

УДК 532.5.013.4

**ОБ АСИМПТОТИКЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
В СВОБОДНЫХ СДВИГОВЫХ СЛОЯХ**

ШИКИНА И. С.

В линейном приближении в рамках идеальной жидкости изучается асимптотическое поведение пространственных локализованных возмущений параметров сдвигового потока, которые при больших временах превращаются в растущие и распространяющиеся волновые пакеты. Поведение пакетов исследуется во всевозможных системах координат, движущихся с постоянной скоростью параллельно плоскости сдвига скорости. Математически задача сводится к исследованию методом перевала асимптотики двойных интегралов Фурье, параметрически зависящих от этих скоростей. Седловые точки, определяющие эту асимптотику, находятся численно.

В плоскости течения, параллельной сдвигу скорости, указана движущаяся и линейно расширяющаяся со временем область, в которой при больших временах находятся растущие возмущения. Полученные результаты позволили написать критерии абсолютной и конвективной неустойчивости.

Ранее такая задача рассматривалась для течений идеальной жидкости с тангенциальным разрывом скорости [1, 2] и для течений в следе [3].

1. Свободными сдвиговыми слоями называются неограниченные плоскопараллельные течения, в которых скорость w зависит от одной пространственной координаты z , а при $z \rightarrow \pm\infty$ она принимает различные постоянные значения.

Рассмотрим слой сдвига в несжимаемой жидкости, для которого

$$w = 0,5(w_1 + w_2) + 0,5(w_1 - w_2) \operatorname{th}(z/h)$$

Здесь $w_1 = w(\infty)$, $w_2 = w(-\infty)$, h — характерная толщина слоя, в котором скорость отлична от константы.

Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $0,5(w_1 + w_2)$, и с осью x , параллельной относительной скорости $w_1 - w_2$. В ней безразмерная скорость имеет вид $W = \operatorname{th} Z$.

В линейной постановке устойчивость сдвиговых слоев рассматривалась разными авторами (см. [4], обзоры [5, 6]), причем изучались возмущения параметров течения $\Psi(x, y, z, t)$ типа нормальных мод $\Psi = \psi(z) \exp(ikr - i\omega t)$, где $k = k_x e_x + k_y e_y$ — волновой вектор, ω — частота, $r = x e_x + y e_y$. Для таких возмущений как в идеальной, так и в вязкой жидкости сдвиговые слои являются неустойчивыми течениями, так как для действительных k ($k \in R$) существует ω с $\operatorname{Im} \omega > 0$. Эту неустойчивость будем называть простой, чтобы отличить ее от абсолютной и конвективной, о которых речь пойдет ниже.

Будем считать жидкость идеальной; тогда для определения собственных частот $\omega_j(k)$ и собственных функций $\psi_j(k, z)$ надо решить краевую задачу для уравнения Рэлея

$$\left(\frac{d^2 \psi}{dz^2} - K^2 \psi \right) \left(W - \frac{\Omega}{K_x} \right) - \frac{d^2 W}{dz^2} \psi = 0, \quad \psi(+\infty) = \psi(-\infty) = 0$$

$$W = \operatorname{th} Z, \quad \Omega = \frac{2\omega h}{|w_1 - w_2|}, \quad K_x = k_x h, \quad K^2 = K_x^2 + K_y^2 \quad (1.1)$$

Здесь и далее W и координаты X, Y, Z обезразмерены с помощью $0,5|w_1 - w_2|$ и h . Решения (1.1) определяют возмущения вертикальной компоненты скорости или функции тока в двумерном течении.

Краевая задача (1.1) при $K_x = K, K_y = 0$ численно решена в [7] для $K \in R$ и в [8] для $\Omega \in R$. Для $K \in R$ при $|K| < 1$ существует одно собственное значение $\Omega_1(K)$, для которого $\text{Im } \Omega_1 > 0$ [7]. При $|K| > 1$ невязкая задача (1.1) не имеет собственных значений. Однако учет вязкости показывает [4], что уравнение Орра – Зоммерфельда при $|K| > 1$ имеет только затухающие решения, которые в пределе исчезающей вязкости не стремятся к решениям уравнения Рэлея.

Из существования единственной растущей моды следует, что у любого первоначально локализованного возмущения его растущая со временем часть имеет вид волнового пакета

$$\Psi(X, Y, Z, \tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{K}) \psi_1(Z, \mathbf{K}) \exp[i(K_x X + K_y Y) - i\Omega_1(\mathbf{K}) \tau] dK_x dK_y \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{K} \in R$, $\Omega_1(\mathbf{K})$ – собственная частота растущей моды, $\psi_1(Z, \mathbf{K})$ – соответствующая ей нормированная собственная функция, $A(\mathbf{K})$ – соответствующая этой моде Фурье-компонента начального возмущения, $\tau = 0,5t|w_1 - w_2|/h$.

При наличии простой неустойчивости найдется система координат $x' = x - ut, y' = y - vt$, движущаяся с некоторой скоростью $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$, в которой возмущения (1.2) растут при $t \rightarrow \infty$ [9]. Если при этом $\mathbf{v} = 0$, то неустойчивость называется абсолютной. Если при $\mathbf{v} = 0$ возмущения (1.2) затухают, то неустойчивость будет конвективной (сносовой).

Рассмотрим поведение возмущений (1.2) при $t \rightarrow \infty$, фиксированных x', y', z и различных значениях \mathbf{v} , т. е. найдем асимптотику

$$\Psi(X', Y', Z, \tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{K}) \psi_1(Z, \mathbf{K}) \exp[i\mathbf{K}\mathbf{R}' - i\Omega'(\mathbf{K}) \tau] d\mathbf{K} \quad (1.3)$$

$$\Omega' = \Omega_1 - UK_x - VK_y, \quad U = \frac{2u}{|w_1 - w_2|}, \quad V = \frac{2v}{|w_1 - w_2|}, \quad \mathbf{R}' = X'\mathbf{e}_x + Y'\mathbf{e}_y$$

Пользуясь аналитичностью подынтегральной функции и пытаясь уменьшить инкремент нарастания у подынтегральной экспоненты, будем смещать двумерный контур интегрирования в область комплексных значений K_x, K_y . Если такому уменьшению препятствует наличие седловых точек K_{xs}, K_{ys} у функции $\Omega'(\mathbf{K})$, то, согласно методу перевала [10], при $\tau \rightarrow \infty$ получим

$$\Psi \sim \frac{1}{\tau \sqrt{\Delta}} \exp(-i\Omega'_s \tau), \quad \Omega'_s \equiv \Omega'(K_s), \quad \Delta \equiv \det \|\partial^2 \Omega' / \partial K_i \partial K_j\| \neq 0 \quad (1.4)$$

Седловые точки K_s находятся из уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial K_x} = U, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial K_y} = V$$

Значения U, V , для которых $\text{Im } \Omega'_s > 0$, соответствуют скоростям систем координат, в которых возмущения $\Psi(X', Y', Z, \tau)$ растут со временем. Если $\text{Im } \Omega'_s \leq 0$, то для соответствующих U, V возмущения затухают.

Растущий вклад в интеграл (1.3) может дать лишь та часть контура интегрирования, на котором $\text{Im } \Omega' > 0$. Если в результате деформирования на контуре стало выполняться равенство $\text{Im } \Omega' = 0$, то интеграл по этому

контуру будет стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. На плоскости U, V можно указать такую область D , что для $U, V \in D$ возмущения растут, а для U, V , лежащих вне D или на ее границе L , возмущения (1.3) затухают при $\tau \rightarrow \infty$.

2. Найдем асимптотику одномерных волновых пакетов (1.3), т. е. будем считать $K_x = K, K_y = 0$. Такие пакеты соответствуют плоским возмущениям $\Psi = \Psi(X, Z, \tau)$.

Заметим, что в этом случае при $K \in R$ краевая задача (1.1) инвариантна относительно одновременной смены знака Ω и K , а так как комплексные собственные частоты входят в (1.1) сопряженными парами, то для исследования растущей асимптотики (1.3) достаточно рассмотреть интегралы по $K_x = K$ от 0 до ∞ .

В комплексной плоскости K седловые точки лежат на линии $\text{Im } d\Omega/dK = 0$, которую назовем хребтом. В них $\text{Re } d\Omega/dK = U$. Для определения асимптотики волнового пакета для комплексных K с $0 \leq \text{Re } K \leq 1, 0 \leq \text{Im } K \leq 0,5$ методом [7, 8] численно находилась собственная частота $\Omega(K)$, соответствующая растущей моде. Из расчетов $\Omega(K)$ для $K \in R$, совпадающих с результатами [7], следует, что для $K \in [0, 1]$ $\text{Re } \Omega = 0, \text{Im } \Omega > 0, \text{Im } \Omega(0) = \text{Im } \Omega(1) = 0$. В точке $K = K_{s0} \approx 0,4446$ $\text{Im } \Omega$ имеет максимум, поэтому K_{s0} является точкой хребта и в ней $U = 0$. В окрестности этой точки справедливо разложение

$$\Delta\Omega = i[a(\Delta K)^2 + b(\Delta K)^3], \quad \Delta K = K - K_{s0}$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \text{Im } \Omega}{\partial (\text{Re } K)^2} (K_{s0}) < 0, \quad b = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \text{Im } \Omega}{\partial (\text{Re } K)^3} (K_{s0}) > 0$$

Отбрасывая член, содержащий $(\Delta K)^3$, получим, что на хребте $\text{Re } 2a\Delta K = 0$, т. е. $\Delta K = \pm i\lambda$. Учитывая следующий член разложения, найдем $\text{Re } \Delta K = 1,5b\lambda^2/a < 0$; значит в точке K_{s0} касательная на хребте вертикальна и в окрестности этой точки он лежит левее линии $\text{Re } K = \text{Re } K_{s0}$.

Чтобы найти весь хребет, дисперсионное уравнение $\Omega(K)$ в комплексной окрестности седловой точки, где $d\Omega/dK = U$, аппроксимировалось параболой и из условия $d\Omega/dK = U + \Delta U$ находилась следующая седловая точка K_s и затем вычислялось собственное значение Ω_s .

При изменении знака $\text{Im } K$ в силу принципа симметрии Шварца $\text{Re } \Omega$ меняет, а $\text{Im } \Omega$ не меняет знак, поэтому хребет симметричен относительно оси $\text{Re } K$, на нем $U > 0$ в верхней полуплоскости K и $U < 0$ в нижней. При движении по хребту от точки K_{s0} $|U|$ увеличивается, а $\text{Im } \Omega_s' > 0$ уменьшается, так как $\partial \text{Im } \Omega' / \partial U = -\text{Im } K$. При $|U| = U_* \approx 0,76$ $\text{Im } \Omega_s' = 0$, а при $|U| > U_*$ $\text{Im } \Omega_s' < 0$. При $U = U_*$ $\text{Re } K_s \approx 0,265, \text{Im } K_s \approx 0,484$.

Докажем, что в плоскости K при $|U| \leq U_*$ две линии $\text{Im } \Omega' = \text{const}$, проходящие через седловую точку, пересекают ось $\text{Re } K$ на $[0, 1]$. На $[0, 1]$ $\partial^2 \text{Im } \Omega / \partial K^2 < 0$, поэтому в двух разных точках его пересекают две линии: $\text{Im } \Omega' = C, \text{Im } \Omega'(K_{s0}) > C \geq 0$. Пусть при некотором значении $|U| \leq U_*$ лишь одна (или ни одна) из этих линий проходит через седловую точку, в которой $\text{Im } \Omega_s' = C$. Тогда в плоскости K на одной (или двух) из боковых сторон любого четырехугольника, внутри которого лежит седловая точка, а основанием которого является $[0, 1]$, $\text{Im } \Omega'$ должна иметь максимум. Вычисления показывают, что на прямых OB, AC (фиг. 1) $\partial^2 \text{Im } \Omega / \partial K^2 > 0$, следовательно, на этих прямых $\text{Im } \Omega' = \text{Im } \Omega - U \text{Im } K$ может иметь только минимум и, значит, при всех $|U| \leq U_*$ две линии $\text{Im } \Omega' = \text{Im } \Omega_s'$, идущие из седловой точки, пересекают $[0, 1]$. При $U = U_*$ $\text{Im } \Omega_s' = 0$ и линия $\text{Im } \Omega' = 0$ соединяет седловую точку с концами $[0, 1]$. Можно доказать, что при $|U| > U_*$ (для которых $\text{Im } \Omega_s' < 0$) точки $K = 0$ и 1 в плоскости K соединены линией, на которой $\text{Im } \Omega' = 0$.

Деформируя для $|U| < U_*$ контур интегрирования в (1.3) с $[0, 1]$ оси $\text{Re } K$ в перевальный контур, проходящий через найденный хребет, получим, что при этих значениях U возмущения (1.3) растут со временем. При $|U| \geq U_*$ интегрирование в (1.3) можно провести по линии $\text{Im } \Omega' = 0$, соединяющей концы $[0, 1]$, и поэтому для $|U| \geq U_*$ $\Psi(X', Z, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

делом собственных значений вязкой задачи при $R \rightarrow \infty$, если на кривой, соединяющей концы интегрирования в комплексной плоскости Z

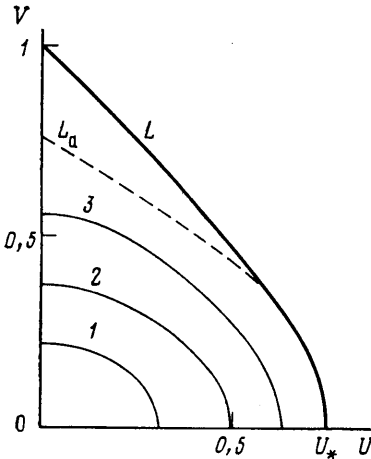
$$\operatorname{Re} Q \equiv \operatorname{Re} \int \sqrt{iK_x(W-c)} dZ$$

меняется монотонно и $c \equiv \Omega/K_x \neq W$. (Для пространственных возмущений параметром разложения в уравнении Орра — Зоммерфельда является $\varepsilon = \sqrt{K_x R}$.)

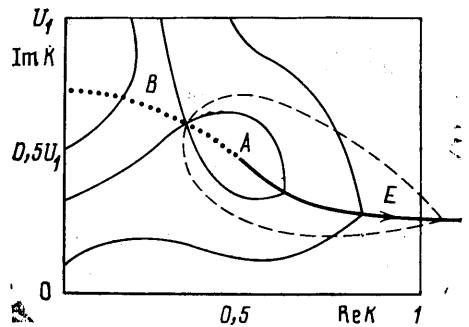
Покажем, что $\operatorname{Re} Q$ меняется монотонно на действительной оси Z , если выполнены условия

$$\operatorname{Im} c > 0, \quad \operatorname{Re} K_x > 0 \quad (3.1)$$

Допустим, что $d \operatorname{Re} Q/dZ = 0$ для $Z \in R$, тогда $\operatorname{Re} \sqrt{iK_x(W-c)} = 0$. Отсюда, так как W — действительно, при $\operatorname{Im} c > 0$ получим $\operatorname{Im}^2 K_x / \operatorname{Re} K_x + \operatorname{Re} K_x < 0$,



Фиг. 3



Фиг. 4

что невозможно при $\operatorname{Re} K_x > 0$. (Нетрудно также проверить, что при выполнении (3.1) в окрестности критической точки $W=c$ ось $\operatorname{Re} Z$ пересекает лишь одна линия Стокса $\operatorname{Re} Q=0$.)

При решении краевой задачи (1.1) условия (3.1) были выполнены всюду в плоскости α , где проводились вычисления, и лишь при $\alpha=0$ имело место равенство $K_x=K_y=0$. Точке $\alpha=0$ на кривой L соответствуют точки $U=0$, $V^2=1$. Физически ясно, что возмущения с $K=0$ воспринимают сдвиговый слой как тангенциальный разрыв, для которого [1] на L также $V^2=1$ при $U=0$.

В найденной области $D \operatorname{Im} \Omega_s'(U, V) > 0$, но для доказательства того, что всюду в D и только в ней возмущения (1.3) растут, необходимо проследить за деформацией контура интегрирования в (1.3), что требует знания «рельефа» $\operatorname{Im} \Omega'$ на комплексных плоскостях K_x, K_y . (В [3] этот вопрос вообще не рассматривается.)

Для приближенного исследования рельефа аппроксимируем растущее собственное значение $\beta(\alpha)$ при $\alpha \in R$ зависимостью

$$\beta = a i \alpha (1 - \alpha), \quad \alpha > 0, \quad a = 4 \max \operatorname{Im} \beta \approx 0,76 \quad (3.2)$$

и будем рассматривать (3.2) как приближенное дисперсионное уравнение для комплексных α с $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Для (3.2) в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > 0$ единственным хребтом $\operatorname{Im} d\beta/d\alpha = 0$, $\operatorname{Re} d\beta/d\alpha = U$ является прямая $\operatorname{Re} \alpha = 0,5$, на которой $\operatorname{Im} \beta_s' = a(1-U_1^2)/4$, $U_1 = U/a$, $\beta' = \beta - \alpha U$. При $|U_1| \geq 1$ $\operatorname{Im} \beta_s' \leq 0$. Линии $\operatorname{Im} \beta' = \operatorname{const}$, представляющие собой семейство гипербол, качественно согласуются с изолиниями двумерной задачи, полученными численно.

Для трехмерных возмущений (3.2) преобразуется в

$$\Omega = a i K_x (1 - K), \quad \operatorname{Re} K > 0 \quad (3.3)$$

Вопрос о деформации двумерного контура интегрирования в (1.3) рассмотрим аналогично [2]. Сначала будем считать K_y действительным и найдем асимптотику K_y фурье-компоненты возмущения (1.3). Для фиксированного значения U она определится седловыми точками функции $\Omega' = \Omega - UK_x$, для которых $\partial\Omega/\partial K_x = U$, т. е.

$$K_x^2 = bK - K^2, \quad b = 1 + iU_1, \quad U_1 = U/a, \quad K_x = K_x(U, K_y)$$

Интегрируя в (1.3) по K_x , учтем вклад всех таких точек. Затем в (1.3) вместо переменной K_y будем считать второй независимой переменной K , так как $K_y^2 = -2K^2 - bK$. В плоскости K найдем седловые точки функции $\Omega' = \Omega' - VK_y$, для которых $\partial\Omega'/\partial K_y = V$. Они лежат на линии

$$V^2 = a^2(b - K)(b - 2K), \quad V^2 \geq 0$$

Для фиксированного U в плоскости K имеются две такие линии — куски гипербола $(\operatorname{Re} K - 3/4)(\operatorname{Im} K - 3U_1/4) = U_1/16$, на которых $\operatorname{Im} V = 0$. На одной из них всюду $\operatorname{Im} \Omega_s' \leq 0$, а на другой, хребте $\operatorname{Im} \Omega_s' \geq 0$, — если $|U_1| \leq 1$. На фиг. 4 хребет в плоскости K указан пунктирной линией, в точке A $K = b/2$, $V = 0$, $K_y = 0$. При движении от точки A вдоль хребта $|V|$ монотонно увеличивается, а $\operatorname{Im} \Omega_s'(U, V) > 0$ монотонно уменьшается и для каждого $|U_1| \leq 1$ на хребте найдется точка B , в которой $\operatorname{Im} \Omega_s' = 0$, а $V = V_*(U)$. При $U_1 = 1$ точка B совпадает с A .

В (1.3) интегрирование ведется по оси $\operatorname{Re} K_y$, которая на плоскости K преобразуется в дважды проходимый с обходом точки A кусок гиперболы $(\operatorname{Re} K - 1/4) \times (\operatorname{Im} K - U_1/4) = U_1/16$. (Линия AE на фиг. 4, стрелкой указано направление роста $\operatorname{Re} K_y$.) Так как, согласно (3.3), $\operatorname{Im} \Omega > 0$ для $|K_y| < 1$, то, сдвигая контур интегрирования с линии $\operatorname{Im} K_y = 0$, проводим его через перевальную точку хребта, где при $|V| < V_*$ $\operatorname{Im} \Omega_s' > 0$, а при $|V| > V_*$ $\operatorname{Im} \Omega_s' < 0$. Линии $\operatorname{Im} \Omega' = \text{const}$ для $|U_1| < 1$, $|V| < V_*$ в плоскости K представлены качественно на фиг. 4. Перевальный контур показан штрихами. В плоскости U, V совокупность $V_*(U)$ образует линию L_a , ограничивающую область D_a , в которой при (3.3) возмущения (1.3) растут. Линия L_a показана штрихами на фиг. 3.

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ первоначально локализованные возмущения сдвигового потока в каждой точке оси z превращаются в растущие со временем волновые пакеты, которые двигаются с групповой скоростью U , $V \in D$. Зависимость возмущения от z определяется растущей собственной функцией краевой задачи (1.1). В плоскости сдвига скорости растущие возмущения находятся в области, подобной D , которая линейно расширяется со временем. Центр этой области двигается со скоростью $0,5(w_1 + w_2)$ и в нем скорость роста возмущений (1.3) максимальна.

Зная D , можно выписать критерии роста или затухания (1.3) в произвольной системе координат [1]. Отложим от точки O вектор $OU_* = 0,5U_*(w_1 - w_2)$. Приняв его за отрезок OU_* оси U , построим на нем область D и проведем вектор $OB = -0,5(w_1 + w_2)$. Если точка B окажется внутри D , то неустойчивость будет абсолютной, если B лежит вне области D или на ее границе L , то неустойчивость конвективная. В частности, если имеет место сдвиг двух параллельных потоков, то неустойчивость конвективная. Для антипараллельных потоков растущие возмущения сносятся течением, если $|w_\alpha| \leq 0,136|w_\beta|$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

Отметим, что вид возмущенной области при больших временах и условии абсолютной неустойчивости не зависят от характерной толщины слоя h . Введение конечного h или учет поверхностного натяжения на тангенциальном разрыве [1, 2] можно рассматривать как разные способы, позволяющие ограничить скорость роста нормальных мод для течений с тангенциальным разрывом скорости. Однако, несмотря на то что при отсутствии силы тяжести найденная в [1, 2] область роста возмущений не зависит от коэффициента поверхностного натяжения, ее форма не совпадает с найденной здесь формой области D .

Автор выражает искреннюю благодарность А. Г. Куликовскому за постановку задачи и многочисленные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Шикина И. С. О развитии двумерных возмущений на поверхности тангенциального разрыва // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 12–16.
2. Куликовский А. Г., Шикина И. С. Об асимптотическом поведении локализован-

- ных возмущений при неустойчивости Кельвина – Гельмгольца // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 23–30.
3. *Gaster M., Davey A.* The development of three-dimensional wave-packets in unbounded parallel flows // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. № 4. P. 801–808.
 4. *Берцов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
 5. *Маслоу С. А.* Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 218–270.
 6. *Michalke A.* The instability of free shear layers // *Progr. Aeronaut. Sci.* 1972. V. 12. P. 213–239.
 7. *Michalke A.* On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 19. № 4. P. 543–556.
 8. *Michalke A.* On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 23. № 3. P. 521–544.
 9. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* Критерии нарастания волн // Успехи физ. наук. 1971. Т. 104. Вып. 2. С. 185–200.
 10. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
 11. *Линь Цзяцзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VII.1986