

УДК 532.529

О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

КУРДЮМОВ В. Н., СЕРГЕЕВ Ю. А.

На основе модели псевдоожигенного слоя как среды, состоящей из двух взаимодействующих взаимопроникающих идеальных жидкостей, исследуется распространение одномерных линейных и нелинейных возмущений концентрации твердых частиц в псевдоожигенном газом слое. Взаимодействие твердых частиц между собой учитывается введением эффективного давления, зависящего от локальной пористости слоя и относительной скорости дисперсной и дисперсионной фаз, в уравнение сохранения импульсов дисперсной фазы. Определены условия гиперболичности системы уравнений, описывающей распространение волн. Исследована устойчивость однородного состояния. Рассмотрены дисперсионные явления в псевдоожигенном слое. Исследовано распространение стационарной волны концентрации дисперсной фазы. Определены условия образования скачков концентрации на фронте стационарной волны.

Неоднородности псевдоожигенного слоя — пузыри, поршни, «пакеты» твердых частиц и т. п. — возникают обычно в результате эволюции нелинейных возмущений концентрации дисперсной фазы двухфазной среды. К настоящему времени развита теория эволюции одномерных кинематических волн (см., например, [1, 2]), соответствующих бошим пространственным масштабам возмущения и пренебрежению явлениями дисперсии и диссипации. Конечность масштаба возмущения, которую следует учитывать при описании формирования скачков концентрации твердых частиц, принято во внимание, в частности, в [3], где исследованы дисперсионные явления в псевдоожигенном слое. В [1–3] использована модель псевдоожигенного слоя, не учитывающая наличие взаимодействия между частицами дисперсной фазы. Попытка учета такого взаимодействия предпринята, по-видимому, лишь в [4–6] при помощи введения эффективного давления псевдогаза твердых частиц, зависящего только от локального значения пористости слоя. В [4] рассмотрена устойчивость слоя к малым возмущениям, в [5, 6] исследовано распространение слабых нелинейных волн (отметим, что введение эффективного давления в указанном виде приводит к выводу об устойчивости однородного состояния слоя в широком диапазоне значений пористости; в приближении, использованном в [1–3], однородное состояние псевдоожигенного слоя неустойчиво). Следует отметить необоснованность введения эффективного давления дисперсной фазы в предложенном в [4–6] виде; в частности, из уравнений работ [4–6] следует, что градиент концентрации твердых частиц приводит к движению двухфазной среды даже в отсутствие силы тяжести.

Уравнения движения фаз псевдоожигенного слоя, качественно правильно отражающие межчастичное взаимодействие в дисперсной фазе, получены в [7, 8] (см. также монографию [9]). Ниже распространение возмущений в псевдоожигенном слое исследовано на основе предложенной в [7, 8] модели.

1. Основные уравнения. Рассмотрим однородный псевдоожигенный газом слой твердых частиц. При $d_1 \ll d_2$, где d_1 и d_2 — плотности газа и материала твердых частиц, одномерные уравнения сохранения массы и импульсов дисперсной и дисперсионной фаз и сохранения энергии дисперсной фазы, следуя [7, 8] (см. также [9]), запишем с учетом межчастичного взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} &= 0 & (1.1) \\ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \rho F(\rho, |u|)u &= 0 & (\rho + \varepsilon) &= 1 \end{aligned}$$

$$d_2\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\nabla p_* - d_2\rho g + \rho F(\rho, |u|)u = 0$$

$$d_2\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + w\frac{\partial k}{\partial x}\right) = -p_*\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_1\rho uk - \lambda_2\rho K(\rho)k^{3/2}$$

$$p_* = \Lambda\rho W(\rho)k; \quad \lambda_1, \lambda_2, \Lambda > 0$$

Здесь t — время, x — вертикальная координата, ε и ρ — пористость слоя и объемная концентрация твердых частиц соответственно, v и w — средняя скорость газа в промежутках между частицами и средняя скорость частиц дисперсной фазы, $u = v - w$ — относительная скорость фаз, p — давление газа, $F(\rho, |u|)$ — функция, определяемая характером взаимодействия частиц и газа, d_2 — плотность материала твердых частиц, p_* — эффективное давление псевдогаза твердых частиц, возникающее в результате межчастичного взаимодействия, g — ускорение силы тяжести, k — кинетическая энергия мелкомасштабного хаотического движения дисперсной фазы. Последнее соотношение в (1.1) представляет собой уравнение состояния псевдогаза частиц; $\lambda_1, \lambda_2, \Lambda$ следует рассматривать как эмпирические константы, определяемые характером межчастичного взаимодействия (для сталкивающихся «шероховатых» сферических частиц указанные параметры определены в [7, 8]). Отметим, что $\lambda_1 \sim a^{-1}$, $\lambda_2 \sim a^{-1}$, $\Lambda = O(1)$, где a — диаметр частицы дисперсной фазы.

Для функций $K(\rho)$ и $W(\rho)$ ниже будем использовать предложенные в [7, 8] модельные выражения

$$K(\rho) = \frac{\rho^{3/2}}{1 - (\rho/\rho^0)^{3/2}}, \quad W(\rho) = \frac{1}{1 - (\rho/\rho^0)^{3/2}} \quad (1.2)$$

качественно правильно описывающие характер межчастичного взаимодействия; здесь ρ^0 — объемная концентрация частиц при плотной упаковке.

Функцию межфазного взаимодействия F представим в виде

$$F = \frac{8}{9} \frac{d_1\nu}{a^2} \Phi(\rho; |u|) \quad (1.3)$$

Здесь d_1 и ν — плотность и кинематическая вязкость газа соответственно.

Для функции $\Phi(\rho)$ при малых числах Рейнольдса, определенных по размеру твердой частицы, будем использовать предложенное в [10] выражение

$$\Phi(\rho) = \varepsilon^{-11/4} \quad (1.4)$$

Рассмотрим слой бесконечной высоты. Перейдем к безразмерным переменным согласно соотношениям

$$x = Lx', \quad t = \frac{L}{U}t', \quad v = Uv', \quad w = Uw' \quad (u = Uu') \quad (1.5)$$

$$p = d_1U^2\Pi, \quad p_* = d_2U^2\Pi_*, \quad k = U^2e$$

где L — характерный линейный масштаб возмущения, U — скорость газа на входе в слой в расчете на полное сечение слоя.

Складывая уравнения неразрывности и учитывая невозмущенность потока при $x \rightarrow \infty$, найдем соотношение между скоростью относительного движения фаз и скоростью твердых частиц в виде (штрихи далее опущены)

$$u = \varepsilon^{-1}(1 - w) \quad (1.6)$$

Далее будем предполагать, что параметры λ_1 и λ_2 велики, что оправ-

дано, например, для псевдооживленных слоев мелких частиц. В этом случае из уравнения сохранения кинетической энергии мелкомасштабных пульсаций дисперсной фазы и уравнения состояния в (1.1) для эффективного давления дисперсной фазы получим

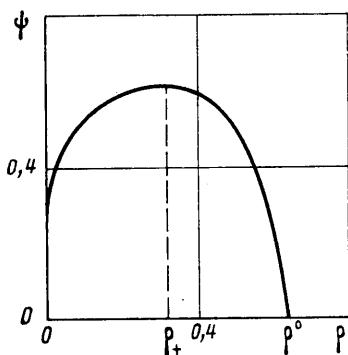
$$P_* = \mu(1-w)^2 \psi(\rho), \quad \psi = \frac{\rho W(\rho)}{\varepsilon^2 K^2(\rho)} \quad (1.7)$$

где $\mu > 0$ — эмпирический параметр, определяемый характером межчастичного взаимодействия (для столкновений «шероховатых» частиц величина μ приближенно определена в [7–9]). Для функций $K(\rho)$ и $W(\rho)$ (1.2) зависимость $\psi(\rho)$ имеет вид [7–9]

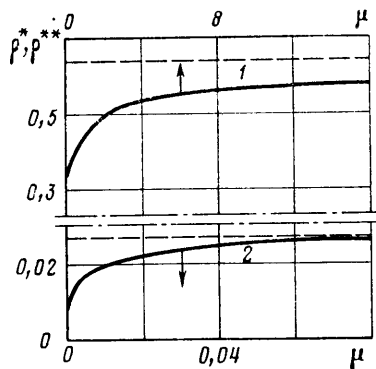
$$\psi = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho^{3/2} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right)^{1/2} \right] \quad (1.8)$$

Вид функции $\psi(\rho)$ приведен на фиг. 1. Значение $\rho = \rho_+ \approx 0,32$ соответствует максимуму функции.

В [4–6] эффективное давление дисперсной фазы вводилось в виде $p_* \sim G(\rho)$, где $G(\rho)$ — некоторая функция, зависящая только от концентрации твердых частиц.



Фиг. 1



Фиг. 2

Авторы [4–6] оправдывали введение эффективного давления в указанном виде фактически тем, что при определенных условиях на функцию $G(\rho)$ решение задачи о линейной устойчивости однородного состояния слоя приводило к выводу об устойчивости слоя в широком диапазоне значений параметров (хорошо известно, что однородное состояние слоя неустойчиво к малым возмущениям, если межчастичное взаимодействие отсутствует; см., например, [3, 11–13]). Как показано выше, физически оправданным при сделанных выше допущениях является введение эффективного давления дисперсной фазы в виде $p_* \sim (v-w)^2 G_1(\rho)$ ($G_1 = \varepsilon^{-2} \psi(\rho)$).

С учетом сделанных допущений система уравнений (1.1) сводится к уравнениям сохранения массы и импульсов дисперсной фазы вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = 0 \quad (1.9)$$

$$\beta \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial [\psi(\rho)(1-w)^2]}{\partial x} \right\} = -1 + \kappa \varphi(\rho)(1-w)$$

$$\varphi(\rho) = \varepsilon^{-1} \Phi(\rho)$$

Здесь параметры β (число Фруда) и κ определены соотношениями

$$\beta = \frac{U^2}{Lg}, \quad \kappa = \frac{9d_1 U v}{8ga^2 d_2}$$

Для системы уравнений (1.9) будем рассматривать задачу Коши и полагать заданными возмущения концентрации $\rho(x)$ и скорости $w(x)$ твердых частиц в начальный момент времени $t=0$.

Отметим, что исследованные в [1, 2] кинематические волны соответствуют значению $\beta=0$.

В однородном стационарном состоянии слоя ($w=0, \rho=\rho_0$) $\kappa\varphi(\rho_0)=1$. Последнее уравнение позволяет определить значение пористости стационарного состояния и дает оценку параметра $\kappa=O(1)$.

Найдем условия гиперболичности системы (1.9). Характеристические скорости $c_{1,2}$ системы (1.9) найдем в виде

$$c_{1,2}=w - \frac{\mu}{\rho} \psi(\rho) (1-w) \left[1 \pm \left(1 + \frac{\rho^2 \psi'}{\mu \psi^2} \right)^{1/2} \right] \quad (1.10)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ρ . Система (1.9) гиперболична, когда

$$\mu \psi^2 + \rho^2 \psi' > 0 \quad (1.11)$$

Для функции ψ вида (1.8) из (1.11) следует гиперболичность системы (1.9) при $\rho < \rho^*(\mu)$. Зависимость $\rho^*(\mu)$ приведена кривой 1 на фиг. 2.

2. Устойчивость однородного состояния. Исследуем устойчивость однородного стационарного состояния слоя $w=0, \rho=\rho_0$ (стационарные состояния слоя, соответствующие нулевой средней скорости частиц, рассматриваются лишь для определенности; однородные состояния с $w=\text{const} \neq 0$, соответствующие режимам «падающего» слоя, движущегося поршня и т. п., получаются из рассмотренных ниже переходом в соответствующую движущуюся систему координат). Вводя малые возмущения стационарного состояния согласно соотношениям $\rho=\rho_0+\eta, w=w$, линеаризуем задачу (1.9). Отыскивая решение полученной линейной задачи в виде плоских волн

$$\eta = N \exp [i(\Omega t - kx)], \quad w = W \exp [i(\Omega t - kx)]$$

где Ω — частота, k — волновое число, получим дисперсионное уравнение в виде

$$\beta \rho_0 \Omega^2 + 2\beta \mu \varphi_0 k \Omega - i \rho_0 \Omega + i \rho_0 c_0 k - \beta \rho_0 \mu \varphi_0' k^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$c_0 = \rho_0 \varphi_0' / \varphi_0 = \rho_0 \kappa \varphi_0' \quad (2.2)$$

$$\varphi_0 = \psi(\rho_0), \quad \varphi_0' = (d\psi/d\rho)_{\rho=\rho_0}, \quad \varphi_0 = \varphi(\rho_0), \quad \varphi_0' = (d\varphi/d\rho)_{\rho=\rho_0}$$

Здесь c_0 — скорость распространения кинематической волны при концентрации $\rho=\rho_0$ [2], равная скорости распространения малых возмущений по течению газа в равновесном однородном состоянии слоя. При функции межфазного взаимодействия вида (1.4) имеем ($\varphi=(1-\rho)^{-\gamma}, \gamma=1^{1/2}/k$)

$$c_0 = \gamma \rho_0 / (1 - \rho_0) \quad (2.3)$$

Дисперсионное уравнение (2.1) приводит к критерию устойчивости вида

$$c_0^2 + 2\mu \rho_0^{-1} c_0 \varphi_0 < \mu \varphi_0' \quad (2.4)$$

Из неравенства (2.4) следует, что однородное состояние устойчиво при $\rho_0 < \rho^{**}(\mu)$. Зависимость $\rho^{**}(\mu)$ приведена кривой 2 на фиг. 2. Заметим, что однородное состояние оказывается устойчивым лишь для низких значений концентрации дисперсной фазы, нереалистичных в случае обычного псевдооживленного слоя и реализующихся, например, в процессах так называемого быстрого псевдооживления. Скорость роста возмущений оценена ниже в разд. 3.

3. Дисперсионные явления. В случае когда пространственный масштаб возмущений L не слишком мал, параметр $\beta \ll 1$. Следуя подходу работы [3], найдем из уравнения (2.1) две ветви зависимости $\Omega(k)$. Первую ветвь найдем разложением частоты по положительным степеням малого параметра β в виде

$$\Omega = c_0 k - i\beta k^2 \mu_1 - \beta^2 k^3 \mu_2 + O(\beta^3) \quad (3.1)$$

$$\mu_1 = c_0^2 + 2\mu \rho_0^{-1} c_0 \varphi_0 - \mu \varphi_0' \quad (3.2)$$

$$\mu_2 = 2\mu_1 (c_0 + \mu \rho_0^{-1} \varphi_0)$$

Первая ветвь соответствует переносу возмущений по течению газа. Вы-

ражение для второй ветви, соответствующей быстро затухающим волнам, распространяющимся против течения газа, здесь не приводится. Отметим лишь, что волны, распространяющиеся против течения газа, затухают как $\exp(-t/\beta)$ [3], что позволяет не учитывать волны, отражающиеся от верхней границы слоя конечных размеров. Последнее означает, что результаты, полученные для бесконечного слоя, справедливы и для псевдооживленных слоев конечной высоты. Аналогично результатам [3] из (3.1) следует, что в области неустойчивости ($\mu_1 > 0$) в слое конечных размеров при малых β имеет место медленный линейный рост возмущений со скоростью $\beta\mu_1 k^2$ (волновое число k ограничено [3]).

Следуя [3], для исследования дисперсии и диссипации при $\beta \ll 1$ для волн малой конечной амплитуды ($\rho = \rho_0 + \eta$, $\eta \ll 1$) получим уравнение Кортвега — де Вриза — Бюргерса

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c(\rho_0 + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \mu_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \beta^2 \mu_2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (3.3)$$

Как и в [3], ищется решение уравнения (3.3) в виде стационарной волны. Из уравнения (3.3) аналогично [3] следует, что при $\mu_1 > \mu_c$, где $\mu_c > 0$ — величина, определенная в [3], возможно решение в виде цуга затухающих солитонов (соответствующая теория подробно изложена в [14]). Полученные в [3] результаты позволяют также исследовать структуру фронта стационарной волны концентрации малой конечной амплитуды. При $\mu_1 < \mu_c$ аналогично [3] найдем, что скачок разрежения возможен при $\rho > \rho_*$, а скачок уплотнения — для $\rho < \rho_*$, где ρ_* соответствует максимуму зависимости характеристической скорости кинематической волны от концентрации (для функции межфазного взаимодействия вида (1.4) $\rho_* = 8/23 \approx 0,348$). Последний вывод находится в соответствии с полученными в [2] результатами для кинематических волн концентрации. Волна уплотнения, формирующаяся при $\rho > \rho_*$, и волна разрежения, формирующаяся при $\rho < \rho_*$, имеют в соответствии с результатами [3] осцилляционную структуру.

Отметим также, что величина μ_1 возрастает с ростом ρ : при $\rho_1 \rightarrow 0$ $\mu_1 \rightarrow -\infty$. Взаимодействие между частицами приводит к тому, что при $\rho < \rho^{**}$ не существует решения в виде затухающих солитонов. Напротив, в области относительно высоких объемных концентраций дисперсной фазы (например, при $\rho > \rho_+ \approx 0,32$) наличие взаимодействия между частицами приводит к более высоким по сравнению с вычисленными в соответствии с результатами работы [3] значениями μ_1 , что сужает область концентраций, при которых возможно формирование скачков концентрации и фронтов с осциллирующей границей, и увеличивает область концентраций твердых частиц, соответствующую формированию цуга затухающих солитонов.

4. Стационарная волна концентрации дисперсной фазы. Рассмотрим теперь решения системы уравнений (1.9) в виде стационарной волны. Выше в разд. 3 были сделаны замечания о формировании стационарной волны малой конечной амплитуды. Ниже исследована стационарная волна произвольной амплитуды и получены условия формирования скачка концентрации на фронте волны. Отметим, что постановка задачи о стационарной волне оправдана в силу «слабой» неустойчивости однородного состояния псевдооживленного слоя конечной высоты при малых значениях параметра $U^2/(gH)$, где H — высота слоя [3].

В уравнениях (1.9) перейдем к переменным

$$X = x - Vt, \quad t \quad (4.1)$$

где V — скорость стационарной волны. Из уравнения неразрывности в (1.9) получим

$$\rho(w - V) = B = \text{const} \quad (4.2)$$

Состояния двухфазной среды перед фронтом волны и за ним будем полагать однородными. Значения параметров перед фронтом и за ним будем обозначать индексами 1 и 2 соответственно. Для общности скорости дисперсионной фазы w_i в невозмущенном состоянии перед фронтом волны будем считать не обязательно равной нулю, включая, таким образом, в рассмотрение поршневой режим псевдооживления, «быстрое» псевдооживление, режим падающего слоя и, вообще говоря, широкий класс дисперсных систем.

Скорости дисперсной фазы w_i ($i=1, 2$) в обеих областях связаны с соответствующими концентрациями ρ_i следующим из уравнения сохранения импульсов в (1.9) соотношением

$$w_i = 1 - [\kappa \varphi(\rho_i)]^{-1} \quad (4.3)$$

Для значений постоянных B и V обычным методом (см., например, [15]) получим

$$\begin{aligned} B &= -\rho_1 \rho_2 \frac{w_2 - w_1}{\rho_2 - \rho_1} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\rho_1 \rho_2}{\varphi(\rho_1) \varphi(\rho_2)} \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \\ V &= \frac{\rho_2 w_2 - \rho_1 w_1}{\rho_2 - \rho_1} = 1 - \frac{1}{\kappa(\rho_2 - \rho_1)} \left[\frac{\rho_2}{\varphi(\rho_2)} - \frac{\rho_1}{\varphi(\rho_1)} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.4), в частности, видно, что скорости движения стационарных волн уплотнения ($\rho_2 > \rho_1$) и разрежения ($\rho_2 < \rho_1$) одинаковой амплитуды совпадают, т. е. уравнения (1.9) допускают решение в виде движущегося поршня.

Из (4.1) и (4.2) следует уравнение для распределения концентрации на фронте стационарной волны в виде

$$\frac{\beta}{\rho^3} \left\{ -B^2 + \mu \rho^2 \frac{d}{d\rho} \left[\psi(\rho) \left(1 - V - \frac{B}{\rho} \right)^2 \right] \right\} \frac{d\rho}{dX} = -1 + \kappa \varphi(\rho) \left(1 - V - \frac{B}{\rho} \right) \quad (4.5)$$

$X \rightarrow +\infty, \quad \rho = \rho_1; \quad X \rightarrow -\infty, \quad \rho = \rho_2$

Исследуем условия образования разрывов концентрации на фронте волны (метод см., например, в [15]). Из (4.4), (4.5) следует, что в отсутствие межчастичного взаимодействия ($\mu=0$) разрыв концентрации может образоваться только на границе двухфазной смеси и дисперсионной среды (газа). В общем случае из (4.5) следует условие образования разрыва в виде

$$\frac{\mu}{b^2} \rho^2 \frac{d}{d\rho} \left[\psi(\rho) \left(1 + \frac{b}{\rho} \right)^2 \right] = 1 \quad (0 \leq \rho \leq \rho^0) \quad (4.6)$$

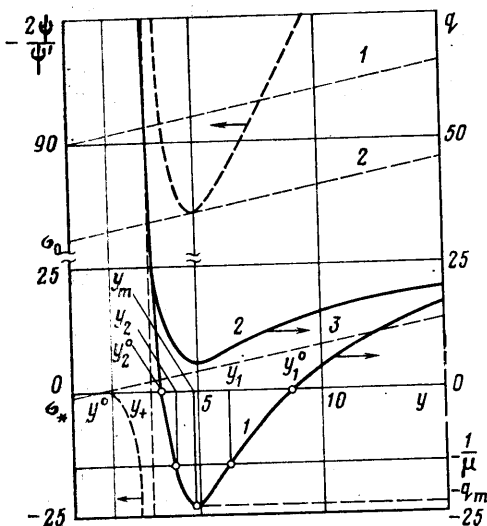
$$b = \rho_1 \rho_2 \frac{\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)}{\rho_2 \varphi(\rho_1) - \rho_1 \varphi(\rho_2)}$$

Далее без ограничения общности будем для определенности рассматривать волну уплотнения ($\rho_2 > \rho_1$). Для существования разрыва решение ρ алгебраического уравнения (4.6) должно также удовлетворять неравенству $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$.

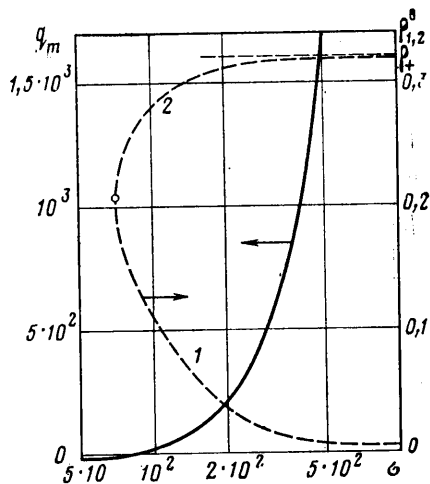
Вводя переменную $y = 1/\rho$ ($y^0 \leq y < +\infty$, $y^0 = 1/\rho^0$), запишем уравнение (4.6) в виде

$$q(y; \sigma) = -\frac{1}{\mu}; \quad q = (y + \sigma)^2 \psi'(y) + 2(y + \sigma) \psi(y) \quad (4.7)$$

$$\psi(y) = \frac{y^{1/2} [y^{1/2} - (y^0)^{1/2}]}{(y-1)^2}; \quad \sigma = \frac{1}{b} = \frac{\rho_2 \varphi(\rho_1) - \rho_1 \varphi(\rho_2)}{\rho_1 \rho_2 [\varphi(\rho_2) - \varphi(\rho_1)]} \quad (4.8)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь штрих означает дифференцирование по y .

Так как функция $\sigma(\rho_1, \rho_2)$ симметрична, из (4.8), (1.4) и последнего соотношения в (1.9) следует, что значения параметра σ лежат в интервале $\sigma_* \leq \sigma < +\infty$, где $\sigma_* \approx [1 - (\gamma + 1)\rho^0] / (\gamma\rho^{02}) \approx -1,33$.

Укажем свойства функции $q(y)$. Из (1.8) для $q(y)$ следует

$$q(y^0) = \frac{3}{(\rho^0)^{3/2}(1-\rho^0)^2} \left(\frac{1}{\rho^0} + \sigma \right)^2 \approx 71,84(1,58 + \sigma)^2 > 0 \quad (4.9)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad q(y) = \frac{5}{3} y^{3/2}$$

Исследуем расположение нулей функции $q(y)$. Рассмотрим сначала случай $\sigma > 0$. Нули функции $q(y)$ определяются решением уравнения

$$y + \sigma = -2\psi/\psi' \quad (4.10)$$

Правая часть уравнения (4.10) изображена штриховой кривой на фиг. 3 (напомним, что функция $\psi(y)$ определена при $y^0 \leq y < +\infty$). Вертикальная асимптота соответствует максимуму функции $\psi(\rho)$ при $\rho = \rho_+$. Функция $q(y)$ имеет два нуля (штриховая прямая 1 на фиг. 3) при

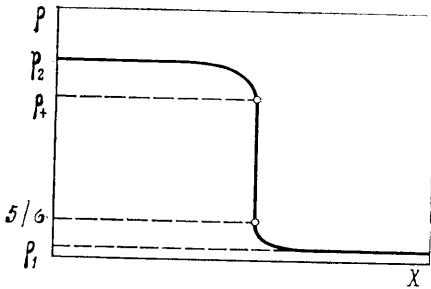
$$\sigma > \sigma_0 = 71,6 \quad (4.11)$$

(и соответственно один при $\sigma = \sigma_0$; прямая 2 на фиг. 3 соответствует указанному значению σ). При $0 < \sigma < \sigma_0$ функция $q(y)$ не имеет нулей. Так как для минимального значения $\sigma = \sigma_*$ имеем $|\sigma_*| < y^0$ (прямая 3 на фиг. 3), функция $q(y)$ не имеет нулей и при $\sigma_* \leq \sigma \leq 0$. Следовательно, условие (4.11) представляет собой необходимое условие существования скачка концентрации дисперсной фазы на фронте стационарной волны. Из (4.11), выражения для σ в (4.8) и (1.4) следует, что скачок возможен при достаточно малой концентрации перед фронтом волны (например, при $\sigma = 80 > \sigma_0$ указанному условию удовлетворяют значения $\rho_2 = 0,5$, $\rho_1 = 10^{-5}$).

Вид функции $q(y)$ при $\sigma > \sigma_0$ и $\sigma_* \leq \sigma \leq \sigma_0$ приведен соответственно сплошными кривыми 1 и 2 на фиг. 3. Пересечения кривой 1 с горизонтальными прямыми $q = \mu^{-1}$ соответствуют решениям уравнения (4.7). Напомним, что σ зависит только от значений концентрации перед фрон-

том и за ним, а μ — только от параметров псевдооживления, поэтому значения σ и μ могут быть заданы независимо.

Функция $q(y)$ имеет минимум $q = -q_m(\sigma)$ при $y = y_m(\sigma)$ (при $\sigma > \sigma_0$, $y_2^\circ < y_m < y_1^\circ$, где $y_2^\circ(\sigma) = 1/\rho_2^\circ$ и $y_1^\circ(\sigma) = 1/\rho_1^\circ$ — нули функции $q(y)$). Отсюда получаем второе необходимое условие существования разрыва



Фиг. 5

$$q_m(\sigma) \geq 1/\mu \quad (4.12)$$

и, следовательно, разрыв возможен лишь при достаточно большом значении μ . Функция $q_m(\sigma)$ приведена на фиг. 4 сплошной кривой. При больших значениях σ (в частности, при $\sigma > \sigma_0$) величина $y_m \approx 4,9$ ($\rho_m \approx 0,2$). При $\sigma \geq 10^3$ из (4.7) следует асимптотическая формула $q_m \approx \sigma^2 \psi'(y_m) \approx 7,23 \cdot 10^{-2} \sigma^2$.

Таким образом, для существования разрыва концентрации дисперсной фазы на фронте стационарной волны необходимо выполнение условий (4.11) и (4.12).

Как следует из (4.10), при больших значениях σ (практически при $\sigma \geq 10^3$) нули функции $q(y)$ приближенно определяются в виде

$$y_2^\circ \approx 1/\rho_+ \approx 3,16, \quad y_1^\circ \approx \sigma/5 \quad (\rho_1^\circ \approx 5/\sigma, \quad \rho_2^\circ \approx \rho_+)$$

При больших значениях μ решения y_1 и y_2 уравнения (4.7) можно считать приближенно равными y_1° и y_2° . Следовательно, при больших значениях σ и μ разрыв возможен при малых значениях концентрации и при значении $\rho = \rho_+$, соответствующем максимуму функции $\psi(\rho)$. При больших значениях σ и $\rho_1 < \rho_1^\circ < \rho_2^\circ < \rho_2$ структура фронта стационарной волны изображена на фиг. 5.

В общем случае для существования скачка при некотором значении концентрации ρ требуется выполнение условия $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$. Следовательно, одно или оба решения $y_1 = 1/r_1$ и $y_2 = 1/r_2$ уравнения (4.7) должны удовлетворять условию $\rho_1 \leq r_1 \leq \rho_2$, $\rho_1 \leq r_2 \leq \rho_2$. Грубым условием, обеспечивающим выполнение указанных неравенств, является, например,

$$\rho_1 \leq \rho_1^\circ(\sigma) \leq \rho_2^\circ(\sigma) \leq \rho_2 \quad (4.13)$$

Функции $\rho_1^\circ(\sigma)$ и $\rho_2^\circ(\sigma)$ приведены на фиг. 4 штриховыми кривыми 1 и 2 соответственно. Отметим, что при выполнении неравенств (4.13) (и соответственно необходимых условий (4.11), (4.12)) структура фронта волны подобна изображенной на фиг. 5.

Приведенные результаты получены для частного вида функции $\psi(\rho)$ (1.8). Заметим, что подобные результаты могут быть получены и для более общего вида функции $\psi(\rho)$, обладающей аналогичными (1.8) свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голо В. Л. Параметр взаимодействия в кипящем слое // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30. № 1. С. 233—234.
2. Сергеев Ю. А. Распространение нелинейных волн в бидисперсном псевдооживленном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 49—58.
3. Голо В. Л., Мясников В. П. Дисперсионные явления в кипящем слое // ПММ. 1975. Т. 39. № 4. С. 747—751.
4. Garg S. K., Pritchett J. W. Dynamics of gas-fluidized beds // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. № 10. P. 4493—4500.
5. Fanucci J. B., Ness N., Yen R.-H. On the formation of bubbles in gas-particulate-fluidized beds // J. Fluid Mech. 1979. V. 94. № 2. P. 353—367.

6. *Kluwick A.* Small-amplitude finite-rate waves in suspensions of particles in fluids // *Z. angew. Math. und Mech.* 1983. В. 63. № 3. S. 161–171.
7. *Гольдштик М. А.* Элементарная теория кипящего слоя // *ПМТФ.* 1972. № 6. С. 106–112.
8. *Гольдштик М. А., Козлов Б. Н.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем // *ПМТФ.* 1973. № 4. С. 67–77.
9. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
10. *Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М.* Приближенные закономерности гидравлики взвешенного слоя и стесненного падения // *Изв. вузов. Нефть и газ.* 1958. № 1. С. 125–131.
11. *Jackson R.* The mechanics of fluidized beds. Pt I. The stability of the state of uniform fluidization // *Trans. Instn. Chem. Engrs.* 1963. V. 41. P. 13–21.
12. *Murray J. D.* On the mathematics of fluidization. Pt I. Fundamental equations and wave propagation // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 21. № 3. P. 465–493.
13. *Бувеч Ю. А., Гупало Ю. П.* О поверхностях разрыва в дисперсных системах // *ПММ.* 1970. Т. 34. № 4. С. 722–734.
14. *Сагдеев Р. З.* Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // *Вопросы теории плазмы. Вып. 4.* М.: Атомиздат, 1964. С. 20–80.
15. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.V.1986