

УДК 532.526.2.013.4:532.529:519.6

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА ГАЗ — ТВЕРДЫЕ ЧАСТИЦЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

НАРМУРАТОВ Ч. Б., СОЛОВЬЕВ А. С.

На основе уравнений аэромеханики гетерогенных сред [1, 2] рассматривается устойчивость пограничного слоя над плоской пластиной с градиентом давления в случае, когда поток газа несет взвешенные частицы примеси. Исследование проведено в рамках тех же предположений, что и в [3], где изучалась устойчивость течения Пуазейля в канале. Профиль скорости основного течения выбран из семейства Фокнера — Скэн. Для расчетов применен спектрально-элементный чебышевский метод.

Расчеты устойчивости выполнены в широком диапазоне изменения характерных параметров: формпараметра Фокнера — Скэн $-0,19 \leq \beta \leq 0,2$, параметров массовой концентрации $0 \leq f \leq 0,1$ и времени релаксации частиц $5 \leq T \leq 5 \cdot 10^5$. Показано, что при отрицательных градиентах давления ($\beta > 0$) частицы оказывают стабилизирующий эффект, сходный в целом с эффектом в течении Пуазейля, а при положительных градиентах давления стабилизирующее влияние дисперсной фазы слабеет с убыванием β .

1. Рассмотрим плоское течение в пограничном слое полубесконечной пластины, газ считается несжимаемым и содержит одинаковые сферические частицы твердой примеси. Для изучения устойчивости такого течения ограничимся малыми двумерными возмущениями вида бегущих волн. Тогда линеаризованные нестационарные уравнения дисперсной среды приводятся к виду [2]

$$D^2\psi - ik \operatorname{Re} \left(U - \lambda - \frac{if}{k\tau} \right) D\psi + ik \operatorname{Re} \frac{d^2U}{d\eta^2} \psi + \frac{f \operatorname{Re}}{\tau} D\varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$D\psi - ik\tau \left(V - \lambda - \frac{i}{k\tau} \right) D\varphi + ik\tau \frac{d^2V}{d\eta^2} \varphi = 0 \quad (1.2)$$

$$D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2, \quad \lambda = \lambda_r + i\lambda_i, \quad k = G \operatorname{Re}$$

$$\operatorname{Re} = U_m \frac{\delta}{\nu}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu L}{U_m}}, \quad G = \frac{2\pi\nu}{U_m}, \quad \tau = \frac{T}{\operatorname{Re}}$$

$$T = \frac{2}{9} \left(\frac{aU_m}{\nu} \right)^2 \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad f = \frac{\alpha\rho_2}{\rho_1}$$

Здесь все величины сделаны безразмерными с помощью характерных размеров длины и скорости — толщины пограничного слоя δ и скорости вне пограничного слоя U_m . Через η обозначена поперечная координата, $\psi(\eta)$ и $\varphi(\eta)$ — амплитуды функции тока для чистого газа и частиц соответственно, k — волновое число возмущения, ν — кинематическая вязкость чистого газа, L и l — характерная длина вдоль пластины и длина волны возмущения, ρ_1 и ρ_2 — плотности чистого газа и материала частиц; τ , T — время релаксации частиц, a , α и f — радиус, объемная и массовая кон-

центрации частиц, Re — число Рейнольдса, $U(\eta)$ и $V(\eta)$ — компоненты продольной скорости стационарного течения газа и частиц. Для плоскопараллельных течений $V-U$ пропорционально малой величине $\Delta = (a/b)^2$, где b — характерный размер задачи [4]. Величиной $\Delta \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ поэтому обычно пренебрегают [5, 6]. И хотя пограничный слой не является строго параллельным течением, мы будем предполагать, что разностью скоростей $V-U$ по-прежнему можно пренебречь, и положим $V=U$.

Граничные условия имеют вид

$$\psi = \frac{d\psi}{d\eta} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (\eta=0); \quad \psi, \frac{d\psi}{d\eta} \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (1.3)$$

Для чистого газа — это требование прилипания и непроницаемости, а для твердых частиц — только условия непроницаемости. Вдали от стенки возмущения должны затухать.

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.2) с однородными граничными условиями (1.3) образуют задачу на собственные значения для определения неизвестной постоянной λ . Течение устойчиво или неустойчиво в зависимости от того, $\lambda_i < 0$ или $\lambda_i > 0$. При $\lambda_i = 0$ колебания нейтральноустойчивы. Указанные уравнения решаются спектральным методом путем аппроксимации решения конечными рядами по полиномам Чебышева.

Подчеркнем, что задача устойчивости пограничного слоя в отличие от задачи устойчивости течения Пуазейля [3] не обладает свойством симметрии. Полученная из (1.1), (1.2) алгебраическая система уравнений не распадается тогда на независимые подсистемы для четных и нечетных решений в отдельности, и ее порядок удваивается. Рост порядка ведет к квадратичному возрастанию размерности системы (матриц коэффициентов), что при численном нахождении собственных значений сильно уменьшает эффективность расчетов. Оказывается, этого можно избежать, если использовать спектральный метод в «спектрально-элементном» представлении.

2. Пусть интервал интегрирования ограничен большой, но конечной величиной η_e . Разобьем отрезок $[\eta_0, \eta_e]$ на N различных отрезков (элементов)

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_{j-1}, \eta_j], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N], \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_N = \eta_e$$

Краевые условия (1.3) записываются в точках η_0 и η_N , а во внутренних точках потребуем непрерывности решения уравнений (1.1) и (1.2) и их производных до порядков t и p

$$\psi_{j-1}^{(t)}(\eta) = \psi_j^{(t)}(\eta), \quad t=0, 1, 2, 3; \quad \varphi_{j-1}^{(p)}(\eta) = \varphi_j^{(p)}(\eta), \quad p=0, 1; \quad j=1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Введем отображение элементов $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ на интервал $[-1, 1]$ с помощью замены независимой переменной $\eta \rightarrow y$ и будем искать решение системы (1.1), (1.2) в виде

$$\eta = 1/2(\eta_j + \eta_{j-1}) + 1/2y(\eta_j - \eta_{j-1}) \quad (2.2)$$

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y), \quad \varphi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y) \quad (2.3)$$

Здесь $T_n(y)$ — полиномы Чебышева, числа p_j — количество полиномов, используемых для аппроксимации на j -м спектральном элементе. Профиль скорости основного течения также представим на каждом из элементов в виде конечных рядов

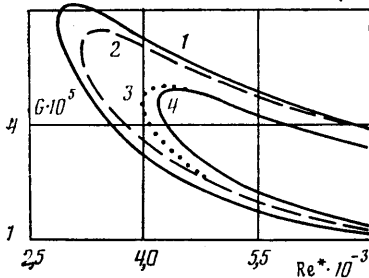
$$U(y_i^{(j)}) = \sum_{n=0}^{p_j} d_n^{(j)} T_n(y_i^{(j)}), \quad y_i^{(j)} = \cos \frac{\pi l}{p_j}, \quad l=0, 1, \dots, p_j \quad (2.4)$$

$$d_n^{(j)} = \frac{2}{p_j c_n} \sum_{l=0}^{p_l} \frac{1}{c_l} U(y_l^{(j)}) T_n(y_l^{(j)}), \quad n=0, 1, \dots, p_j$$

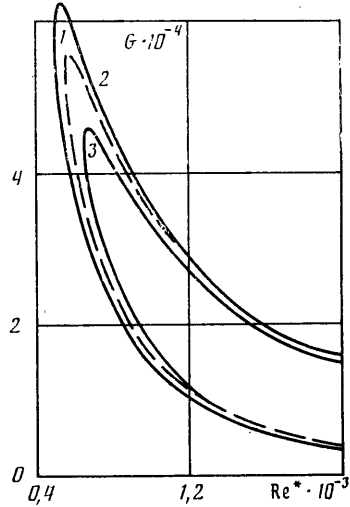
$$c_0 = c_{p_j} = 2, \quad c_m = 1, \quad m \neq 0, p_j$$

где коэффициенты разложения $d_n^{(j)}$ известной функции U определяются обратным преобразованием [7].

Тогда, подставляя (2.3), (2.4) с учетом (2.2) в (1.1), (1.2), (2.1) и приравнявая члены при одинаковых T_n , получаем алгебраическую систему уравнений для коэф-



Фиг. 1



Фиг. 2

фициентов $a_n^{(j)}$ и $b_n^{(j)}$. Полагая далее в соответствии с τ -методом (см., например, [7, 8]) $n=0, 1, \dots, p_j-4$ в уравнении (1.1) и $n=0, 1, \dots, p_j-2$ в уравнении (1.2), приходим к системе уравнений с m неизвестными, или в матричном виде

$$(A - \lambda B)x = 0, \quad m = 2 \sum_{j=1}^N (p_j + 1) \quad (2.5)$$

$$x = (a_0^{(1)}, \dots, a_{p_1}^{(1)}; \dots; a_0^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)}; b_0^{(1)}, \dots, b_{p_1}^{(1)}; \dots; b_0^{(N)}, \dots, b_{p_N}^{(N)})$$

где A и B — квадратные размером $m \times m$ комплексные матрицы. Чтобы не загромождать изложение, их явный вид мы опускаем.

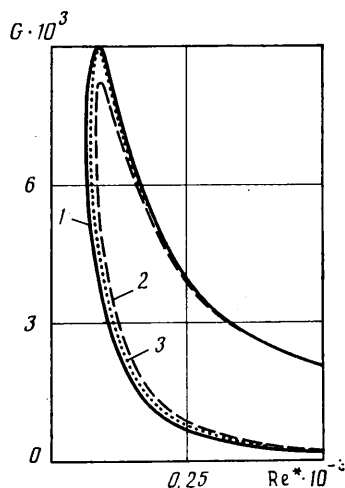
Для полученной обобщенной задачи на собственные значения характерно наличие вырожденной матрицы B , и способ решения таких задач аналогичен описанному ранее в [3]. Отличие в данном случае состоит лишь в том, что B содержит $6N$ ненулевых строк вместо трех ($6N$ — общее число уравнений непрерывности (2.1)). Поэтому после применения к системе (2.5) невырожденных преобразований [9] и исключения автономных уравнений (см. [3]) порядок системы уменьшается в $q = m / (m - 6N)$ раз. Иначе говоря, в результате разбиения интервала интегрирования на элементы размерность задачи (2.5) с увеличением N существенно (в q^2 раз) снижается. Собственные значения λ находятся далее стандартными методами — в данной работе, как и в [3], они определялись с помощью QR-алгоритма.

Заметим в заключение, что при заданном N необходимо правильно расположить узлы стыковки элементов и выбрать числа p_j . Эти вопросы тесно связаны, поскольку, сближая узлы стыковки, можно, не уменьшая точность аппроксимации, уменьшать число полиномов на элементах и наоборот. В данном случае более удобно выбирать элементы равной длины, задавая различные p_j . Тогда количество необходимых полиномов на том или ином элементе пропорционально величине локальных градиентов решения. Предварительные оценки могут быть сделаны на основе асимптоти-

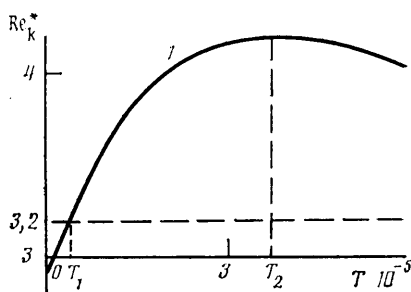
ческого анализа — в «критическом слое» у стенки градиенты в $\sqrt[3]{Re}$ раз выше, чем вдали от нее [10]. Более точные значения p_j выбираются в процессе расчета.

При решении уравнений (1.1), (1.2) область интегрирования разбивалась на $N=4$ элемента ($\eta_e=20$) с числом полиномов на элементах $p_1=23$, $p_2=11$, $p_3=p_4=5$, где индексом 1 обозначен элемент, примыкающий к стенке. Размерность системы (2.5) в этом случае была снижена в 4 раза ($q=2,1$) практически без изменения точности расчетов — собственные значения λ рассчитывались с абсолютной точностью $\varepsilon=10^{-4}-10^{-3}$.

3. Кривые нейтральной устойчивости для ряда значений формпараметра Фокнера — Скэн β на плоскости G , Re^* (пограничный слой с различным распределением градиента давления [11]). Здесь и всюду ниже значение параметра f фиксировано и $f=0,1$. Звездочка обозначает, что число



Фиг. 3



Фиг. 4

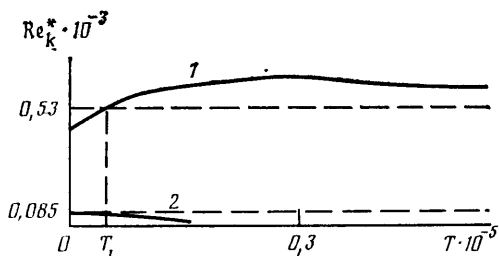
Рейнольдса построено по толщине вытеснения пограничного слоя. Отметим также, что представление результатов с использованием параметров G и T (а не k и τ) более удобно, поскольку G и T не зависят от Re .

Фиг. 1 показывает поведение нейтральных кривых для случая отрицательного градиента давления ($\beta=0,2$). Цифрой 1 обозначена кривая для чистого газа ($f=0$), 2—4 — кривые, рассчитанные при различных значениях времени релаксации частиц: $T=3,2 \cdot 10^2$; $1,9 \cdot 10^5$ и $3,2 \cdot 10^5$. Кривая 2 лежит слева от кривой 1, указывая на некоторое уменьшение устойчивости при $T < 3,2 \cdot 10^2$. Кривые 3 и 4 расположены справа от кривой 1. Следовательно, с увеличением размера частиц поток становится более устойчивым.

На фиг. 2 приведены нейтральные кривые в случае нулевого градиента давления ($\beta=0$). Кривая 1 построена при $f=0$, кривым 2, 3 соответствуют значения $T=0,45 \cdot 10^2$ и $3 \cdot 10^4$. Видно, что при небольших T , как и в случае $\beta=0,2$, частицы дестабилизируют течение, а с увеличением T устойчивость потока увеличивается. Эффект стабилизации, однако, выражен при этом слабее, чем при $\beta=0,2$.

Нейтральные кривые на фиг. 3 относятся к случаю, когда градиент давления положителен, причем пограничный слой близок к отрыву ($\beta=-0,19$). Кривые 2 и 3 рассчитаны при $T=45$ и 10^3 , а цифрой 1 по-прежнему обозначена кривая для чистого газа ($f=0$). Видно, что в этом случае нейтральные кривые практически не меняют своего местоположения, т. е. взвешенные частицы не оказывают влияния на устойчивость пограничного слоя.

Наиболее наглядно эти результаты иллюстрируются на фиг. 4, 5 где приведена зависимость критического числа Рейнольдса Re_k^* от параметра T . На фиг. 4 кривая построена для $\beta=0,2$; на фиг. 5 кривые 1, 2 построены для $\beta=0$; $-0,19$. Соответствующие значения Re_k^* для чистого газа



Фиг. 5

обозначены прямыми штриховыми линиями. При $\beta=0,2$ поток стабилизируется с увеличением T , начиная со значения $T_1=4,3 \cdot 10^4$, а при $T_2=3,6 \cdot 10^5$ стабилизация достигает максимума. Аналогичный, но более слабый эффект наблюдается и при $\beta=0$ (кривая 1, фиг. 5), здесь $T_1=5 \cdot 10^3$, $T_2=0,3 \cdot 10^5$). При $\beta=-0,19$ (кривая 2, фиг. 5) наблюдается незначительное монотонное снижение устойчивости с ростом T .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Низамгулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. *Drew D. A.* Stability of a Stokes' layer of a dusty gas // *Phys. Fluids*. 1979. V. 22. № 11. P. 2081–2086.
3. *Нармуратов Ч. Б., Соловьев А. С.* О влиянии взвешенных частиц на устойчивость плоского течения Пуазейля // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1986. № 1. С. 46–53.
4. *Drew D. A.* Two-phase flows: constitutive equations for lift and Brownian motion and some basic flows // *Archive for rational mechanics and analysis*. 1976. V. 62. № 2. P. 149–163.
5. *Saffman P. G.* On the stability of laminar flow of a dusty gas // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. Pt 1. B. 120–128.
6. *Michael D. H.* The stability of plane Poiseuille flow of a dusty gas // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 18. Pt 1. P. 19–32.
7. *Fox L., Parker J. B.* Chebyshev polynomials in numerical analysis. London: Oxford univ. press. 1968. 205 p.
8. *Orszag S. A.* Accurate solution of the Orr – Sommerfeld stability equation // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 50. № 4. P. 689–703.
9. *Gary J., Helgason R.* A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems // *J. Comp. Phys.* 1970. V. 5. № 2. P. 169–187.
10. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194.
11. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.

Новосибирск
Самарканд

Поступила в редакцию
19.IX.1985