

УДК 532.525.2

СОУДАРЕНИЕ ДВУХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНСТАНТАМИ БЕРНУЛЛИ

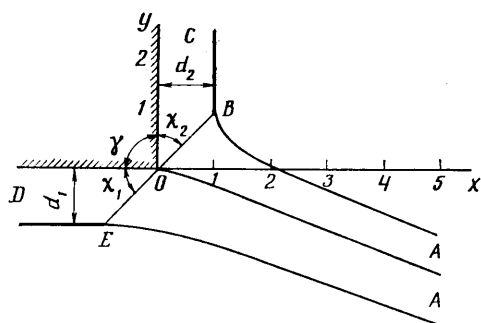
КУЗЬМИН С. В.

Рассматривается задача о соударении двух плоских струй идеальной жидкости с различными константами Бернулли в струях, вытекающих в затопленное пространство из сходящихся под углом каналов с параллельными стенками.

В [1–3] задача сведена к системе нелинейных уравнений, решение которой получено в виде формального ряда по степени малой величины ε , равной отношению полных скоростных напоров соударяющихся струй. Вычислены нулевое и первое приближения неизвестной функции, а для угла отклонения струй – также и второе приближение.

Здесь нелинейная задача о соударении двух струй решается в точной математической постановке [4]. Приводятся результаты расчетов для различных величин геометрических параметров задачи во всем диапазоне изменения числа Бернулли Be , равного отношению разности констант Бернулли струй к скоростному напору одной из них.

1. Из канала (фиг. 1) шириной d_1 со стенками DO и DE , параллельными оси x , через срез OE в затопленное пространство вытекает струя жидкости с константой Бернулли B_1 . Из канала шириной d_2 , образованного параллельными стенками CB и CO , наклоненными под углом $0 < \gamma < \pi$ к стенкам горизонтального канала, через срез OB в затопленное пространство вытекает струя жидкости с константой Бернулли $B_2 < B_1$. При-



Фиг. 1

нято, что две струи с различными константами Бернулли встречаются в угловой точке O . При $B_1 > B_2$ линия тока OA , разделяющая струи, является линией тангенциального разрыва скорости, точка O – критическая точка в течении с меньшей константой Бернулли, линия тангенциального разрыва скорости в точке O имеет горизонтальную касательную.

Задача плоская. Течение установившееся и безвихревое. Жидкость идеальная, несжимаемая, невязкая и одинаковой плотности в струях.

Конформно отобразим области течений z_1 и z_2 с константами Бернулли B_1 и B_2 соответственно на верхние полуплоскости параметрического переменного t_1 и t_2 .

Рассмотрим функции Жуковского

$$f_j(t_j) = \ln U_{j\infty} \left(\frac{dF_j}{dz_j} \right)^{-1} = \ln \frac{U_{j\infty}}{U_j} + i\theta_j = u_j(t_j) + iv_j(t_j), \quad j=1, 2$$

Здесь $dF_j/dz_j = U_j e^{-i\theta_j}$ – комплексная скорость; U_j и θ_j – модуль и угол

наклона вектора скорости с осью x ; $U_{1\infty}$ и $U_{2\infty}$ — модули скорости на свободных линиях тока EA и BA . Величины $U_{1\infty}$ и $U_{2\infty}$ определяются константами Бернулли в струях и давлением в затопленном пространстве.

Действительная и мнимая части функции Жуковского $f_1(t_1)$ равны нулю соответственно на ODE и EA , а на линии OA тангенциального разрыва скорости — неизвестные непрерывные функции. Зададим соответствие трех точек области течения z_1 (E, A, O) трем точкам действительной оси η_1 ($\eta_E = -3, \eta_A = -1, \eta_O = 1$). Бесконечно удаленной точке D канала струйного устройства соответствует некоторая точка $\eta_D < -3, \eta_D > 1$.

На отрезке $[-1, 1]$, соответствующем линии AO , за известное примем действительную часть функции $f_1(t_1)$. Тогда в верхней полуплоскости t_1 решение смешанной краевой задачи Гильберта ($v_1(\eta_1) = 0$ при $\eta_1 < -3, \eta_1 > 1; u_1(\eta_1) = 0$ при $\eta_1 \in [-3, -1]; u_1(\eta_1)$ — непрерывная при $\eta_1 \in [-1, 1]$) определится следующим интегралом Келдыша — Седова:

$$f_1(t_1) = \frac{\sqrt{(t_1+3)(t_1-1)}}{i\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\mu_1)}{\sqrt{(\mu_1+3)(\mu_1-1)} \mu_1 - t_1} d\mu_1 \quad (1.1)$$

Действительная и мнимая части функции Жуковского $f_2(t_2)$ равны нулю и $-\gamma$ соответственно на AB и BCO . На линии OA действительная и мнимая части $f_2(t_2)$ неизвестны и в точке O терпят разрыв соответственно второго и первого рода. Зададим соответствие трех точек области течения z_2 (O, A, B) трем точкам действительной оси η_2 ($\eta_O = -1, \eta_A = 1, \eta_B = 3$). Бесконечно удаленной точке C канала струйного устройства соответствует точка $\eta_C < -1, \eta_C > 3$.

Введем безразмерный параметр — число Бернулли $Be = 2(B_1 - B_2) / \rho U_{2\infty}^2$, $0 < Be < \infty$. При $Be = \infty$ течение z_1 ограничено линиями тока, параллельными оси x и шириной d_1 . Течение z_2 ограничено стенками канала BC и CO , свободной линией тока AB и линией тока OA , совпадающей с положительным направлением оси x . При определенном выше соответствии точек функция Жуковского $f_{21}(t_2)$, описывающая в верхней полуплоскости t_2 течение z_2 при $Be = \infty$, имеет вид

$$f_{21}(t_2) = -\frac{\gamma}{\pi} \ln \left(\frac{5-3t_2}{1+t_2} + \sqrt{\left(\frac{5-3t_2}{1+t_2} \right)^2 - 1} \right)$$

Положим

$$f_2(t_2) = f_{21}(t_2) + f_{22}(t_2) = u_{21}(t_2) + iv_{21}(t_2) + u_{22}(t_2) + iv_{22}(t_2)$$

Действительная и мнимая части функции $f_{22}(t_2) = f_2(t_2) - f_{21}(t_2)$ равны нулю соответственно на отрезках $[1, 3]$ и $\eta_2 < -1, \eta_2 > 3$, а на $[-1, 1]$ — неизвестные непрерывные функции.

Примем на $[-1, 1]$ за известное мнимую часть функции $f_{22}(t_2)$. Тогда в верхней полуплоскости t_2 решение смешанной краевой задачи Гильберта ($v_{22}(\eta_2) = 0$ при $\eta_2 < -1, \eta_2 > 3; u_{22}(\eta_2) = 0$ при $\eta_2 \in [1, 3]; v_{22}(\eta_2)$ — непрерывная при $\eta_2 \in [-1, 1]$) определится следующим интегралом Келдыша — Седова:

$$f_{22}(t_2) = \frac{\sqrt{(t_2-1)(t_2-3)}}{i\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{22}(\mu_2)}{\sqrt{(\mu_2-1)(\mu_2-3)} \mu_2 - t_2} d\mu_2 \quad (1.2)$$

Области изменения комплексных потенциалов $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ представляют собой полосы шириной, равной объемному расходу жидкости в струях Q_1 и Q_2 . Функции, отображающие верхние полуплоскости t_1 и t_2 на области изменения $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$, имеют вид

$$F_1(t_1) = \frac{Q_1}{\pi} \ln \frac{2(t_1 - \eta_D)}{(t_1 + 1)(\eta_D - 1)}, \quad F_2(t_2) = \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{2(t_2 - \eta_C)}{(t_2 - 1)(1 + \eta_C)} \quad (1.3)$$

Зная функции Жуковского $f_1(t_1)$ и $f_2(t_2)$, через параметр t по формулам

$$\frac{dF}{dz} = U_\infty e^{-f(t)}, \quad z = \frac{1}{U_\infty} \int e^{f(t)} \frac{dF}{dt} dt \quad (1.4)$$

можно рассчитать давление жидкости и геометрические элементы течений z_1 и z_2 .

Вычисляя отношение разности длин стенок к ширине каналов, в соответствии с (1.4) запишем формулы для углов среза χ_1 и χ_2 (фиг. 1) каналов струйных устройств

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \chi_1 &= \frac{e^{-u_1(\xi_D)}}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 e^{u_1(\xi_1)} \frac{d\xi_1}{\xi_1 - \xi_D}, & \xi_1 &= \frac{2}{1 + \eta_1} \\ \operatorname{ctg} \chi_2 &= \frac{e^{-u_2(\xi_C)}}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 e^{u_2(\xi_2)} \frac{d\xi_2}{\xi_2 - \xi_C}, & \xi_2 &= \frac{2}{1 - \eta_2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Формулы (1.5) выражают входящие в них параметры $\eta_D = (2 - \xi_D) / \xi_D$ и $\eta_C = (2 + \xi_C) / \xi_C$ через геометрические величины — углы срезов каналов χ_1 и χ_2 .

2. Интегралы Келдыша — Седова (1.1), (1.2) и формулы (1.3), (1.4) определяют решение уравнения Эйлера в областях течений z_1 и z_2 . Однако (1.1)–(1.4) не дают решения задачи о соударении струй, так как не учитывают взаимодействия соударяющихся струй.

Здесь рассматривается установившееся соударение двух струй. Следовательно, на границе смежных областей z_1 и z_2 , т. е. в соответственных точках линии OA тангенциального разрыва скорости, должны выполняться два условия склеивания течений с различными константами Бернулли — динамическое (равенство статических давлений) и кинематическое (равенство углов наклона вектора скорости).

Используя динамическое и кинематическое условия склеивания, запишем систему уравнений для определения функций $f_1(t_1)$ и $f_2(t_2)$, неизвестных на отрезках $[-1, 1]$, соответствующих линии OA тангенциального разрыва скорости.

Приравняем длины дуг линии OA , вычисляемые в течениях z_1 и z_2 от точки O до произвольной точки этой линии

$$\frac{d_1 e^{-u_1(\eta_D)}}{\pi} \int_{-1}^{\eta_D} e^{u_1(\mu_1)} \frac{(1 + \eta_D) d\mu_1}{(\mu_1 + 1)(\mu_1 - \eta_D)} = \frac{d_2 e^{-u_2(\eta_C)}}{\pi} \int_{-1}^{\eta_2} e^{u_2(\mu_2)} \frac{(\eta_C - 1) d\mu_2}{(\mu_2 - 1)(\mu_2 - \eta_C)} \quad (2.1)$$

В точках η_1 и η_2 , связанных уравнением (2.1), динамическое условие склеивания $P_1(\eta_1) = P_2(\eta_2)$ запишем в виде

$$u_1(\eta_1) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \text{Be}}{\text{Be} + e^{-2u_2(\eta_2)}} \quad (2.2)$$

Формула Сохоцкого — Племеля для интеграла Келдыша — Седова (1.1) на отрезке $[-1, 1]$ имеет вид

$$v_1(\eta_1) = - \frac{\sqrt{(\eta_1 + 3)(1 - \eta_1)}}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\mu_1)}{\sqrt{(\mu_1 + 3)(1 - \mu_1)}} \frac{d\mu_1}{\mu_1 - \eta_1} \quad (2.3)$$

Так как на отрезке $[-1, 1]$ $v_{21}(\eta_2) = 0$, то кинематическое условие склеивания $\theta_1(\eta_1) = \theta_2(\eta_2)$ запишется следующим образом:

$$v_2(\eta_2) = v_{22}(\eta_2) = v_1(\eta_1) \quad (2.4)$$

И наконец, формула Сохоцкого — Племеля для интеграла Келдыша — Седова (1.2) на отрезке $[-1, 1]$ имеет вид

$$u_{22}(\eta_2) = \frac{\sqrt{(1-\eta_2)(3-\eta_2)}}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{v_{22}(\mu_2)}{\sqrt{(1-\mu_2)(3-\mu_2)}} \frac{d\mu_2}{\mu_2 - \eta_2} \quad (2.5)$$

Формулы (1.5) и уравнения (2.1)–(2.5) составляют систему уравнений задачи о соударении двух плоских струй идеальной жидкости с различными константами Бернулли. При заданной геометрии струйных каналов $0 < \gamma < \pi$, $0 < \chi_1 < \pi$, $0 < \chi_2 < \pi$, $d = d_2/d_1 < \infty$ решение прямой задачи определяется одним параметром — числом Бернулли Be .

3. Для решения системы уравнений (1.5), (2.1)–(2.5) использовался метод последовательных приближений [4] и метод непрерывного продолжения решения. При некотором $Be > 0$ и фиксированной геометрии струйных каналов сходящийся процесс последовательных приближений строился так, чтобы на каждом приближении система (2.1)–(2.5) решалась в порядке записи. Полученные при $Be = Be_1$ численные решения для функций $f_1(\eta_1)$ и $f_{22}(\eta_2)$ использовались в качестве начального приближения для этих функций при $Be = Be_2 \neq Be_1$.

Численное интегрирование интегралов, входящих в (2.1), (2.3), (2.5), осуществлялось в предположении, что всюду на отрезках $[-1, 1]$, включая концы отрезков, функции $f_1(\eta_1)$ и $f_{22}(\eta_2)$ удовлетворяют условию Гельдера. Предположение следует из анализа возможного поведения функций Жуковского вблизи точки O и аналитического решения задачи при одинаковых константах Бернулли в струях ($Be = 0$).

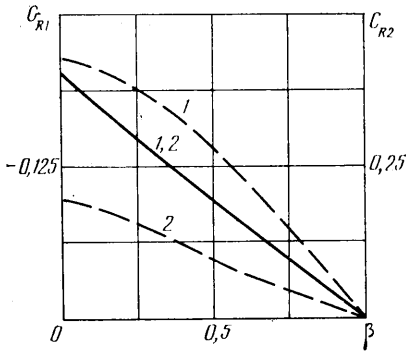
На фиг. 1 вблизи срезов сопел каналов струйных устройств показаны формы границ двух струй при $Be = 1$, $\gamma = 90^\circ$, $\chi_1 = \chi_2 = 45^\circ$, $d = 1$ ($x = x/d_1$, $y = y/d_1$). На расстоянии 2–3 калибров ширины горизонтального канала происходит выравнивание течений в струях. С увеличением отношения ширин каналов $d = d_2/d_1$ этот эффект проявляется на все больших расстояниях от срезов сопел. При $d = \infty$ ($d_1 < \infty$, $d_2 = \infty$) выравнивание течения в горизонтальной струе происходит в бесконечно удаленной точке A . Причем при $d = \infty$ угол отклонения горизонтальной струи θ_∞ в точке A не зависит от числа Бернулли Be и равен $\theta_\infty = -\gamma$. Численное решение задачи при $d = \infty$ получено в [6].

Выберем в каждой струе жидкие контуры так, чтобы они совпадали со стенками каналов, свободными линиями тока и линией тангенциального разрыва скорости. Замкнем контуры линиями, перпендикулярными вектору скорости в бесконечно удаленных точках A , C , D . При отсутствии массовых сил совокупность гидродинамических давлений, приложенных к выбранным контурам, эквивалентна в случае установившегося движения жидкости разности количества движения жидкости, втекающей и вытекающей через линии, перпендикулярные вектору скорости в бесконечно удаленных точках струй. Из этого равенства нетрудно получить формулу для угла отклонения θ_∞ результирующей струи в точке A

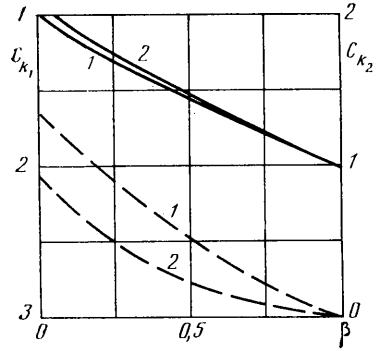
$$\text{tg } \theta_\infty = \frac{C_{R1} + C_{R2} \cos \gamma - (C_{P2} + C_{R2}) \sin \gamma}{C_{P1} + C_{R1} + C_{R2} \sin \gamma + (C_{P2} + C_{R2}) \cos \gamma}$$

Здесь C_{R1} и C_{R2} — коэффициенты гидродинамической реакции стенок каналов струйных устройств; C_{P1} , C_{R1} , C_{P2} , C_{R2} — коэффициенты давления и импульса струй в бесконечно удаленных точках D , C каналов струйных устройств.

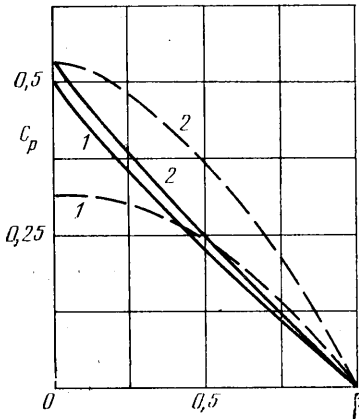
На фиг. 2–5 при фиксированных значениях величин $\gamma = 60^\circ$, $d = 1$, $\chi_1 = 90^\circ$ и значениях $\chi_2 = 60^\circ, 90^\circ$ (кривые 1, 2) приведены коэффициенты гидродинамической реакции стенок каналов, давления, импульса струй и угла отклонения результирующей струи θ_∞ во всем диапазоне изменения числа Бернулли $0 < Be < \infty$ ($\beta = Be/(1+Be)$). Зависимость коэффициентов



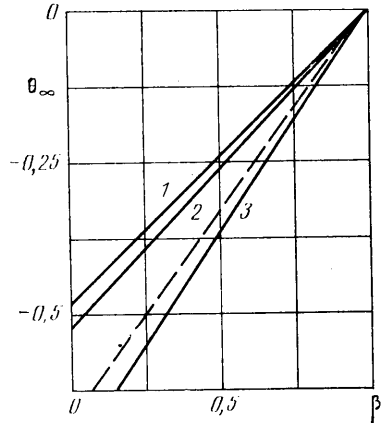
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

C_{R1} , C_{P1} , C_{K1} и угла отклонения результирующей струи θ_∞ (сплошные линии) имеет линейный характер. Причем величины этих коэффициентов и угла отклонения θ_∞ слабо зависят от величины угла χ_2 . На фиг. 5 при $\gamma=90^\circ$, $d=1$, $\chi_1=75,96^\circ$, $\chi_2=71,53^\circ$ приведено сравнение результатов расчета для угла отклонения θ_∞ (кривая 3, сплошная линия) с результатами расчета, полученными в [1], где угол отклонения θ_∞ (штриховая линия) определялся по теореме о сохранении количества движения с введением поправочного коэффициента для учета влияния гидродинамической реакции стенок каналов струйных устройств. Приближенный метод [1] дает хорошие результаты для угла отклонения результирующей струи в диапазоне изменения числа Бернулли $0,5 < Be < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский П. М. Задача о столкновении двух струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками при разных скоростях на свободных поверхностях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 6. С. 177–181.
2. Белоцерковский П. М. Нелинейная задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости с разрывом течения на границе между струями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 114–123.
3. Белоцерковский П. М. К задаче о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 154–157.
4. Шурьгин В. М. Аэродинамика тел со струями. М.: Машиностроение, 1977. 199 с.
5. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16. № 1. С. 7–10.
6. Кузьмин С. В. Обтекание плоской стенки со струей при различных числах Бернулли // Уч. зап. ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 6. С. 104–111.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1986