

УДК 532.526.5

ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТОНКОМ КОНУСЕ

ЗАМЕТАЕВ В. Б.

Исследуется ламинарное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого тела, установленного под малым углом атаки по отношению к набегающему потоку. Решение задачи строится методом сращиваемых асимптотических разложений, примененным к анализу уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса.

Хорошо известно, что около тонких тел существует два принципиально различающихся типа течений: безотрывное обтекание, при котором вязкие эффекты проявляются лишь в тонком пограничном слое, и отрывное, со сходом вихревой пелены, которое реализуется при больших углах атаки тела относительно направления набегающего потока. Определенную простоту в топологическом смысле представляют течения около тел, имеющих острые кромки, например около треугольного крыла, безотрывное обтекание которого невозможно при наличии угла атаки. Более того, для таких конфигураций вихревая пелена, как правило, сходится именно с острых кромок. Сложнее предсказать априори картину течения около гладкого тела, для отрывного обтекания которого трудности связаны с произволом в положении линии схода вихревой пелены. Существуют работы, посвященные развитому трехмерному отрыву, например, коническому отрыву с гладкой поверхности [1], задача о котором фактически свелась к плоской теории ламинарного отрыва [2].

Возникает закономерный вопрос о способах перестройки присоединенного течения в отрывное, о том новом свойстве, которое вызывает переход от одного решения стационарных уравнений к другому по достижении критического угла атаки.

В плоском случае ответ получен в работах [3–5], посвященных взрыву короткого срывного пузыря на передней кромке тонкого профиля. Построены решения и для некоторых других ситуаций [6, 7].

В данной работе основное внимание уделено присоединенному течению жидкости около тела, а именно изучается вопрос о кризисе такого течения, который наступает при определенном значении угла атаки α_* . При меньших углах атаки решение уравнений пограничного слоя на конусе гладкое, при больших оно непродолжимо до подветренной линии стекания и заканчивается особенностью, аналогичной найденной Гольдштейном для плоского случая.

В работе изучена структура решения уравнений пограничного слоя при угле атаки, стремящемся к критическому значению в окрестности особой точки — точки нулевого окружного напряжения поверхностного трения. Показано, что предельное решение особое, но продолжимое. Особенность характеризуется изломом в толщине вытеснения и в обеих компонентах поверхностного напряжения трения.

1. Потенциальное течение и пограничный слой. Пусть некоторое тонкое тело поставлено в однородный поток вязкой несжимаемой жидкости под углом атаки α . На форму тела наложим ограничение — оно должно иметь конический носок, причем пусть для простоты конус будет круговой. Будем считать все размеры отнесенными к длине тела L , скорости — к скорости набегающего потока U_∞ , а безразмерное давление введем по формуле $P = p_\infty + \rho U_\infty^2 p$. Число Рейнольдса $R = U_\infty L / \nu$, ν — коэффициент кинематической вязкости. В отнесенных координатах тело изображено на фиг. 1. Форма его пусть будет следующая:

$$r = \varepsilon r_1(x, \theta), \quad r_1 = x, \quad x \in [0; 0,5], \quad r_1 = r_0(x, \theta), \quad x \in (0,5; 1]$$

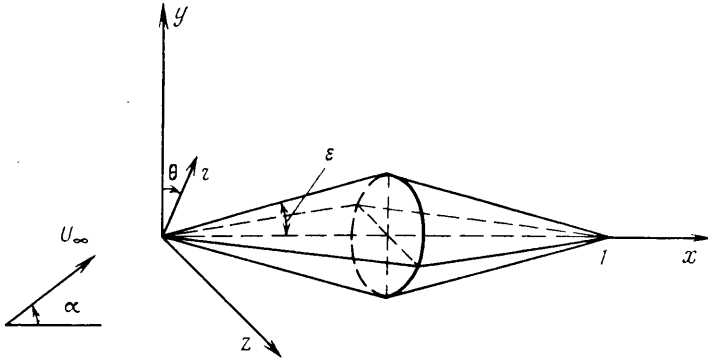
где $r_0(x, \theta)$ — некоторая функция, гладко сопрягающаяся с круговым конусом в точке $x=0,5$. Угол атаки нормируем следующим образом: $\alpha = \varepsilon \alpha_0$.

Решение уравнений Навье — Стокса будем строить методом сращиваемых асимптотических разложений при двойном предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ с условием $\varepsilon \gg R^{-1/2}$.

Задача построения потенциала обтекания тонкого тела вращения без угла атаки решена в [8]. При учете угла атаки асимптотическое разложение потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= x + \varepsilon^2 \ln \varepsilon \frac{q(x)}{2\pi} + \varepsilon^2 \varphi_2(x, y_1, z_1) + \dots \\ y_1 &= y/\varepsilon, \quad z_1 = z/\varepsilon, \quad r_1^2 = y_1^2 + z_1^2 \\ \varphi_2 &= \frac{q(x)}{2\pi} \ln r_1 + G(x) + \alpha_0 y_1 \left(1 + \frac{x^2}{r_1^2} \right) \end{aligned}$$

Здесь $q(x)$ — плотность источников на оси тела, для конического носи-



Фиг. 1

ка $q=2\pi x$. Функция G определяется всей формой тела, ее конкретный вид для дальнейшего анализа интереса не представляет.

На поверхности конуса асимптотические разложения продольной и окружной скоростей и давления имеют вид

$$\begin{aligned} u &= 1 + \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \varepsilon^2 u_2(x, \theta) + \dots, \quad v = \varepsilon(-2\alpha_0 \sin \theta) + \dots \\ p &= -\varepsilon^2 \ln \varepsilon - \varepsilon^2(2\alpha_0 \cos \theta + 2\alpha_0^2 \sin^2 \theta + F(x)) + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

конкретный вид $F(x)$ не важен.

Уравнения пограничного слоя удобно получить из уравнений Навье — Стокса, записанных в цилиндрической системе координат [9]. Пусть u , v , w — соответственно продольная, окружная и радиальная скорости, тогда, пользуясь (1.1), ищем решение уравнений Навье — Стокса в виде

$$\begin{aligned} u &= u_1(x, \theta, Y) + \dots, \quad v = \varepsilon v_1(x, \theta, Y) + \dots, \quad w = \varepsilon u_1 + R^{-1/2} w_1(x, \theta, Y) + \dots \\ p &= -\varepsilon^2 \ln \varepsilon + \varepsilon^2 p_1(x, \theta, Y) + \dots, \quad Y = R^{1/2}(r - \varepsilon x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Относительно членов в (1.2) с индексом 1 получаем систему уравнений пограничного слоя, которая после замены $\theta = \pi + \varphi$ примет вид

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{v_1}{x} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \\ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{v_1}{x} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial Y} + \frac{v_1 u_1}{x} &= -\frac{1}{x} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{u_1}{x} + \frac{\partial w_1}{\partial Y} &= 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u_1=v_1=w_1=0, \quad Y=0; \quad u_1=1, \quad v_1=2\alpha_0 \sin \varphi, \quad Y \rightarrow +\infty$$

$$\frac{dp_1}{d\varphi} = -2\alpha_0 \sin \varphi (1+2\alpha_0 \cos \varphi)$$

К системе (1.3) необходимо добавить начальные условия при $x \rightarrow 0$ и $\varphi = 0$. Отметим, что угол φ отсчитывается от линии растекания на наветренной стороне конуса.

Будем искать решение системы (1.3) в автомодельном виде, так как краевые условия не зависят от x

$$u_1=u_1(\varphi, \eta), \quad v_1=v_1(\varphi, \eta), \quad w=x^{-1/2}(1/2\eta u_1+w_2), \quad \eta=Yx^{-1/2}$$

После введения двух функций тока F и ψ по формулам $u_1=\partial F/\partial \eta$, $v_1=\partial \psi/\partial \eta$ и выражения вертикальной скорости в виде $w_2=-1,5F-\partial \psi/\partial \varphi$ получим уравнения автомодельного пограничного слоя

$$-\left(\frac{3}{2}F + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \eta} = \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3}$$

$$-\left(\frac{3}{2}F + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi \partial \eta}\right) = -\frac{dp_1}{d\varphi} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}$$

$$F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 2\alpha_0 \sin \varphi, \quad \eta \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = U_0(\eta), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \quad \varphi = 0$$

Здесь $U_0(\eta)$ — решение уравнений пограничного слоя на линии растекания.

Система (1.4) решалась численно при различных значениях угла атаки α_0 . Для контроля получаемых результатов при расчете использовались две разностные схемы: двухслойная Крэнка — Никольсона и более устойчивая трехслойная; результаты совпадают с точностью до 1%. На фиг. 2 представлены две компоненты напряжения поверхностного трения: $\tau_1 = \partial^2 F/\partial \eta^2$, $\eta = 0$ ($\alpha_0 = 0,6$, кривая 1) и $\tau_2 = \partial^2 \psi/\partial \eta^2$, $\eta = 0$ ($\alpha_0 = 0,6$, кривая 2); τ_1 — продольная компонента, а τ_2 — окружная. Установлено, что непрерывное решение уравнений (1.4) в диапазоне $\varphi = [0, \pi]$ существует при $\alpha_0 \leq 0,6$. При $\alpha_0 < \alpha_* = 0,6$ решение гладкое. При $\alpha_0 > \alpha_*$ решение особое, оно непродолжимо до точки $\varphi = \pi$. Особенности такого типа изучены в [10]. Наконец, при $\alpha_0 = \alpha_*$ уравнения допускают особое (с изломом в τ_1 и τ_2), но продолжимое решение через точку нулевого окружного напряжения трения. Качественно кривая 2 (фиг. 2) соответствует двухмерному случаю [3], однако в отличие от [3] наклоны слева и справа от особой точки различны. Координата особой точки $\varphi_* = 3,01$.

2. Решение уравнений пограничного слоя в окрестности особой точки. Будем искать решение системы (1.4) при $\Delta\alpha \rightarrow 0$, $\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_*$ в виде

$$(\psi, F, dp_1/d\varphi) = (\psi_0, F_0, p_{10}) + \Delta\alpha(\psi_1, F_1, p_{11}) + \dots \quad (2.1)$$

В окрестности точки $\varphi = \varphi_*$ пограничный слой разбивается на две области: основную часть и вязкий подслой [11]. Построим координатное разложение основных членов (2.1) при $\varphi \rightarrow \varphi_*$. В вязком подслое введем новые переменные $s = \varphi - \varphi_*$, $\xi = \eta(-s)^{-1/2}$, тогда ψ_0 и F_0 при $s \rightarrow -0$ имеют

ВИД

$$\psi_0 = (-s)^{3/4} \frac{1}{6} p_{00} \xi^3 + (-s)^{1/2} \psi_{01}(\xi) + \dots + (-s)^{1/4} \psi_{02}(\xi) + \dots \quad (2.2)$$

$$F_0 = (-s)^{1/2} \frac{1}{2} \tau_{00} \xi^2 + (-s)^{1/4} f_{01}(\xi) + (-s)^{1/8} f_{02}(\xi) + \dots$$

$$p_{10} = p_{00} + s p_{01} + \dots, \quad \psi_{01} = \frac{1}{2} a_0 \xi^2 - \frac{\tau_{00} p_{00}}{480} \xi^6$$

$$\psi_{02} = \frac{1}{2} b_0 \xi^2 + \frac{a_0}{240} (\tau_{00} - 2a_0) \xi^5 + \frac{p_{00}}{80640} \left(\frac{7}{2} \tau_{00}^2 - \frac{8}{3} a_0 \tau_{00} + 2a_0^2 \right) \xi^9$$

$$f_{01} = \frac{\tau_{00}}{120} \left(a_0 - \frac{3}{2} \tau_{00} \right) \xi^5, \quad f_{02} = c_1 \xi^2 - \frac{1}{120} \left(c_1 p_{00} + \frac{1}{6} \tau_{00} p_{01} \right) \xi^6$$

Пользуясь (2.2), построим решение в основной части пограничного слоя в виде

$$(\psi_0, F_0) = (\psi_{00}, F_{00}) + (-s) (\psi_{01}, F_{01}) + \dots$$

$$\psi_{01} = \psi_{00}' \left[\frac{a_0}{p_{00}} + \int_0^\eta \frac{p_{00} - \psi_{00}''' - 1,5 F_{00}'' \psi_{00}'' + \psi_{00}' F_{00}'}{(\psi_{00}')^2} d\eta \right] \quad (2.3)$$

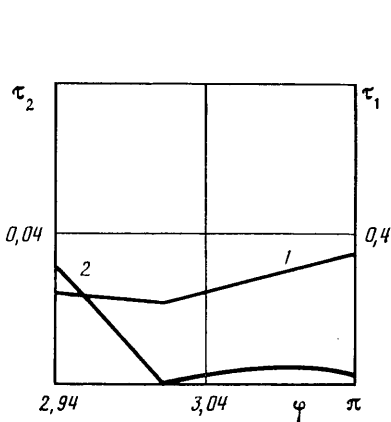
$$F_{01} = \int_0^\eta \frac{F_{00}'' (\psi_{01} - 1,5 F_{00}) - F_{00}'''}{\psi_{00}'} d\eta$$

$$\eta \rightarrow 0: \quad \psi_{00} = \frac{1}{6} p_{00} \eta^3 - \frac{\tau_{00} p_{00}}{480} \eta^6 + \dots$$

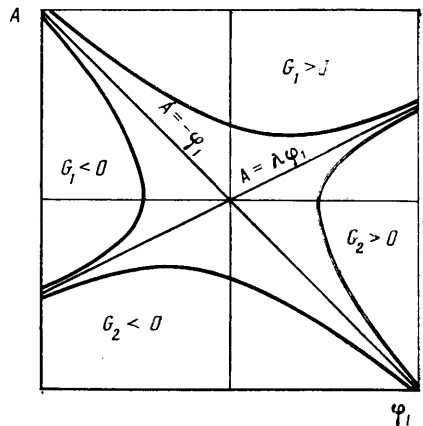
$$\dots + \frac{p_{00}}{80640} \left(\frac{7}{2} \tau_{00}^2 - \frac{8}{3} a_0 \tau_{00} + 2a_0^2 \right) \eta^9 + \dots$$

$$F_{00} = \frac{1}{2} \tau_{00} \eta^2 + \frac{\tau_{00}}{120} \left(a_0 - \frac{3}{2} \tau_{00} \right) \eta^5 - \frac{1}{120} \left(c_1 p_{00} + \frac{1}{6} \tau_{00} p_{01} \right) \eta^6 + \dots$$

Формулы (2.2) и (2.3) полностью описывают главные члены (2.1) перед особой точкой, где $\tau_{00} = 0,21$ — продольное напряжение трения в особой точке, $p_{00} = 0,028$ — значение градиента давления при $\varphi = \varphi_*$, $a_0 =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$=0,4$ — наклон кривой 2 (фиг. 2) при $s \rightarrow -0$, $c_1=0,43$ — наклон кривой 1 (фиг. 2) при $s \rightarrow -0$. Значение b_0 не определялось.

Построим решение системы (1.4) при $s \rightarrow +0$, введем переменную $\xi = \eta s^{-1/4}$ и обозначим все аналогичные функции и константы звездочкой

$$\psi_0 = s^{3/4} \frac{1}{6} p_{00} \xi^3 + s^{1/2} \psi_{01}^*(\xi) + \dots + s^{1/4} \psi_{02}^*(\xi) + \dots \quad (2.4)$$

$$F_0 = s^{1/2} \frac{1}{2} \tau_{00} \xi^2 + s^{1/4} f_{01}^*(\xi) + \dots, \quad \psi_{01}^* = \frac{1}{2} a_0^* \xi^2 - \frac{1}{480} \tau_{00} p_{00} \xi^3$$

$$f_{01}^* = -\frac{\tau_{00}}{120} \left(\frac{3}{2} \tau_{00} + a_0^* \right) \xi^5 + 2c_0 \int_0^\xi t M \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{p_{00}}{32} t \right) dt$$

$$\xi \rightarrow +\infty: \quad \psi_{02}^* = \frac{p_{00}}{80640} \left[\frac{7}{2} \tau_{00}^2 + \frac{8}{3} \tau_{00} a_0^* + 2(a_0^*)^2 - 80c_0 \left(\frac{p_{00}}{32} \right)^{1/4} K \right] \xi^9 + \dots$$

$$K = \int_0^{+\infty} U \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}, t \right) \left[t^{-1/2} M \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -t \right) - \frac{12}{5} t^{1/2} M \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, -t \right) \right] dt$$

где c_0 — произвольная константа — должна определяться из условий сращивания с (2.3), $K=0,03$ — результат получен численно, M и U — вырожденные гипергеометрические функции [12].

Исследуя асимптотики (2.4) при $\xi \rightarrow +\infty$, можно построить решение в основной части пограничного слоя при $s \rightarrow +0$. Сравнивая решения слева и справа от точки $\varphi = \varphi_*$, получим условия совместности

$$\frac{1}{12} \tau_{00} (a_0 + a_0^*) = c_0 \Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{p_{00}}{32} \right)^{1/4} \quad (2.5)$$

$$\frac{7}{2} \tau_{00}^2 - \frac{8}{3} a_0 \tau_{00} + 2a_0^2 = \frac{7}{2} \tau_{00}^2 + \frac{8}{3} \tau_{00} a_0^* + 2(a_0^*)^2 - \left(\frac{p_{00}}{32} \right)^{1/4} 80c_0 K$$

Из (2.5) находим два различных корня a_0^*

$$a_0^* = -a_0, \quad a_0^* = a_0 - 2/3 \tau_{00} (2 - 5K/\Gamma(1/4)) \quad (2.6)$$

Таким образом, в пространственном случае, как и в плоском [3], решение уравнений пограничного слоя может быть продолжено через точку нулевого окружного трения либо гладким образом в зону возвратных токов, либо особым образом. Отметим, что для особого решения излом также имеется и в толщине вытеснения. Численный расчет указывает, что предельным при $\alpha_0 \rightarrow \alpha_*$ является особое решение, однако этот факт должен быть строго доказан. Для этого необходимо построить решение, зависящее от $\Delta\alpha$. Предварительно укажем вид ψ_1 из (2.1) в вязком подслое при $s \rightarrow -0$

$$\psi_1 = (-s)^\beta \psi_{11}(\xi) + (-s)^\gamma \psi_{12}(\xi) + \dots, \quad \psi_{11} = 1/2 a_1 \xi^2 \quad (2.7)$$

собственное число β определим позднее, a_1 — константа, определяемая из расчета уравнений пограничного слоя.

Для того чтобы угол атаки управлял решением в окрестности точки $\varphi = \varphi_*$, необходимо, чтобы нарушалась равномерная пригодность разложения (2.1) при $\varphi \rightarrow \varphi_*$. Пусть это происходит на расстояниях $O(\tau(\Delta\alpha))$, конкретную зависимость от $\Delta\alpha$ укажем позднее. Тогда, пользуясь (2.3),

имеем в основной части пограничного слоя

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{00}(\eta) + \tau \psi_{10}(\varphi_1, \eta) + \dots, & F &= F_{00}(\eta) + \tau F_{10}(\varphi_1, \eta) + \dots, \\ \varphi_1 &= (\varphi - \varphi_*) / \tau\end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнения пограничного слоя, относительно функций ψ_{10} и F_{10} получим выражения

$$\begin{aligned}\psi_{10} &= \psi_{00}' \left[B(\varphi_1) + \varphi_1 \int_0^{\eta} \frac{\psi_{00}''' - p_{00} + 1,5 F_{00} \psi_{00}'' - \psi_{00}' F_{00}'}{(\psi_{00}')^2} d\eta \right] \\ \frac{\partial F_{10}}{\partial \varphi_1} &= \int_0^{\eta} \frac{F_{00}''' + F_{00}'' (1,5 F_{00} + \partial \psi_{10} / \partial \varphi_1)}{\psi_{00}'} d\eta \\ \eta \rightarrow 0: \quad \psi_{10} &= \frac{1}{2} p_{00} B \eta^2 + \frac{1}{6} p_{01} \varphi_1 \eta^3 + \\ &+ \left[\varphi_1 \frac{a_0}{120} (a_0 - 2\tau_{00}) - \frac{\tau_{00} p_{00} B}{80} \right] \eta^5 + \dots \\ F_{10} &= \frac{\tau_{00}}{p_{00}} (a_0 \varphi_1 + p_{00} B) \eta + \dots\end{aligned}$$

Функция $B(\varphi_1)$ неизвестна, однако из (2.1), (2.3), (2.7) следует, что при $\varphi_1 \rightarrow -\infty$

$$B = \frac{a_0}{p_{00}} (-\varphi_1) + \frac{a_1 \operatorname{sign}(\Delta \alpha)}{p_{00}} (-\varphi_1)^{\beta - 1/2} + \dots$$

В вязком слое, исходя из (2.2), разложение решения следующее:

$$\begin{aligned}\psi &= \tau^{3/4} / 6 p_{00} y^3 + \tau^{3/4} \Phi_1(\varphi_1, y) + \tau^{3/4} \Phi_2(\varphi_1, y) + \dots \\ F &= \tau^{1/2} / 2 \tau_{00} y^2 + \tau^{5/4} F_2(\varphi_1, y) + \dots, \quad y = \tau^{-1/4} \eta, \quad \varphi_1 = (\varphi - \varphi_*) / \tau\end{aligned}$$

Относительно Φ_1 краевая задача имеет вид (2.8), а решение ее дается (2.9)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^3} - \frac{1}{2} p_{00} y^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi_1 \partial y} + p_{00} y \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} &= -\frac{1}{4} \tau_{00} p_{00} y^3 \\ \Phi_1 = \partial \Phi_1 / \partial y &= 0, \quad y = 0\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -\frac{\tau_{00} p_{00}}{480} y^6 + \frac{1}{2} p_{00} B(\varphi_1) y^2 + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow +\infty \\ \Phi_1 &= -\frac{\tau_{00} p_{00}}{480} y^6 + \frac{1}{2} p_{00} B(\varphi_1) y^2\end{aligned} \quad (2.9)$$

Функция $B(\varphi_1)$ не определяется при решении (2.8), поэтому необходимо решать задачи для F_2 и Φ_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 F_2}{\partial y^3} - \frac{1}{2} p_{00} y^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi_1 \partial y} &= -\left(\frac{3}{4} \tau_{00}^2 + \frac{1}{2} \tau_{00} p_{00} B'(\varphi_1) \right) y^2 \\ F_2 = \partial F_2 / \partial y &= 0, \quad y = 0\end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{1}{120} \left(a_0 \tau_{00} - \frac{3}{2} \tau_{00}^2 \right) y^5 + \frac{\tau_{00}}{p_{00}} (a_0 \varphi_1 + p_{00} B) y + \dots, \quad y \rightarrow +\infty, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty$$

Сделаем замену переменных

$$F_2 = \frac{\tau_{00}}{120} \left(a_0 - \frac{3}{2} \tau_{00} \right) y^5 + \frac{\tau_{00}}{p_{00}} (a_0 \varphi_1 + p_{00} B) y + F_3$$

$$\frac{\partial^3 F_3}{\partial y^3} - \frac{1}{2} p_{00} y^2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \varphi_1 \partial y} = 0$$

$$F_3 = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = -\frac{\tau_{00}}{p_{00}} (a_0 \varphi_1 + p_{00} B), \quad y = 0$$

$$F_3 = 0, \quad y \rightarrow +\infty, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty$$

Учитывая, что $B(\varphi_1)$ — линейно растущая функция при $|\varphi_1| \rightarrow \infty$, можно найти $\partial^2 F_3 / (\partial \varphi_1)^2$ с помощью преобразования Фурье.

Задача для Φ_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y^3} - \frac{1}{2} p_{00} y^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi_1 \partial y} + p_{00} y \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_1} = & \left[\frac{1}{2} p_{00}^2 B B' - \tau_{00} \left(a_0 \varphi_1 + \frac{3}{4} p_{00} B \right) \right] y^2 + \\ & + \frac{\tau_{00} p_{00}}{160} \left[\frac{7}{2} \tau_{00} + 3 p_{00} B' + \frac{4}{3} a_0 \right] y^6 - \frac{3}{2} p_{00} y F_3 + \frac{1}{2} p_{00} y^2 \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = \partial \Phi_2 / \partial y = 0, \quad y = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \frac{p_{00}}{80640} \left(\frac{7}{2} \tau_{00}^2 - \frac{8}{3} a_0 \tau_{00} + 2 a_0^2 \right) y^9 + \left[\varphi_1 \frac{a_0}{120} (a_0 - 2 \tau_{00}) - \frac{\tau_{00} p_{00}}{80} B \right] y^5 + \\ & + \frac{1}{2} p_{00} E(\varphi_1) y^2 + \left(\frac{1}{2} p_{00} B^2 - \frac{a_0^2}{2 p_{00}} \varphi_1^2 \right) y + o(1), \quad y \rightarrow +\infty, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Функция $E(\varphi_1)$ произвольна. После соответствующей замены переменных задача (2.10) решалась методом преобразования Фурье. В результате обнаружено, что решение существует, если $B(\varphi_1)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$B = \frac{a_0}{p_{00}} A, \quad A \cdot A'(\varphi_1) - \lambda \varphi_1 + (1 - \lambda) A = 0 \quad (2.11)$$

$$A = -\varphi_1 - \frac{(-a_1) \operatorname{sign}(\Delta \alpha)}{a_0} (-\varphi_1)^{\beta - 1/2} + \dots, \quad \varphi_1 \rightarrow -\infty$$

Здесь $\lambda = a_0^* / a_0$. Второй член в асимптотике $A(\varphi_1)$ должен быть собственной функцией решения уравнения (2.11), соответственно имеем $\beta = 1/2 - \lambda$. Теперь нетрудно установить зависимость $\tau(\Delta \alpha)$, а именно $\tau^{1+\lambda} = |\Delta \alpha|$.

Решение задачи (2.11) имеет вид [6]

$$(A + \varphi_1)(A - \lambda \varphi_1)^\lambda = G_1, \quad (A + \varphi_1)(\lambda \varphi_1 - A)^\lambda = G_2$$

На фиг. 3, взятой из [6], изображены все решения (2.11) при $\lambda < 1$. Из рисунка ясно, что в данном случае реализуются решения с константой G_1 . Если $\Delta \alpha < 0$, что соответствует $G_1 > 0$ (учтено что a_1 отрицательно), то решение гладкое и имеет асимптотой $A = \lambda \varphi_1$ при $\varphi_1 \rightarrow +\infty$, что и было получено при численном расчете. Если $\Delta \alpha > 0$, т. е. $G_1 < 0$, то решение $A(\varphi_1)$ существует только до некоторой точки и непродолжимо вплоть до $\varphi_1 = +\infty$. Если же $\Delta \alpha = 0$, то область сглаживания стягивается в точку и формируется излом в окружном напряжении трения.

Можно сформулировать следующий вывод: с ростом угла атаки в ре-

шении уравнений пограничного слоя на тонком конусе сначала формируется слабая особенность, решение через которую может быть продолжено, а при больших углах атаки появляется особенность типа гольдштейновской. Формальное исследование показывает, что при $\alpha_0 = \alpha_*$ решение через точку нулевого трения может быть продолжено двумя способами.

Автор выражает благодарность за полезные советы и обсуждение результатов В. В. Сычеву и А. И. Рубану.

ЛИТЕРАТУРА

1. Riley N. Separation from a smooth surface in a slender conical flow // J. Engng Math. 1979. V. 13. № 1. P. 75–91.
2. Сычев В. В. О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 47–59.
3. Рубан А. И. Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 42–52.
4. Рубан А. И. Асимптотическая теория коротких зон отрыва на передней кромке тонкого профиля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 42–51.
5. Stewartson K., Smith F. T., Kaups K. Marginal separation // Stud. in Appl. Math. 1982. V. 67. № 1. P. 45–61.
6. Brown S. N. Marginal separation of a three-dimensional boundary layer on a line of symmetry // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 95–111.
7. Замераев В. Б. Существование и неединственность локальных зон отрыва в вязких струях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 38–45.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
10. Brown S. N. Singularities associated with separating boundary layers // Phil. Trans. Roy. Soc., London. ser. A. 1965. V. 257. № 1084. P. 409–444.
11. Goldstein S. On laminar boundary flow near a position of separation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. Pt 1. P. 43–69.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.1986