

УДК 532.526

## ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

СЫЧЕВ ВИК. В.

Рассмотрено плоское стационарное течение несжимаемой жидкости в пограничном слое, который развивается на движущейся вниз по потоку поверхности. Получено особое решение уравнений Прандтля, непрерывно продолжимое через точку одновременного обращения в нуль величин трения и продольной составляющей вектора скорости. Такое решение реализуется, в частности, при обтекании вращающегося кругового цилиндра.

Отрыв потока при большом числе Рейнольдса происходит в результате уменьшения скорости на внешней границе пограничного слоя, развивающегося вдоль поверхности обтекаемого тела [1]. Согласно критерию Прандтля, при стационарном обтекании неподвижной поверхности точка отрыва совпадает с точкой нулевого поверхностного трения. Результаты численного решения краевых задач для уравнений пограничного слоя [2, 3], а также анализ, проведенный в [4], указали на то, что при заданном регулярном распределении давления в этой точке возникает особенность. Детальный анализ этой особенности [5] (см. также обзор [6]) показал, что в общем случае она неустранима, т. е. решение задачи для уравнений пограничного слоя, которое существует вплоть до точки нулевого трения, нельзя непрерывно продолжить через нее. Аналогично обстоит дело и в случае, когда стационарный пограничный слой развивается вдоль поверхности, которая движется вниз по потоку с заданной постоянной скоростью. В этом случае, согласно критерию Мура — Ротта — Сирса (см. [7]), отрыв потока начинается не на движущейся поверхности, а внутри пограничного слоя в точке одновременного обращения в нуль величин трения и продольной составляющей вектора скорости. (Эту точку в дальнейшем будем называть точкой Мура — Ротта — Сирса.) Численные решения соответствующих краевых задач указали, что такая точка является особой и возникает в результате действия неблагоприятного градиента давления [8, 9]. Анализ структуры этой особенности показал [10], что, как и для течения вдоль неподвижной поверхности, она неустранима.

Появление неустранимых особенностей в решении уравнений пограничного слоя Прандтля всегда указывает на то, что это решение не может служить для описания реального течения. В действительности, как известно, отрыв происходит в результате появления самоиндуцированного градиента давления (см., например, [11]).

В то же время для пограничного слоя на неподвижной поверхности существуют такие условия, при которых решения уравнений Прандтля при заданном регулярном распределении давления хотя и являются особыми в точке нулевого трения, однако допускают непрерывное продолжение через нее [12]. Эти решения описывают реальные течения, близкие к отрывным, которые реализуются, например, при обтекании передней кромки профиля, установленного под углом атаки [12], или при обтекании вогнутых поверхностей [13, 14].

Цель настоящей работы — показать, что для пограничного слоя на подвижной поверхности помимо неустранимой особенности [10] возможно также существование особых решений, непрерывно продолжимых через точку Мура — Ротта — Сирса.

1. Рассмотрим плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тела конечных размеров, установленного в однородном набегающем потоке. Введем следующие обозначения:  $lx, ly$  — криволинейные ортогональные координаты, связанные с поверхностью тела  $y=0$ ;  $u_{\infty}u, u_{\infty}v$  — соответствующие проекции вектора скорости;  $p_{\infty} + \rho u_{\infty}^2 p$  — давление;  $lu_{\infty}\psi$  — функция тока и  $\rho$  — плотность. Через  $l$  обозначен характерный размер тела,  $u_{\infty}$  и  $p_{\infty}$  — параметры набегающего потока. Число Рейнольдса  $R = u_{\infty}l/\nu$ ,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Предположим, что число Рейнольдса велико ( $R \rightarrow \infty$ ), а поверхность тела движется, причем направление ее движения совпадает с направлением течения на внешней границе пограничного слоя.

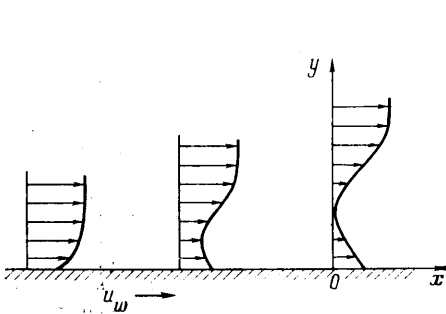
Уравнения пограничного слоя и краевые условия запишем в переменных Мизеса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dp_e}{dx} = u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right), \quad \frac{\partial Y}{\partial \Psi} = \frac{1}{u}, \quad u \frac{\partial Y}{\partial x} = V$$

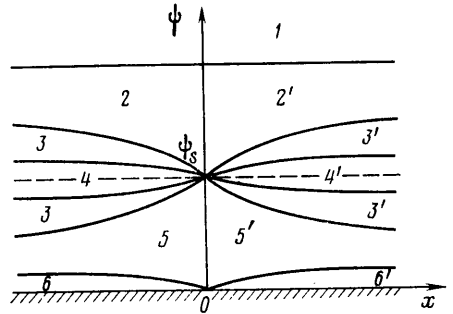
$$u = u_w, \quad Y = V = 0 \quad (\Psi = 0) \quad (1.1)$$

$$u \rightarrow u_e(x) \quad (\Psi \rightarrow \infty), \quad u = U^*(\Psi) \quad (x = x_0), \quad p_e' = -u_e u_e'$$

Здесь  $u_w = \text{const} > 0$  — скорость поверхности тела;  $u_e(x) > 0$  — скорость на внешней границе пограничного слоя,  $U^*(\Psi)$  — начальный профиль



Фиг. 1



Фиг. 2

скорости. Кроме того, как обычно, введены переменные:  $Y = R^{1/2}y$ ,  $\Psi = R^{1/2}\psi$ ,  $V = R^{1/2}v$ .

Действие неблагоприятного градиента давления ( $p_e'(x) > 0$ ) приводит к торможению жидкости в пограничном слое. Вследствие движения поверхности тела вниз по потоку в профиле скорости при этом появляется точка минимума (фиг. 1). Дальнейшее увеличение давления может привести к тому, что величина этого минимума в некотором сечении обратится в нуль, т. е. в пограничном слое появится точка Мура — Ротта — Сирса, в которой

$$u = \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (1.2)$$

Для удобства положим, что в этой точке  $x = 0$ .

При условии  $p_e'(0) = \lambda_0 > 0$  решение задачи (1.1) в общем случае имеет при  $x = 0$  неустранимую особенность [10]. Причем в отличие от решения в окрестности точки нулевого трения на неподвижной поверхности [5, 12] уже главный член асимптотического разложения является особым [10] и обращение в нуль постоянных, характеризующих профиль скорости вблизи точки его минимума, приводит к усилению этой особенности, а не к ее устранению. Поэтому единственная возможность получить особое непрерывно продолжимое через точку Мура — Ротта — Сирса решение состоит в том, чтобы положить значение  $p_e'(0) = 0$ . При  $x < 0$  градиент давления должен оставаться положительным, а при  $x > 0$  — отрицательным. Иначе говоря, давление  $p_e(x)$  должно принимать при  $x = 0$  максимальное значение.

Особое решение уравнений Прандтля с такими свойствами было получено численно для течения около вращающегося кругового цилиндра [15]. Внешнее течение при  $R \rightarrow \infty$  описывается известным решением

Рэлея для потенциального обтекания с циркуляцией, поэтому

$$u_e(x) = \frac{\Gamma}{2\pi} - 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (1.3)$$

Здесь  $u_\infty l \Gamma$  — циркуляция, а в качестве характерного размера  $l$  взят радиус цилиндра. Вместо начального условия для пограничного слоя ставится условие его периодичности:  $u(0, \Psi) = u(2\pi, \Psi)$ . В результате численного решения задачи (1.1), (1.3) с условием периодичности было установлено, что каждому заданному значению скорости вращения соответствует определенное значение циркуляции. Причем решение существует для всех значений  $u_w > u_w^* = 3,85$ , что соответствует значениям  $\Gamma > \Gamma^* = 6,00\pi$ . При  $u_w = u_w^*$  в решении появляется особенность, которая характеризуется значительным увеличением толщины пограничного слоя. Эта особенность возникает в точке Мура — Ротта — Сирса и ее продольная координата ( $x=0$ ) совпадает (в пределах точности расчета) с точкой максимума в распределении давления  $p_e(x)$ .

Перейдем к анализу этой особенности.

2. Распределения скорости  $u_e(x)$  и градиента давления  $p_e'(x)$  в окрестности рассматриваемой точки на основании сказанного определяются выражениями

$$u_e(x) = q_0 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n x^n \quad (2.1)$$

$$p_e'(x) = -\lambda_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n x^n, \quad q_2 = \frac{\lambda_1}{2q_0}$$

Здесь  $q_0 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $q_n$  и  $\lambda_n$  — постоянные, которые считаются известными из решения задачи для области потенциального течения (обл. 1, фиг. 2).

Рассмотрим сначала течение перед точкой Мура — Ротта — Сирса, т. е. когда  $x \rightarrow -0$ . Значение функции тока  $\Psi$  в этой точке обозначим через  $\Psi_s$ .

В верхней части пограничного слоя, где  $\Psi > \Psi_s$  (обл. 2, фиг. 2) и продольная составляющая вектора скорости в соответствии с (2.1) есть величина порядка единицы при  $x \rightarrow -0$ , решение может быть представлено в виде следующих асимптотических разложений:

$$u = u_0^+(\Psi) + (-x)u_1^+(\Psi) + (-x)^2 u_2^+(\Psi) + O[(-x)^3] \quad (2.2)$$

$$Y = g^+(x) + y_0^+(\Psi) + (-x)y_1^+(\Psi) + O[(-x)^2]$$

Подставляя (2.2) в (1.1), (2.1), получим

$$u_1^+ = -(u_0^+ u_0^{+'})', \quad u_2^+ = \lambda_1 (2u_0^+)^{-1} - \frac{1}{2} (u_0^+ u_1^+)''$$

$$y_0^+ = \int (u_0^+)^{-1} d\Psi, \quad y_1^+ = - \int u_1^+ (u_0^+)^{-2} d\Psi \quad (2.3)$$

Из условия при  $\Psi \rightarrow \infty$  в (1.1), обеспечивающего сращивание с решением в обл. 1, следует, что  $u_0^+(\infty) = q_0$ . Значение функции  $g^+(x)$  остается пока произвольным.

В нижней части пограничного слоя, прилегающей к движущейся поверхности тела (обл. 5), продольная составляющая вектора скорости также должна оставаться величиной порядка единицы; поэтому решение здесь строится аналогично решению (2.2), (2.3)

$$u = u_0^-(\Psi) + (-x)u_1^-(\Psi) + (-x)^2 u_2^-(\Psi) + O[(-x)^3]$$

$$\begin{aligned}
 Y &= y_0^-(\Psi) + (-x)y_1^-(\Psi) + O[(-x)^2] \\
 u_1^- &= -(u_0^- u_0^{-\prime})', \quad u_2^- = \lambda_1 (2u_0^-)^{-1} - \frac{1}{2} (u_0^- u_1^-)'' \\
 y_0^- &= \int_0^{\Psi} (u_0^-)^{-1} ds, \quad y_1^- = - \int_0^{\Psi} u_1^- (u_0^-)^{-2} ds
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Это решение удовлетворяет условию непротекания на поверхности тела:  $Y(x, 0) = 0$ . Функции  $u_0^+(\Psi)$  и  $u_0^-(\Psi)$  в (2.2), (2.4) характеризуют профиль скорости пограничного слоя, приходящий к сечению  $x = -0$ , и определяются из решения задачи (1.1) в целом.

Согласно (1.2),  $u_0^+(\Psi_s) = u_0^-(\Psi_s) = 0$ , следовательно, в окрестности линии тока  $\Psi = \Psi_s$  должна лежать область медленного течения, где решения для обл. 2 и 5 становятся несправедливыми.

Рассмотрение этой окрестности начнем с обл. 4 (фиг. 2), предполагая, что в ней существенную роль играет действие сил внутреннего трения. Исходя из баланса всех членов в уравнении (1.1) с градиентом давления (2.1), представим решение в этой области при  $x \rightarrow -0$  в виде

$$\begin{aligned}
 u &= (-x)f_1(\eta) + (-x)^\alpha f_\alpha(\eta) + o[(-x)^\alpha] \\
 \eta &= \frac{\Psi - \Psi_s}{\lambda_1^{1/4} |x|}, \quad \alpha > 1
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Подставив это разложение в (1.1), (2.1), получим для коэффициента главного члена разложения следующее уравнение:

$$f_1(f_1 f_1')' - \lambda_1^{1/2} f_1(\eta f_1' - f_1) = \lambda_1^{3/2}
 \tag{2.6}$$

Для срачивания (2.5) с решением в соседних областях необходимо, чтобы при  $|\eta| \rightarrow \infty$  функция  $f_1(\eta)$  росла не быстрее, чем некоторая степень  $\eta$ . Детальный численный анализ уравнения (2.6) показал, что единственным решением, удовлетворяющим этому условию, является  $f_1 = \sqrt{\lambda_1}$ . Тогда для коэффициента второго члена разложения приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned}
 f_\alpha'' - \eta f_\alpha' + (\alpha + 1) f_\alpha &= h_\alpha(\eta) \\
 h_\alpha(\eta) &= 0 \quad (\alpha < 2); \quad h_2(\eta) = \lambda_2 / \sqrt{\lambda_1} \quad (\alpha = 2)
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

где  $\lambda_2$  — коэффициент при втором члене разложения (2.1) для  $p_e'(x)$ . На решение этого уравнения необходимо наложить условие отсутствия экспоненциально возрастающих членов в разложениях при  $|\eta| \rightarrow \infty$ . Рассмотрим однородную часть уравнения (2.7) (уравнение Вебера). Нетривиальное решение поставленной задачи существует, если  $\alpha + 1 = n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Каждому такому  $\alpha$  соответствует собственная функция, представляющая собой полином Чебышева — Эрмита. Согласно (2.5), наименьшее значение  $\alpha = 2$ . В этом случае решение уравнения (2.7) имеет вид

$$f_2 = c_2 \left( \eta - \frac{1}{3} \eta^3 \right) + \gamma_{20}, \quad \gamma_{20} = \frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}}$$

Решение удовлетворяет поставленным условиям. Однако если  $c_2 \neq 0$ , то функция  $f_2(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \infty$  и  $\eta \rightarrow -\infty$  имеет разные знаки. Решения этого типа соответствуют профилям скорости в пограничном слое на поверхности, движущейся вверх по потоку [16, 17]. Поэтому положим  $c_2 = 0$  и тогда  $f_2 = \lambda_2 / (3\sqrt{\lambda_1})$ .

Третий и последующие члены разложения (2.5) в обл. 4 определяют-ся указанным набором собственных функций; кроме того, необходимо учитывать появление неоднородностей  $h_n(\eta)$ , обусловленных нелинейностью уравнения (1.1) и следующими членами ряда (2.1) для  $p'_e(x)$ . Наконец, в асимптотическое разложение (аналогично тому, как это имело место в [18]) могут войти члены вида  $(-x)^r \ln(-x) f_r(\eta)$ .

Проводя таким образом построение асимптотического разложения (член за членом), получим

$$u = (-x)f_1(\eta) + (-x)^2 f_2(\eta) + (-x)^3 f_3(\eta) + (-x)^4 f_4(\eta) + (-x)^5 \ln(-x) f_{50}(\eta) + (-x)^5 f_5(\eta) + O[(-x)^6 \ln(-x)]$$

$$f_1 = \sqrt[3]{\lambda_1}, \quad f_2 = \lambda_2 / (3\sqrt[3]{\lambda_1}) \quad (2.8)$$

$$f_3 = c_3 \left( 1 - 2\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^4 \right) + \gamma_{30}, \quad f_4 = c_4 \left( \eta - \frac{2}{3}\eta^3 + \frac{1}{15}\eta^5 \right) + \sum_{n=0}^2 \gamma_{4n} \eta^{2n}$$

$$f_{50} = c_{50} \left( 1 - 3\eta^2 + \eta^4 - \frac{1}{15}\eta^6 \right)$$

Здесь  $c_3, c_4, c_{50}$  — произвольные постоянные, а  $\gamma_{30}, \gamma_{4n}$  выражаются через  $\lambda_n$  ( $n \leq 4$ ) и  $c_n$  ( $n \leq 3$ ); для функции  $f_5(\eta)$  приходим к следующему уравнению:

$$f_5'' - \eta f_5' + 6f_5 = h_5(\eta), \quad h_5(\eta) = \beta_{58} \eta^8 + \sum_{n=0}^6 \beta_{5n} \eta^n \quad (2.9)$$

$$\beta_{58} = \frac{c_3^2}{9\sqrt[3]{\lambda_1}}, \quad \beta_{56} = \frac{c_{50}}{15} - \frac{40}{9} \frac{c_3^2}{\sqrt[3]{\lambda_1}}$$

где остальные постоянные  $\beta_{5n}$  выражаются через  $\lambda_n$  ( $n \leq 5$ ),  $c_{50}$  и  $c_n$  ( $n \leq 4$ ). Можно показать, что условием разрешимости краевой задачи для (2.9) является равенство

$$c_{50} = \frac{20c_3^2}{\sqrt[3]{\lambda_1}} \quad (2.10)$$

а решение имеет вид

$$f_5 = c_5 \left( 1 - 3\eta^2 + \eta^4 - \frac{1}{15}\eta^6 \right) + \gamma_{58} \eta^8 + \sum_{n=0}^6 \gamma_{5n} \eta^n, \quad \gamma_{58} = -\frac{c_3^2}{18\sqrt[3]{\lambda_1}} \quad (2.11)$$

Постоянные  $c_5$  и  $\gamma_{56}$  остаются произвольными, а  $\gamma_{5n}$  выражаются через  $\beta_{5n}$ . Выражение (2.10) определяет связь постоянных  $c_{50}$  и  $c_3$ , что указывает на необходимость введения членов, содержащих  $\ln(-x)$  в (2.8).

Нетрудно видеть, что полученное решение для «вязкого подслоя» (обл. 4) не срывается с решениями (2.2)–(2.4) для обл. 2 и 5. Действительно, сравним главный член разложения (2.8)  $O(|x|)$  с третьим членом этого же разложения  $O(|x|^3 |\eta|^4)$  при  $|\eta| \rightarrow \infty$ . При  $|\eta| = O(|x|^{-1/2})$  или  $|\Psi - \Psi_s| = O(|x|^{1/2})$  они становятся одного порядка. Это означает, что между обл. 4 и обл. 2 и 5 лежит новая характерная обл. 3 (фиг. 2). Введем независимую переменную

$$\xi = (\Psi - \Psi_s) / |x|^{1/2} \quad (2.12)$$

принимаящую в этой области конечные значения. Если теперь перейти в (2.8), (2.11) от переменной  $\eta$  к  $\xi = \lambda_1^{1/4} |x|^{1/2} \eta$ , то легко видеть, что в обл. 3, которую будем называть нелинейной локально-невязкой областью,

решение следует искать при  $x \rightarrow -0$  в виде

$$u = (-x)\varphi_0(\xi) + (-x)^{3/2}\varphi_1(\xi) + (-x)^2 \ln(-x)\varphi_2(\xi) + (-x)^2\varphi_3(\xi) + O[(-x)^{5/2} \ln(-x)] \quad (2.13)$$

Подстановка этого разложения в (1.1), (2.1) приводит к уравнениям относительно искомых функций, решения которых суть

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (a_0^2 \xi^4 + \lambda_1)^{1/2}, & \varphi_1 &= \frac{a_1 \xi^5}{\varphi_0}, & \varphi_2 &= \frac{a_2 \xi^6}{\varphi_0} \\ \varphi_3 &= \frac{a_3 \xi^6}{\varphi_0} + \frac{\lambda_2}{3\varphi_0} - 3a_0^2 \xi^2 + \frac{2a_2 \xi^6}{\varphi_0} \ln|\xi| + \\ &+ \frac{\lambda_1 a_1^2}{2a_0^2} \frac{\xi^6}{\varphi_0^3} + \frac{3a_0^4}{2\sqrt{\lambda_1}} \frac{\xi^6}{\varphi_0} \ln \left[ \frac{\varphi_0 - \sqrt{\lambda_1}}{\varphi_0 + \sqrt{\lambda_1}} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Сращивание решений в обл. 3 и 4 при  $|\eta| \rightarrow \infty$  и  $|\xi| \rightarrow 0$  дает следующую связь между входящими в них постоянными:

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{3}{2} a_0^2 \sqrt{\lambda_1}, & c_4 &= 15a_1 \lambda_1^{3/4}, & a_2 &= -\frac{3a_0^4}{\sqrt{\lambda_1}} \\ c_{30} &= -15a_2 \lambda_1 = 45a_0^4 \sqrt{\lambda_1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Здесь использовалось также выражение (2.10).)

Обратимся теперь ко второму уравнению в (1.1). Внося в него (2.12)–(2.14), получим для главных членов разложения следующее:

$$\begin{aligned} Y &= g(x) + (-x)^{-1/2} z_0(\xi) + z_1(\xi) + O[(-x)^{1/2} \ln(-x)] \\ z_0 &= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{ds}{(a_0^2 s^4 + \lambda_1)^{1/2}}, & z_1 &= \frac{a_1}{2a_0^3} \left[ \frac{a_0 \xi^2}{\varphi_0} - \ln \left( \frac{a_0 \xi^2 + \varphi_0}{a_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $g(x)$  — некоторая пока произвольная функция.

Из сращивания полученного решения для нелинейной локально-невязкой обл. 3 с решением (2.4) для обл. 5 (фиг. 2) при  $\xi \rightarrow -\infty$  и  $\Psi \rightarrow \Psi_s$  — находим

$$\begin{aligned} y_0^- &= a_0 \Psi^{*2} - \frac{a_1}{a_0} \Psi^{*3} + \frac{2a_2}{a_0} \Psi^{*4} \ln \Psi^* + \frac{a_3}{a_0} \Psi^{*4} + O(\Psi^{*5}) \\ y_0^- &= \frac{1}{a_0 \Psi^*} - \frac{a_1}{a_0^3} \ln \Psi^* + b_0 + o(1) \quad (\Psi^* \rightarrow 0) \\ g &= -\frac{a_1}{2a_0^3} \ln \left[ \frac{\Psi^* = \Psi_s - \Psi}{(-x)} \right] - \frac{a_1}{2a_0^3} + b_0 + o(1) \quad (x \rightarrow -0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Используя разложение для эллиптического интеграла из (2.16)

$$\begin{aligned} z_0 &= \kappa_0 - (a_0 \xi)^{-1} + O(\xi^{-5}) \quad (\xi \rightarrow \infty) \\ \kappa_0 &= \frac{\Gamma^2(1/4)}{2\sqrt{\pi} a_0 \lambda_1^{1/4}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

и произведя сращивание полученных решений в обл. 2 и 3 при  $\Psi \rightarrow \Psi_s$  и  $\xi \rightarrow \infty$ , получим

$$y_0^+ = a_0 \Psi^{o2} + \frac{a_1}{a_0} \Psi^{o3} + \frac{2a_2}{a_0} \Psi^{o4} \ln \Psi^o + \frac{a_3}{a_0} \Psi^{o4} + O(\Psi^{o5})$$

$$(\Psi^{\circ} \rightarrow 0), \quad \Psi^{\circ} = \Psi - \Psi_s, \quad g^+ = \kappa_0(-x)^{-1/2} + b_0 + o(1) \quad (x \rightarrow -0) \quad (2.19)$$

Анализ течения перед точкой Мура — Ротта — Сирса завершает рассмотрение «вязкого пристеночного» подслоя (обл. 6). Введение этой области необходимо для удовлетворения условия прилипания на твердой поверхности. Решение строится точно так же, как в случае возникновения неустранимой особенности в рассматриваемой точке [10]. Поэтому выпишем его, не останавливаясь на подробностях

$$\begin{aligned} u = u_w + \sum_{n=1}^4 |x|^{n/2} \omega_n(\zeta) + O(|x|^{5/2}), \quad \zeta = \frac{\Psi}{(2u_w |x|)^{1/2}} \\ \omega_1 = d_1 \zeta, \quad \omega_2 = d_2^* \zeta^2, \quad \omega_3 = -\frac{d_3}{3} \zeta^3 - (d_3 + d_3^*) \zeta \operatorname{sign}(x) \\ \omega_4 = d_4^* \zeta^4 + d_4^{\circ} \zeta^2 \operatorname{sign} x; \quad d_2^* = -\frac{d_1^2}{2u_w}, \quad d_3^* = \frac{3}{2} \frac{d_1^3}{u_w^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Постоянные  $d_1^*$ ,  $d_4^{\circ}$  выражаются через  $d_1$ ,  $d_3$ ,  $\lambda_1$  и  $u_w$ . Выражение для функции  $Y(x, \Psi)$  находится непосредственно из второго уравнения (2.1) и здесь не приводится. Из срачивания этого решения с решением для обл. 5 следует, что последнее при  $\Psi \rightarrow 0$  ведет себя регулярно и  $u_0^-(0) = u_w$ .

Полученное асимптотическое решение уравнений пограничного слоя содержит произвольные постоянные  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_3$ ,  $b_0$ ,  $\Psi_s$ ,  $d_1$ ,  $d_3$ , характеризующие приходящий к сечению  $x = -0$  профиль скорости. Их значения определяются решением краевой задачи (1.1) в целом.

3. Рассмотрим возможность продолжения полученного решения через точку Мура — Ротта — Сирса. Из условия непрерывности продольной составляющей вектора скорости в сечении  $x = 0$  и выражений (2.2), (2.4) заключаем, что начальный профиль скорости для пограничного слоя при  $x = +0$  есть

$$u = u_0^+(\Psi) \quad (\Psi > \Psi_s), \quad u = u_0^-(\Psi) \quad (0 < \Psi < \Psi_s) \quad (3.1)$$

Краевые условия на внешней границе пограничного слоя и поверхности тела остаются прежними и определяются выражениями (1.1), (2.1). В верхней части пограничного слоя (обл. 2', фиг. 2), исходя из тех же соображений, что и при построении разложений (2.2) для обл. 2, и используя (3.1), представим при  $x \rightarrow +0$  решение в виде

$$\begin{aligned} u = u_0^+(\Psi) + xU_1^+(\Psi) + x^2U_2^+(\Psi) + O(x^3), \\ Y = G^+(x) + y_0^+(\Psi) + xY_1^+(\Psi) + O(x^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (1.1), (2.1), получим, что  $U_1^+(\Psi) = -u_1^+(\Psi)$ ,  $U_2^+(\Psi) = u_2^+(\Psi)$ ,  $Y_1^+(\Psi) = -y_1^+(\Psi)$ , где  $u_1^+(\Psi)$ ,  $u_2^+(\Psi)$ ,  $y_1^+(\Psi)$  — функции из (2.3), а  $G^+(x)$  остается пока произвольной. Это означает, что решение (2.2), (2.3) для  $u(x, \Psi)$ , как и следовало ожидать, справедливо и при  $x \rightarrow +0$ . Аналогичным образом обстоит дело для решения в обл. 5 и 5': при  $x \rightarrow +0$  оно имеет вид (2.4). Вследствие этого, а также регулярности разложения для функции  $u_0^-(\Psi)$  при  $\Psi \rightarrow 0$  решение в пристеночном подслое (обл. 6') при  $x \rightarrow +0$  определяется выражением (2.20).

Полученные разложения в обл. 2' и 5', как и разложения (2.2), (2.4) при  $x \rightarrow -0$ , становятся несправедливыми вблизи линии тока  $\Psi = \Psi_s$ . Поэтому, введя при  $x \rightarrow +0$  независимую переменную (2.12), будем искать решение в нелинейной локально-невязкой обл. 3' в виде (см. (2.13))

$$u = x\Phi_0(\xi) + x^{3/2}\Phi_1(\xi) + x^2 \ln x \Phi_2(\xi) + x^2 \Phi_3(\xi) + O(x^{5/2} \ln x) \quad (3.3)$$

$$Y = G(x) + x^{-1/2}Z_0(\xi) + Z_1(\xi) + O(x^{1/2} \ln x)$$

После подстановки этих разложений в (1.1), (2.1) и интегрирования получающихся уравнений находим искомые функции

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (A_0^2 \xi^4 + \lambda_1)^{1/2}, & \Phi_1 &= \frac{A_1 \xi^5}{\Phi_0}, & \Phi_2 &= \frac{A_2 \xi^6}{\Phi_0} \\ \Phi_3 &= \frac{A_3 \xi^6}{\Phi_0} - \frac{\lambda_2}{3\Phi_0} + 3A_0^2 \xi^2 + \frac{2A_2 \xi^6}{\Phi_0} \ln|\xi| + \\ &+ \frac{\lambda_1 A_1^2}{2A_0^2} \frac{\xi^6}{\Phi_0^3} - \frac{3A_0^4}{2\sqrt{\lambda_1}} \frac{\xi^6}{\Phi_0} \ln \left[ \frac{\Phi_0 - \sqrt{\lambda_1}}{\Phi_0 + \sqrt{\lambda_1}} \right] \\ Z_0 &= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{ds}{\Phi_0}, & Z_1 &= \frac{A_1}{2A_0^3} \left[ \frac{A_0 \xi^2}{\Phi_0} - \ln \left( \frac{A_0 \xi^2 + \Phi_0}{A_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выражения для  $G^+(x)$  и  $G(x)$  из (3.2), (3.3) и постоянных из (3.4) определяются в результате сращивания решения (3.3), (3.4) и решений для обл. 2' и 5' с использованием выражений (2.17)–(2.19)

$$\begin{aligned} G^+ &= \kappa_0 x^{-1/2} + b_0 + o(1), & G &= -\frac{A_1}{2A_0^3} \ln \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{A_1}{2A_0^3} + b_0 + o(1) \\ A_0 &= a_0, & A_1 &= a_1, & A_2 &= a_2, & A_3 &= a_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение (3.3), (3.4) в отличие от решения (2.13)–(2.15) для обл. 3 ведет себя нерегулярно при  $\xi \rightarrow 0$ ; для функции  $\Phi_3(\xi)$  при  $\xi \rightarrow 0$  получим

$$\Phi_3 = -\frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}} + 3a_0^2 \xi^2 + \frac{\lambda_2 a_0^2}{6\lambda_1^{3/2}} \xi^4 - \frac{12a_0^4}{\lambda_1} \xi^6 \ln|\xi| + O(\xi^6)$$

Здесь использовались выражения для постоянных (3.5) и (2.15). Для устранения нерегулярности необходимо ввести в рассмотрение «вязкий подслон» (обл. 4'), в котором переменная  $\eta$  из (2.5) принимает конечные значения. Решение в этой области будем искать при  $x \rightarrow +0$  в виде, аналогичном (2.8)

$$\begin{aligned} u &= xF_1(\eta) + x^2F_2(\eta) + x^3F_3(\eta) + x^4F_4(\eta) + \\ &+ x^5 \ln x F_{50}(\eta) + x^5 F_5(\eta) + O(x^6 \ln x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для искомых функций после подстановки этого разложения в (1.1), (2.1) получаются уравнения, решения которых при  $|\eta| \rightarrow \infty$  должны удовлетворять условиям сращивания с решением (3.3)–(3.5) при  $|\xi| \rightarrow 0$ . Эти решения имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{\lambda_1}, & F_2 &= -\frac{\lambda_2}{3\sqrt{\lambda_1}}, & F_3 &= c_3 \left( 1 + 2\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^4 \right) + \gamma_{30} \\ F_4 &= c_4 \left( \eta + \frac{2}{3}\eta^3 + \frac{1}{15}\eta^5 \right) + \sum_{n=0}^2 \gamma_{4n}^* \eta^{2n} \\ F_{50} &= c_{50}^* \left( 1 + 3\eta^2 + \eta^4 + \frac{1}{15}\eta^6 \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\gamma_{4n}^*$  выражаются через постоянные  $c_3$  и  $\lambda_n$  ( $n \leq 4$ ). (Здесь использовались выражения (2.15).) Для функции  $F_5(\eta)$  при этом приходим к уравнению

$$F_5'' + \eta F_5' - 6F_5 = H_5(\eta), \quad H_5(\eta) = \beta_{58}^* \eta^8 + \sum_{n=0}^6 \beta_{5n}^* \eta^n$$



$$\beta_{55}^* = -\frac{c_3^2}{9\sqrt{\lambda_1}}, \quad \beta_{56}^* = \frac{c_{50}^*}{15} - \frac{40}{9} \frac{c_3^2}{\sqrt{\lambda_1}}$$

Постоянные  $\beta_{5n}^*$  ( $n < 6$ ) определяются через  $\lambda_n$  ( $n \leq 5$ ),  $c_{50}^*$ , а также  $c_n$  ( $n \leq 4$ ), которые входили в решение при  $x \rightarrow -0$ . Решение этого уравнения, регулярное при конечных значениях  $\eta$ , существует и при  $|\eta| \rightarrow \infty$

$$F_5 = \frac{\beta_{55}^*}{2} \eta^8 + (\beta_{56}^* - 28\beta_{55}^*) \eta^6 \ln |\eta| + O(\eta^6)$$

Из срачивания с решением в обл.  $Z'$  с учетом выражений для постоянных в (2.15) и (3.5) находим, что  $c_{50}^* = -135a_0^4 \sqrt{\lambda_1}$ .

Полученное решение устраняет нерегулярность в решении для обл.  $Z'$  при  $|\xi| \rightarrow 0$ . Этим объясняется необходимость введения обл.  $4$  и  $4'$ , хотя вплоть до члена  $O(|x|^5 \ln |x|)$  решение в этих областях представляет собой переразложение решения в обл.  $Z$  и  $Z'$  при малых  $|\xi|$ , записанное через переменную  $\eta$ .

4. Таким образом получено непрерывно продолжимое через точку Мура — Ротта — Сирса решение уравнений пограничного слоя. Это решение описывает безотрывное течение на подвижной поверхности, в котором продольная составляющая вектора скорости обращается в нуль в единственной точке, где выполняется условие (1.2), причем, согласно (2.8), (3.6), (3.7)

$$u_{\min}(x) = u(x, \Psi_S) = \sqrt{\lambda_1} |x| + O(x^2) \quad (|x| \rightarrow 0)$$

Основной вклад в вытесняющее действие пограничного слоя (см. выражения (2.16), (2.18), (2.19)) создается течением в его нелинейной локально-невязкой части. Особенность, возникающая при  $|x| \rightarrow 0$ , характеризуется неограниченным ростом толщины пограничного слоя по закону  $|x|^{-1/2}$ . Очевидно, что в некоторой окрестности сечения  $x=0$  справедливость теории Прандтля будет нарушаться.

Неустраняемая особенность в точке Мура — Ротта — Сирса также характеризуется неограниченным ростом толщины пограничного слоя, но оказывается более слабой [10]: толщина возрастает как  $\ln(|x|^{-1})$ ,  $x \rightarrow -0$ . Для пограничного слоя на неподвижной поверхности ситуация оказалась обратной: устраняемая особенность в точке нулевого поверхностного трения более слабая по сравнению с неустраняемой [12].

Рассмотренная особенность может возникать на оси симметрии плоского ламинарного следа. Действительно, течение в следе за телом при его безотрывном обтекании описывается при  $R \rightarrow \infty$  уравнениями пограничного слоя. Трение на оси симметрии равно нулю и, следовательно, в точке обращения в нуль осевой скорости выполняется условие (1.2). Поэтому, как и в [10], после незначительных упрощений полученное решение переходит в решение для следа. Суть этих упрощений сводится к тому, чтобы привести решение к виду, симметричному относительно линии тока  $\Psi = \Psi_S = 0$ .

Интересно, что для течения в осесимметричном следе, как было показано в [19], неустраняемая и устраняемая особенности являются в общем случае слабыми: толщина следа остается конечной при  $x=0$ . По своей структуре они близки к особенностям, возникающим в точке нулевого поверхностного трения [5, 12].

В заключение заметим, что регулярное представление решения задачи (1.1) (в обычных переменных  $x, Y$ ) при распределении скорости (2.1) в окрестности точки Мура — Ротта — Сирса невозможно.

Автор благодарит А. И. Рубана за большое внимание к работе и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verh. d. 3te Intern. Math.-Kongr., Heidelberg, 1904. Leipzig: Teubner. 1905. S. 484–491.
2. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1938. V. 164. № 919. P. 547–579.
3. Hartree D. R. A solution of the laminar boundary-layer equation for retarded flow // Aeronaut. Res. Coun. Rep. and Mem. 1949. № 2426. 27 p.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
5. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1948. V. 1. Pt 1. P. 43–69.

6. *Brown S. N., Stewartson K.* Laminar separation // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1969. V. 1. P. 45–72.
7. *Sears W. R., Telionis D. P.* Boundary-layer separation in unsteady flow.— *SIAM J. Appl. Math.*, 1975, v. 28, № 1, p. 215–235.
8. *Telionis D. P., Werle M. J.* Boundary-layer separation from downstream moving boundaries // *Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech.* 1973. V. 40. № 2. P. 369–374.
9. *Williams J. C., Johnson W. D.* Note on unsteady boundary-layer separation // *AIAA Journal*. 1974. V. 12. № 10. P. 1427–1429.
10. *Сычев В. В.* О некоторых особенностях в решениях уравнений пограничного слоя на подвижной поверхности // *ПММ*. 1980. Т. 44. Вып. 5. С. 831–838.
11. *Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрывных течений // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1982, № 2. С. 20–30.
12. *Рубан А. И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжимое через точку нулевого поверхностного трения // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1981. № 6. С. 42–52.
13. *Фомина И. Г.* К асимптотической теории обтекания угловых точек контура твердого тела // *Уч. зап. ЦАГИ*. 1983. Т. 14. № 5. С. 31–38.
14. *Заметаев В. Б.* Существование и неединственность локальных зон отрыва в вязких струях // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1986. № 1. С. 38–45.
15. *Николаев К. В.* Возникновение отрыва пограничного слоя на вращающемся цилиндре в потоке несжимаемой жидкости. // *Уч. зап. ЦАГИ*. 1982. Т. 13, № 6, с. 32–39.
16. *Williams J. C., Stewartson K.* Flow development in the vicinity of the sharp trailing edge on bodies impulsively set into motion. P. 2 // *J. Fluid. Mech.* 1983. V. 131. P. 177–194.
17. *Elliott J. W., Smith F. T., Cowley S. J.* Breakdown of boundary layers: (i) on moving surfaces; (ii) in semi-similar unsteady flow; (iii) in fully unsteady flow // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1983. V. 25. № 1+2. P. 77–138.
18. *Stewartson K.* On Goldstein's theory of laminar separation // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1958. v. 11. Pt 4. P. 399–410.
19. *Тригуб В. Н.* О течении в окрестности точки торможения осесимметричного следа // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1986. № 2. С. 53–59.

Москва

Поступила в редакцию  
10.IV.1986