потоку его нормальной компоненты. Эта ситуация может быть описана введением в уравнение (1.8) коэффициента потерь  $\gamma$

$$(1-\gamma)qu_n^2 = -\frac{\sigma}{\tau} \left( U_n + \frac{E_{n2} + E_{n1}}{2} \right) - \frac{\sigma V^2}{R_s} \quad (1.12)$$

Соотношения (1.8)–(1.10) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющую определить положение поверхности разрыва  $x_s(y)$ , скорость  $V$  частиц в слое и плотность электрического заряда  $\sigma$  при ее интегрировании совместно с общей системой уравнений и граничных условий (1.2)–(1.6). Система (1.8)–(1.10) может быть переписана

$$x_s' = \text{ctg } \alpha$$

$$\sin \alpha \sigma V^2 \alpha' = q(u_x - x_s' u_y)^2 \sin^2 \alpha + \sigma [^{1/2} \beta \sigma + (W_x - x_s' W_y) \sin \alpha]$$

$$\sigma V V' = q(u_x - x_s' u_y) [(u_y + x_s' u_x) \sin \alpha - V] + \left[ W_y + x_s' W_x - \frac{V}{\sin \alpha} \right] \frac{\sigma}{\tau}$$

$$(y\sigma V)' = yq(u_x - x_s' u_y) \quad (\mathbf{W} = \mathbf{U} + \mathbf{E})$$

Практическое выполнение интегрирования этой системы требует задания четырех начальных условий в точке слоя  $P_0$  на оси течения. Два условия следуют из симметрии течения и гладкости  $S$ :  $\alpha(0) = \pi/2$ ,  $V(0) = 0$ . Третье условие (относительно  $\sigma$ ) дает соотношение (1.8) при  $y=0$ . Для определения  $x_s(0) = x_0$  разложим все величины, входящие в (1.8)–(1.10), по степеням  $y$  в окрестности  $y=0$

$$x_s = x_0 + \frac{1}{2} x_2 y^2 + \frac{1}{6} x_3 y^3 + \dots$$

$$V = v_1 y + v_2 y^2 + \dots$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 + \dots \quad (x_i, v_i, \sigma_i = \text{const}, i=0, 1, 2, \dots)$$

Подставив полученные разложения в уравнения (1.8)–(1.10) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , получаем

$$\sigma_0 = -q\tau u_x^2 / W_m \quad (1.13)$$

$$v_1 = -W_m / 2\tau u_x \quad (1.14)$$

$$\frac{3W_m^2}{4\tau u_x^2} - \left( (u_y)_y - \frac{1}{2\tau} \right) \frac{W_m}{u_x} + (W_y)_y + \frac{\beta\sigma}{2x_2} = 0 \quad (1.15)$$

$$\tau(2qu_x(u_x)_y + (q)_y u_x^2) = -\sigma_0(\beta\sigma_1 + (W_x)_y) - \sigma_1 W_x \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} & \tau \left\{ q \left\{ (u_x)_y^2 + u_x \left[ (u_x)_{yy} + x_2 \left( (u_x)_x - 2(u_y)_y + x_2 u_x \right) \right] \right\} + \right. \\ & \quad \left. + 2(q)_y u_x (u_x)_y + \frac{1}{2} \left( (q)_{yy} + x_2 (q)_x \right) u_x^2 \right\} = \\ & = x_2 \sigma_0 v_1 - \frac{1}{2} \sigma_0 (\beta\sigma_2 + (W_x)_{yy} + x_2 (W_x)_x - 2x_2 (W_y)_y) - \\ & - \left( \frac{1}{2} \beta\sigma_0 + W_x \right) \left( \sigma_2 - \frac{1}{2} x_2 \sigma_0 \right) - \sigma_1 \left( \frac{1}{2} \beta\sigma_1 + (W_x)_y \right) \quad (1.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\sigma_0 v_1 v_2 + \sigma_1 v_1^2 = & q \left[ u_x \left( \frac{1}{2} (u_y)_{yy} + 2x_2 (u_x)_y + x_3 u_x - v_2 \right) + (u_x)_y \left( (u_y)_y - v_1 \right) \right] + \\ & + (q)_y u_x \left( (u_y)_y + x_2 u_x - v_1 \right) - \left( (W_y)_y + x_2 W_x - v_1 \right) + \\ & + \left( \frac{1}{2} (W_y)_{yy} + x_2 (W_x)_y + x_3 W_x - v_2 \right) \frac{\sigma_0}{\tau} \quad (1.18) \end{aligned}$$

$$3(\sigma_0 v_2 + \sigma_1 v_1) = q(u_x)_y + (q)_y u_x \quad (1.19)$$

$$W_m = \frac{1}{2} (W_{x1} + W_{x2})$$

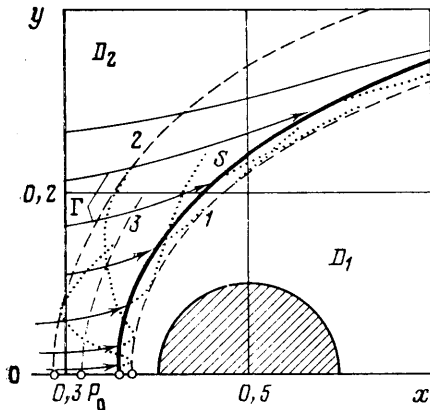
Здесь  $\xi_x$  и  $\xi_y$  — проекции произвольного вектора  $\xi$  на оси  $x$  и  $y$ ;  $(\eta)_x$ ,  $(\eta)_y$ ,  $(\eta)_{xy}$  — соответствующие производные произвольной величины  $\eta$ . Все величины, входящие в (1.13)–(1.19), вычисляются в точке  $(x_0, 0)$ , соответствующей пересечению поверхности  $S$  с осью  $x$ .

Система семи уравнений (1.13)–(1.19) содержит восемь неизвестных:  $x_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $v_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $v_2$ . Восьмое соотношение может быть получено из требования гладкости поверхности разрыва в т.  $P_0$ . В этом случае  $x_3 = 0$ . В том случае, когда концентрация электрического заряда невелика ( $\beta \ll 1$ ), уравнения (1.13)–(1.15) решаются независимо от остальных соотношений и позволяют определить величины  $x_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $v_1$ . Заметим также, что если при вступлении частиц в слой имеются потери импульса и уравнение для нормальной компоненты имеет вид (1.12), то в случае полного торможения частиц силой сопротивления в т.  $P_0$  ( $\gamma(0) = 1$ ) координата  $x_0$  определяется равенством

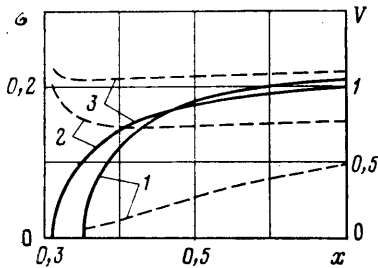
$$W_m = 0$$

В этом случае положение точки  $P_0$  не зависит от скорости и плотности дисперсной фазы и совпадает с точкой остановки одиночной частицы, движущейся вдоль оси.

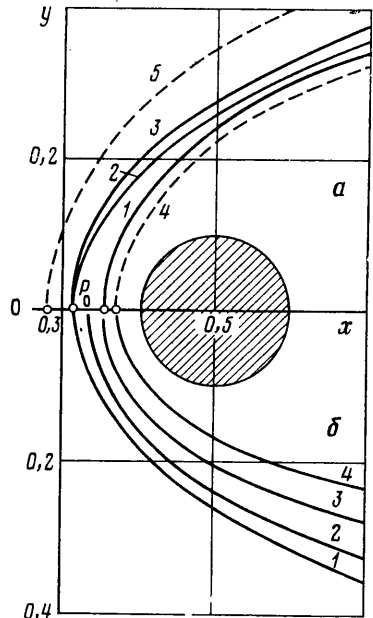
**2. Результаты расчетов.** Система уравнений (1.2)–(1.6), (1.8)–(1.10) интегрировалась численно методом последовательных приближений [4]. На каждой итерации при известном электрическом поле методом характеристик интегрировались уравнения (1.2)–(1.3) совместно с системой (1.8)–(1.10) и таким образом определялись скорость и плотность дисперсной фазы в области  $D_2$ , положение поверхности разрыва и распределение



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

на ней плотности заряда. По найденным объемному и поверхностному зарядам  $q$  и  $\sigma$  из уравнения Пуассона (1.4) и граничных условий (1.5) — (1.6) находилось распределение потенциала в областях  $D_1$  и  $D_2$ . Интегрирование (1.4) осуществлялось методом Зейделя с ускорением, причем поверхностный заряд  $\sigma$  «размазывался» по слою толщиной 3 ячейки. Итерационный процесс продолжался до установления положения слоя и параметров двухфазного потока. Точность контролировалась по сохранению полного тока в сечениях  $x = \text{const}$ .

На фиг. 2—4 представлены некоторые результаты расчетов обтекания сферы дисперсным заряженным потоком в режиме запираания. Интегрирование производилось при условиях  $R=0,1$ ,  $Re_0=0$ ,  $0 \leq \varphi_s \leq 0,25$ ,  $\tau=0,5$ ,  $0 \leq \beta \leq 1,3$ .

Рассмотрим вначале ситуацию, когда можно не учитывать собственное электрическое поле ( $\beta=0$ ).

На фиг. 2 сплошными кривыми показаны траектории  $\Gamma$  заряженных частиц в области  $D_2$ , которые оканчиваются на поверхности разрыва  $S$ . Заторможенные частицы собираются в слой и движутся вдоль него вниз по потоку. Слева от слоя имеется двухфазное течение с непересекающимися траекториями частиц, справа от слоя дисперсная фаза отсутствует. Расчеты проведены при  $\varphi_s=0,25$  и  $\beta=0$ .

Заметим, что эту же задачу (при  $\beta=0$ ) можно решать, не вводя поверхности разрыва, а определяя только траектории частиц с помощью уравнения (1.2) [3]. Соответствующие траектории представляют собой траектории  $\Gamma$  и их продолжения, показанные на фиг. 2 пунктирными линиями. При отсутствии слоя частицы движутся по взаимно пересекающимся траекториям, семейство которых имеет счетное число огибающих; крайние огибающие показаны штриховыми линиями 1 и 2. Кривая 3 соответствует траектории частицы, стартовавшей с бесконечно малой скоростью из точки  $P_0$ , в которой выполняется равенство  $U+E=0$ .

На фиг. 3, а показаны результаты расчетов положения поверхности  $S$  при тех же значениях параметров  $\varphi_s$  и  $\tau$  и различных заданиях  $\gamma$ :  $\gamma=0$ ,  $\gamma=\sin \mu$ ,  $\gamma=\sqrt{\sin \mu}$  (кривые 1—3). Здесь  $\mu$  — угол между вектором скорости частицы, вступающей в слой, и касательной плоскостью к его поверхности. Кривые 4 и 5, так же как на фиг. 2, являются огибающими семейства траекторий частиц, рассчитанных по уравнению (1.2) без привлечения модели поверхностного заряда.

Заметим, что кривые 2 и 3 выходят из точки  $P_0$  — частицы, идущие вдоль оси, полностью теряют свой импульс и вступают в слой с нулевой скоростью в точке, где действующая на покоящуюся частицу результирующая сила равна нулю.

Изменение вдоль поверхностей 1, 2, 3 (см. фиг. 3, а) скорости частиц  $V$  и поверхностного заряда  $\sigma$  показаны на фиг. 4 сплошными и штриховыми линиями 1—3. Из фиг. 4 следует, что скорости частиц в слоях  $S$  при достаточно больших  $x$  практически не зависят от  $\gamma$ . В то же время величина  $\sigma$  на поверхности 3 значительно больше, чем на поверхностях 1 и 2, что связано с увеличением размеров области  $D_1$ , в которой отсутствует дисперсная фаза.

Расчеты при учете собственного электрического поля проводились при  $\varphi_s=0,25$ ,  $\tau=0,5$  и  $\gamma=\sin \mu$ . На фиг. 3, б кривыми 1—4 показаны поверхности разрыва  $S$  при  $\beta=0; 0,6; 1,0; 1,3$ . С увеличением плотности объемного заряда возрастает индуцированное электрическое поле, которое способствует сокращению области  $D_1$  и увеличению области  $D_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Л. М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 267 с.
2. Nielsen K. A., Hill J. C. Capture of particles on spheres by inertial and electrical forces // *Ind. and Eng. Chem., Fundam.* 1976. V. 15. № 3. P. 149—157.
3. Варенцов О. К. Обтекание проводящей сферы потоком с заряженными инерционными частицами // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1982. № 4. С. 21—26.
4. Вагажин А. Б., Грабовский В. И., Лихтер В. А., Шульгин В. И. Электрогазодинамические течения. М.: Наука, 1983. 344 с.
5. Крайко А. Н. О поверхностях разрыва в среде, лишенной «собственного» давления // *ПММ.* 1979. Т. 43. Вып. 3. С. 500—510.

Москва

Поступила в редакцию  
26.VI.1986