

УДК 532.526

МЕТОД РАСЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

УТРЮМОВ М. Л.

Рассмотрено течение вязкой сжимаемой жидкости в окрестности линии взаимодействия пристенных течений. Разработан метод расчета линии взаимодействия и направления самоиндуцированного вторичного течения.

Моделированию отрывного течения с особенностями в окрестности особых линий и точек, где уравнения пограничного слоя несправедливы, посвящены работы [1–3]. Однако используемые в настоящее время теории локального отрыва разработаны в основном лишь для двумерных задач, а модели вязко-невязкого взаимодействия имеют ограничения по применению для турбулентных течений с развитым отрывом.

Ниже рассматривается взаимодействие пространственных пристенных турбулентных течений. Считается, что толщина пограничных слоев и масштабы зон взаимодействия малы по сравнению с характерным размером системы, а линия разрыва решений уравнений пространственного пограничного слоя совпадает с линией взаимодействия пристенных течений.

Рассмотрим вопрос о появлении особых точек или линий там, где уравнения пространственного пограничного слоя несправедливы. Анализ особенностей и возможности их появления в пограничном слое будем строить на основе понятий о зонах зависимости и влияния [4, 5]. При численных расчетах течений в пограничном слое (прямая задача) решение можно построить вплоть до возникающих особенностей, обусловленных специфичным поведением пристенных линий тока [6], исследование которых возможно лишь в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса. Взаимодействие пограничного слоя и внешнего течения приводит к перераспределению давления на поверхности тела, а в области особенностей — к появлению самоиндуцированного изменения давления [1, 7]. Анализ экспериментальных данных [7, 8] показывает, что основной причиной крупномасштабного обмена (вихреобразования) в каналах турбомашин можно считать взаимодействие пограничного слоя и внешнего течения, сопровождающееся вовлечением рабочего тела пристенных слоев во внешнее течение (или наоборот) в областях появления особенностей.

Представим систему интегральных соотношений пространственного сжимаемого пограничного слоя при параметрическом описании семейств составляющих профиля скорости в пограничном слое на произвольной вращающейся поверхности σ в криволинейной системе координат с произвольными метрическими коэффициентами [9] в виде

$$L_i = \frac{\partial b_i}{\partial s^{(1)}} + a_{ij} \frac{\partial b_i}{\partial s^{(2)}} + c_i = 0 \quad (1)$$

где b_i — параметры пограничного слоя ($i, j=1, 2, 3$), $s^{(1)}$, $s^{(2)}$ — координатные линии на поверхности σ .

Пусть система уравнений (1) кроме интегральных соотношений импульсов включает интегральное соотношение для расхода, именуемое в литературе эжекционным уравнением Хэда. В качестве искоемых параметров, к примеру в замыкающих соотношениях [9], могут быть выбраны толщина потери импульса δ^{**} , тангенс угла предельных линий тока

у стенки $\varepsilon = \text{tg } \beta_w$ и формпараметр H . Таким образом, $b = (\delta'', \varepsilon, H)$. Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) является квазилинейной и параболической или гиперболической, что зависит от выбираемых замыкающих соотношений. В трехмерном пространстве на некоторой поверхности σ с границей F рассмотрим следующую задачу:

$$L_i = 0, \quad b_i = b_{ik}, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

где b_{ik} — начальные условия на участках γ_k границы F .

Рассмотрим особые точки или линии, возникающие при решении задачи (2). В соответствии с общей теорией квазилинейных дифференциальных уравнений будем искать их в местах пересечения (слияния) или излома характеристик в рамках одного семейства. Обобщенное решение задачи (2) может терпеть разрыв в следующих случаях: 1) существуют участки γ_k вдоль границы F с неоднородными начальными условиями; 2) существует разрыв газодинамических функций на границе пограничного слоя; 3) имеют место координатные особенности на обтекаемой поверхности (углы сжатия, изломы, чередования подвижных и неподвижных элементов, участков с шероховатостью и т. п.). Появление координатных особенностей может приводить к образованию подобластей с неоднородными начальными условиями [10].

Перейдем к выводу соотношений на разрывах уравнений пространственного пограничного слоя. От записи системы интегральных соотношений [9] в виде (1) можно перейти к дивергентной форме

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial s^{(1)}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial s^{(2)}} = \mathbf{q} \quad (3)$$

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & \theta_{11} \\ d_1 & \theta_{21} \\ f_1 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} d_2 & \theta_{12} \\ d_2 & \theta_{22} \\ f_2 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$d = (\sqrt{g/g_{11}} \rho_e U_e^2, \sqrt{g/g_{22}} \rho_e U_e^2), \quad f = (\sqrt{g/g_{11}} \rho_e U_e, \sqrt{g/g_{22}} \rho_e U_e)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{\rho_e U_e^2} \int_0^\delta \rho w_j (U_{ie} - w_i) ds^{(3)}, \quad i = 1, 2$$

$$\Delta_i = \frac{1}{\rho_e U_e} \int_0^\delta (\rho_e U_{ie} - \rho w_i) ds^{(3)}, \quad j = 1, 2$$

Здесь w_i , U_{ie} — физические компоненты векторов скорости в пограничном слое и скорости внешнего течения, δ — толщина пограничного слоя, $s^{(3)}$ — координата, вычисляемая вдоль нормали к поверхности σ , e — индекс, относящийся к параметрам на внешней границе пограничного слоя.

Правые части системы интегральных соотношений пограничного слоя \mathbf{q} будем рассматривать как плотности источников (стоков) расходного и моментного возмущений, обеспечивающие заданное изменение толщин пограничного слоя.

Пусть все функции \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , $\partial \mathbf{I}_1 / \partial s^{(1)}$, $q \mathbf{I}_2 / \partial s^{(2)}$ конечны всюду в σ . Проинтегрируем (3) по области σ и к левой части применим формулу Грина

$$\oint_F (\mathbf{I}_1 ds^{(2)} - \mathbf{I}_2 ds^{(1)}) = \int_\sigma \mathbf{q} d\sigma = \mathbf{J} \quad (4)$$

Вектор-столбец \mathbf{J} определяет изменения (в единицу времени) потоков импульса и массы, создаваемых за счет поверхностных источников (стоков).

Пусть внутри области σ имеется линия L , на которой обобщенное решение задачи (2) терпит разрыв первого рода: $[I_{ik}] = I_{ik}^+ - I_{ik}^-$, $i=1, 2$; $k=1, 2, 3$. Введем произвольный участок линии разрыва L' с координатой l вдоль нее на поверхности σ . Ввиду произвольности участка L' в каждой точке линии разрыва должна обращаться в нуль подинтегральная функция (4). Выберем элементы дуг вдоль координатных линий $ds_{(1)} = \sqrt{g_{11}} ds^{(1)}$; $ds_{(2)} = \sqrt{g_{22}} ds^{(2)}$. Условия на разрывах решений уравнений пространственного пограничного слоя в криволинейной системе координат с произвольными метрическими коэффициентами имеют вид

$$\frac{[I_1]}{\sqrt{g_{22}}} \frac{ds_{(2)}}{dl} - \frac{[I_2]}{\sqrt{g_{11}}} \frac{ds_{(1)}}{dl} = \frac{dJ}{dl} \quad (5)$$

Если выбранная на плоскости система координат является поточной криволинейной и ортогональной, то условия (5) совпадают с упрощенными, полученными в [11] при $U_e^+ = U_e^-$.

Пересечение (слияние) или излом характеристик интегральных соотношений, описывающих течение в пограничном слое на обтекаемых потоком поверхностях, которое приводит в прямой задаче теории пограничного слоя к существованию линий разрывов, может иметь следующее физическое представление. В окрестности линии разрыва существует интенсивный локальный обмен между пристенным слоем и ядром потока (обмен импульсом, массой и энергией), что проявляется в возникновении областей концентрации потерь (вниз по потоку за линией отрыва) [7, 8] и служит причиной крупномасштабного вихреобразования.

Рассмотрим вывод соотношений для расчета линии взаимодействия пристенных течений. Предположим, что на разрыве имеет место обмен между пограничным слоем и вязким потоком с подводом (отводом) импульса и массы из ядра потока в зону взаимодействия. При этом процесс эжекции (инъекции) сопровождается изменением распределений статических давлений по обе стороны от поверхности раздела слоев смешения. Силы давления в рассматриваемом случае, согласно анализу [1], можно считать преобладающими. Такой процесс взаимодействия обязательно должен сопровождаться зарождением сдвигового слоя в пристенной области в идеальном течении.

Пусть рабочее тело с заданными распределениями параметров в пограничных слоях, стекаясь к линии разрыва, уносится в поток, приобретая скорость, равную скорости ядра потока по обе стороны от разрыва. Используем закон изменения количества движения для определения изменения (в единицу времени) потока импульса J_k , из ядра потока в область взаимодействия. Запишем законы изменения количества движения для подобластей по обе стороны от линии разрыва и присуммируем их. Предположим, что давление мало изменяется по толщине пограничного слоя, но в области взаимодействия среднее по толщине пограничного слоя давление p_s ($p_s = \langle p_s^+ \rangle = \langle p_s^- \rangle$) будет отличаться от давлений p_e^+ и p_e^- на границах подобластей по обе стороны от линии разрыва. Окончательно получим

$$J_k = \int_{L'} [(p_e - p_s) \delta] n_k^- dl \quad (6)$$

где n_k^- — компонента внешней нормали к границе подобласти ($k=1, 2$).

Следует отметить, что при сохранении общности подхода, но при более общих предположениях вид правой части (6) может отличаться от полученного, в частности для двухфазных течений. Выберем на плоскости произвольную систему координат $s^{(1)}$ и подставим (6) в соотношения (5).

Соотношения для расчета линии взаимодействия пристенных течений при известных параметрах пограничного слоя по обе стороны разрыва

и распределения скоростей U_e вдоль поверхности σ имеют вид

$$\begin{aligned} [I_{11}]m_1 - [I_{12}]m_2 - m_3 \cos(\lambda - \beta) &= 0 \\ [I_{21}]m_1 - [I_{22}]m_2 - m_3 \cos \beta &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$m = (\sin \beta / \sqrt{g_{22}}, \sin(\lambda - \beta) / \sqrt{g_{11}}, [(p_e - p_s) \delta])$$

$$\cos \lambda = g_{12} (g_{11} g_{22})^{-1/2}$$

где β — угол между линией разрыва и координатной линией $s^{(1)}$, λ — угол между координатными линиями $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$.

Определим направление индуцированного взаимодействием течения. Экспериментальные данные [7, 8] свидетельствуют о вовлечении низкоэнергетического рабочего тела пристенных слоев вдоль линий взаимодействия в вихревые образования в каналах решеток турбомашин, что способствует росту масштабов вихрей. Рассмотрим математическую модель этого явления в рамках данной постановки задачи, учитывая, что зона взаимодействия соответствует области концентрации низкоэнергетического рабочего тела. Примем, что изменение потока импульса в элементе пристенного слоя, связанное с наличием индуцированного взаимодействия течения, равно сумме изменений потоков импульсов в двух сходных элементах пристенных течений по обе стороны от линии разрыва

$$\partial J_e = \partial J'_e, \quad (\partial J'_e)^2 = (\partial J'_1)^2 + (\partial J'_2)^2 - 2 \cos \lambda (\partial J'_1) (\partial J'_2) \quad (8)$$

Здесь $\partial J'_k$, $k=1, 2$, находятся по формуле (5) с заменой θ_{ij} на θ'_{ij}

$$\theta'_{ij} = \frac{1}{\rho_e U_e^2} \int_0^{\delta} \rho^{|\omega_j|} (U_{ie} - w_i) ds^{(3)}$$

Направляющие косинусы вектора ∂J_e определяются формулами

$$\begin{aligned} \cos(\partial J_e, \tau^{(1)}) &= (\partial J_1 + \partial J_2 \cos \lambda) / \partial J_e \\ \cos(\partial J_e, \tau^{(2)}) &= (\partial J_2 + \partial J_1 \cos \lambda) / \partial J_e \\ \cos(\partial J_e, \tau^{(3)}) &= [1 - (\partial J_e / \partial J_e)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tau^{(i)}$ — единичные орты в направлениях координатных линий $s^{(i)}$, а величины ∂J_e вычисляются так же, как $\partial J'_e$. Следует отметить, что профиль скорости в индуцированном взаимодействием течении быстро перестраивается к автомоделльному, не зависящему от профилей скорости взаимодействующих пристенных течений [12, 13]. Условия обмена, определяемые в соответствии с (4), (5), (7)–(9), ориентированы на использование их в расчетах пространственного сжимаемого течения на основе методов решения уравнений нестационарной газовой динамики (см., например, [14]).

Покажем применимость полученных соотношений на различных примерах. Ограничимся использованием общепринятых допущений о параметрах пристенных течений, необходимых для определения интегральных толщин по обе стороны линии разрыва.

Известны решения задач о взаимодействии двух противоположно направленных пристенных струй и двух натекающих на стенку струй [12, 13, 15]. Использование формул (7)–(9) предлагаемого метода в совокупности с допущениями, принятыми в теории струй, позволяет получить соотношения для расчета линии торможения, давления на ней и направления восходящего течения, совпадающие с соответствующими им полуэмпирическими зависимостями [12, 13]. Выполнены расчеты давления на линии взаимодействия двух противоположно направленных турбулентных пристенных струй. Предполагалось, что характерный размер — толщина

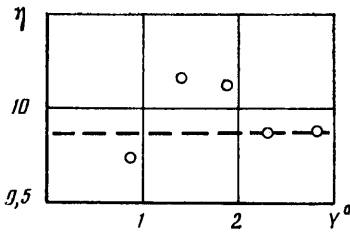
струи δ — пропорционален расстоянию l от действующего источника: $\delta \approx 0,2l$ [12]. Используя первое из соотношений (7), получим

$$\eta = \frac{2(p_s - p_\infty)L}{Y^+ + Y^-} = 9,88; \quad L = l^+ + l^-$$

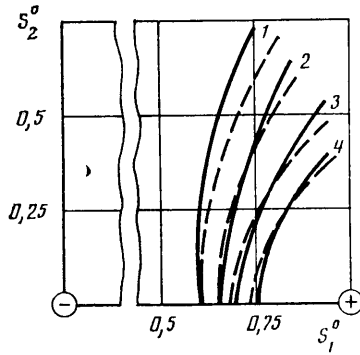
Здесь L — расстояние между источниками, p_∞ — давление в окружающей среде, Y^+ , Y^- — линейные плотности изменения (в единицу времени) потоков импульсов пристенных струй вблизи области взаимодействия.

Зависимость безразмерного параметра давления η от отношения линейных плотностей потоков импульсов $Y^0 = Y^-/Y^+$ представлена на фиг. 1 (расчеты — штриховая линия, точки — эксперимент).

Выполнены расчеты линии торможения, образующейся в результате взаимодействия двух натекающих на стенку струй, с использованием пер-



Фиг. 1



Фиг. 2

вого из соотношений (7). Сопоставление с экспериментом [15] рассчитанных положений линий торможения в безразмерных координатах при разных значениях отношения потоков импульсов пристенных струй $N = M^-/M^+$ представлено на фиг. 2 (все размеры приведены к расстоянию между центрами L , штриховые линии — результаты расчета: 1—4— $N=2,2; 3,2; 5; 7,9$; сплошные соответствуют эксперименту).

Известно решение задачи о выравнивании потока за кромками конечной толщины лопатки турбомшины [16]. Единственность решения задачи о течении в ближнем следе [3] доказана лишь для сверхзвукового потока. Однако коэффициент потерь зависит от давления за кромками; его величину в дозвуковом потоке предлагается задавать в [16] на основе эмпирических данных. Воспользуемся для нахождения давления за кромками p_s и коэффициента потерь ξ_s полученными ранее формулами. Учтем наличие изобарической донной области. В соответствии с законом изменения количества движения и используя подход, описанный ранее, получим исходные соотношения, которые преобразуются к виду, отвечающему следующей формальной замене в (5), (7), (8):

$$\delta' = \delta - r, \quad \partial J_e' \approx \partial J_e + (p_e^- + p_e^+ - 2p_s) r dl \quad (10)$$

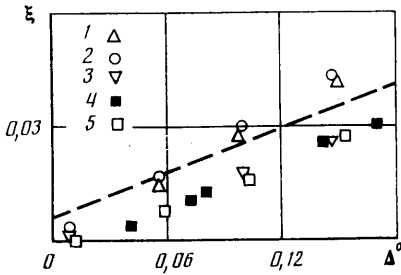
где r — радиус выходной кромки.

Параметры пограничного слоя на профиле θ_{11}^+ , θ_{11}^- , скорости $U_e^+ = U_e^-$ и угол потока α_e в плоскости выходных кромок до смещения в расчетах задавались.

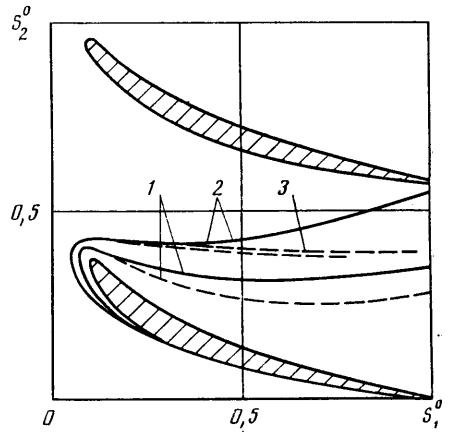
Расчеты коэффициента кромочных потерь $\xi(r) = \xi_s(r) - \xi_{pr}$ выполнены в соответствии с моделью [16] с использованием соотношений (5), (7) — (10). Модель донной области в рамках ядра потока рассматривалась в упрощенном представлении на основе схемы источников-стоков массы с равномерной плотностью. Зависимость $\xi(r)$ от параметра $\Delta^\circ = 2r/(t \sin \alpha_e)$

при различных $\theta^\circ = \theta_{11}^- / \theta_{11}^+$ и $\psi = (\theta_{11}^+ + \theta_{11}^-) / (t \sin \alpha_e)$ представлена на фиг. 3 (1, 2 — $\theta^\circ = 1,33$, $\psi = 0,0186, 0,0372$; 3—5 — $\theta^\circ = 6$, $\psi = 0,0186, 0,0272, 0,0372$). Данные расчета согласуются с эмпирической зависимостью Степанова — Дейча (штриховая линия на фиг. 3) $\xi = a + b\Delta^\circ$ ($a = 0,006 - 0,008$; $b = 0,18$).

Рассмотрим формирование отрыва пространственного турбулентного пограничного слоя на торцевой стенке в межлопаточном канале диффузорной решетки. Продувки проводились при числах $Re = 3,4 \cdot 10^5$, положение линии отрыва выявлялось по данным визуализации с помощью капель красок, наносимых на обтекаемые поверхности. Следует выделить особенность течения, наблюдаемую в экспериментах: линия растекания



Фиг. 3



Фиг. 4

предельных линий тока практически совпадает с линией пересечения поверхности давления лопатки и торцевой стенки [10]. Были выполнены расчеты линии отрыва для углов натекания $\alpha = 0$ и 11° по формуле, полученной на основе уравнений (7), и с использованием замыкающих соотношений [9]. Дополнительно предполагалось, что $U_e^+ = U_e^-$, $H^+ = H^- = 1,3$, а толщина пограничного слоя $\delta \sim l^n$, где l — расстояние от входной кромки отсечной пластины или от двугранного угла вдоль предельных линий тока до линии отрыва (при расчетах δ^- и δ^+ соответственно). Углы наклона предельных линий относительно выбранной системы координат задавались из эксперимента. Начало интегрирования выбиралось в точке на линии отрыва вблизи входной кромки лопатки, полученной экспериментально. Результаты расчета линий отрыва для выбранных углов натекания при различных значениях показателя степени n представлены на фиг. 4 (штриховые кривые). Совпадение расчетных и экспериментальных кривых (сплошные линии) удовлетворительное (все размеры приведены к хорде профиля: 1 — $\alpha = 0$, 2 — $\alpha = 11^\circ$, $n = 6/7$, 3 — $\alpha = 11^\circ$, $n = 2$).

В рамках предлагаемой модели кроме определения линий взаимодействия пристенных течений можно ввести учет вовлечения низкоэнергетического рабочего тела пристенных слоев в вихревые образования в невязком ядре потока, что позволяет надеяться на перспективность данного алгоритма для анализа источников потерь в каналах турбомашин.

Автор благодарен Г. Ю. Степанову и В. Н. Ершову за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В., Сычев Вик. В. О турбулентном отрыве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 6. С. 1500—1512.
2. Белоцерковский С. М., Коговский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математиче-

- ское моделирование нестационарного отрывного обтекания кругового цилиндра // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 138–147.
3. *Гогийш Л. В., Степанов Г. Ю.* Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
 4. *Wang K. C.* On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. № 2. P. 397–404.
 5. *Wang K. C.* On the disputes about open separation // AIAA Pap. 1983. № 296. 8 p.
 6. *Шевелев Ю. Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
 7. *Гречаниченко Ю. В., Нестеренко В. А.* Вторичные течения в решетках турбомашин. Харьков: Вища школа, 1983. 119 с.
 8. *Лэнгстон, Найс, Хуппер.* Трехмерное течение в канале турбинной решетки // Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. А. Энергетические машины и установки. 1977. Т. 99. № 1. С. 22–31.
 9. *Угрюмов М. Л., Меньшиков В. А.* Интегральный метод расчета пространственно-сжимаемого турбулентного пограничного слоя на вращающейся лопатке турбомашин // Газовая динамика двигателей и их элементов. Вып. 2. Харьков, 1983. С. 154–160.
 10. *Гуревич Ю. Г.* Трехмерный пограничный слой на пересекающихся поверхностях // Пограничный слой. М., 1985. С. 24–55. (Тр. ЦИАМ. № 1128).
 11. *Шальман Е. Ю.* Интегральный метод расчета трехмерного пограничного слоя в криволинейных каналах. // Пограничный слой. М., 1985. С. 55–80. (Тр. ЦИАМ. № 1128).
 12. *Kind R. J., Suthanthiran K.* The interaction of two opposing plane turbulent wall jets // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. № 2. P. 389–402.
 13. *Сиклари М. Дж., Хилл В. Г., мл., Дженкинс Р. К.* Расчет положения линии торможения и направления восходящего течения, образуемых в результате взаимодействия двух натекающих на стенку струй // Ракетная техника и космонавтика, 1981. Т. 19. № 11. С. 35–44.
 14. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
 15. *Потапов Ю. Ф.* Определение геометрических характеристик фонтанов, возникающих при взаимодействии пристеночных струй // Уч. зап. ЦАГИ. 1984. Т. 15. № 6. С. 27–34.
 16. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.

Харьков

Поступила в редакцию
23.VII.1985