

УДК 632.516.013.4

## О ГАШЕНИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

ЭФРЕМОВ О. А., РЫЖОВ О. С., ТЕРЕНТЬЕВ Е. Д.

Рассматривается излучение волн Толлмина — Шлихтинга вибратором, который установлен на пластинке, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью. Показано, что, изменяя форму мембраны, работающей на закритической частоте, можно не только существенно уменьшить амплитуду вынужденных колебаний, но и добиться их полного вырождения. Эта возможность открывает путь к гашению уже сформировавшейся волны Толлмина — Шлихтинга вибратором со специально подобранными параметрами. Такого рода устройство позволяет подавлять возмущения в ламинарном пограничном слое и затягивать его переход в турбулентный.

1. Рассмотрим пограничный слой на пластинке в потоке несжимаемой жидкости. Пусть на некотором расстоянии от ее края установлен вибратор, который работает на закритической частоте и, следовательно, способен возбуждать колебания, экспоненциально нарастающие с расстоянием вниз по течению. Чтобы упростить математический анализ процесса излучения волн Толлмина — Шлихтинга, с самого начала положим число Рейнольдса  $R \rightarrow \infty$  и воспользуемся хорошо развитым аппаратом теории свободного взаимодействия пограничного слоя. Эта теория была предложена для объяснения причин стационарного отрыва потока с поверхности обтекаемого тела [1–3], а затем нашла применение в исследовании устойчивости вязких течений [4, 5]. Как выяснилось недавно [6], оба явления допускают единую математическую трактовку.

Отсчет времени  $t$ , пространственных координат  $x$  и  $y$ , составляющих  $u'$  и  $v'$  вектора возмущенной скорости и давления  $p'$  будем производить в указанной в [7] специальной безразмерной системе единиц. Частоту и размеры источника колебаний зададим таким образом, чтобы они оказались конечными в выбранной системе. При этом условии процесс излучения волн Толлмина — Шлихтинга подчиняется линеаризованным уравнениям Прандтля, где самоиндуцированное давление  $p' = p'(t, x)$  удовлетворяет дополнительному соотношению и подлежит определению вместе с полем скоростей течения

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + y \frac{\partial u'}{\partial x} + v' = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

$$u' \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p'(t, x_2)}{x_2 - x_1} dx_2 \quad (y \rightarrow \infty)$$

В качестве предельных условий на входе в пограничный слой имеем

$$u' \rightarrow y, \quad p' \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (1.2)$$

Закон движения вибратора возьмем в виде  $y = y_w = f(x) \sin \omega_0 t$  с функцией  $f$ , отличной от нуля в интервале  $0 < x < a$ . Тогда условие прилипания

жидкости в колеблющейся мембране запишется как

$$u' = -f(x) \sin \omega_0 t, \quad v' = \omega_0 f(x) \cos \omega_0 t \quad (y=0) \quad (1.3)$$

Решение сформулированной краевой задачи существенно зависит от того, какова частота  $\omega_0$  источника по сравнению с критической частотой  $\omega_* = 2,298$  нейтральных возмущений. Если  $\omega_0 < \omega_*$ , то после выделения гармонической зависимости от времени искомые функции можно разложить в интегралы Фурье по продольной координате  $x$ , которые понимаются в классическом смысле. При  $\omega_0 = \omega_*$  допустимо использовать ту же операцию, но преобразование Фурье следует рассматривать в пространстве обобщенных функций, так как амплитуда возмущений остается постоянной вдоль длины пластинки. Когда  $\omega_0 > \omega_*$ , решение задачи (1.1) — (1.3) должно экспоненциально нарастать по  $x$ , поэтому интегралы Фурье перестают существовать даже в пространстве обобщенных функций.

Чтобы обеспечить построение единственного решения в последнем случае, в [8] был выдвинут постулат, согласно которому составляющие вектора скорости частиц и давление в каждый фиксированный момент времени и в каждой заданной точке пространства должны быть непрерывными функциями параметров, включая  $\omega_0$ . Строгое обоснование указанного постулата получил в [9], где решалась более общая задача с начальными данными о запуске вибратора, включенного в некоторый момент времени. Для дальнейшего важно, что решение из [8, 9] принимает вид волны Толлмина — Шлихтинга [10] с частотой  $\omega_0$  уже на таком расстоянии вниз по потоку от вибратора, которое сравнимо с длиной этой волны.

2. Множество волновых чисел  $k$  в свободных колебаниях вязкой жидкости связано с  $\omega_0$  следующим дисперсионным соотношением, где  $Ai(Z)$  — функция Эйри:

$$F(\Omega_0, k) = \Phi(\Omega_0) - Q(k) = 0, \quad \Omega_0 = i^{1/2} \omega_0 k^{-2/3} \quad (2.1)$$

$$\Phi = \frac{dAi(\Omega_0)}{d\Omega} I^{-1}(\Omega_0), \quad I = \int_{\Omega_0}^{\infty} Ai(Z) dZ, \quad Q = i^{1/2} k^{1/2} |k|$$

Его корень  $k = k_0(\omega_0)$ , траектория которого изображена на фиг. 1, играет основную роль в анализе излучаемых источником возмущений. Определим функции  $H(\Omega_0, k)$ ,  $B(\Omega_0, k)$  посредством соотношений

$$H = F(\Omega_0, k) I(\Omega_0) = \frac{dAi(\Omega_0)}{d\Omega} - i^{1/2} k^{1/2} |k| I(\Omega_0) \quad (2.2)$$

$$B = \pi |k| \frac{dAi(\Omega_0)}{d\Omega} \left[ \frac{\partial H(\Omega_0, k)}{\partial \Omega} \frac{d\Omega_0}{dk} + \frac{\partial H(\Omega_0, k)}{\partial k} \right]^{-1} \quad (2.3)$$

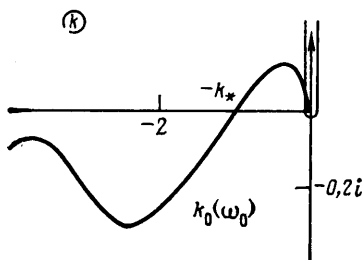
Обозначим через  $f^*(k)$  преобразование Фурье амплитуды  $f(x)$  колеблющейся мембраны. Тогда изменение избыточного давления в волне Толлмина — Шлихтинга задается формулой [8, 9]

$$p' = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \{ f^* [k_0(\omega_0)] B[\Omega_0(\omega_0), k_0(\omega_0)] e^{i[\omega_0 t + k_0(\omega_0) x]} \} \quad (2.4)$$

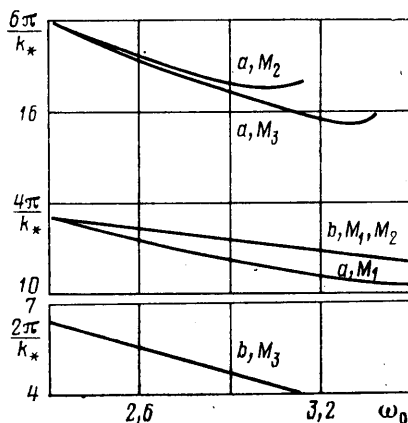
Частота  $\omega_0$  вынужденных колебаний изменяется монотонно вдоль кривой  $k_0$ . Ее расположение в левой полуплоскости объясняется тем, что построение основывалось на предположении  $\omega_0 > 0$  (продолжение  $k_0$  в правую полуплоскость при  $\omega_0 < 0$  достигается зеркальным отражением относительно оси  $\operatorname{Re} k = 0$ ). Для точек кривой  $k_0$ , несущих значения  $\omega_0 < \omega_*$ , имеем  $\operatorname{Im} k_0 > 0$ , поэтому решение (2.4) описывает волну Толлмина — Шлихтинга с затухающей вниз по потоку амплитудой. Если  $\omega_0 = \omega_*$ , получаются нейтральные возмущения с  $\operatorname{Im} k_0 = 0$  и  $\operatorname{Re} k_0 = -k_* = -1,0005$  и их амплитуда постоянна вдоль длины пластинки. Точки кривой  $k_0$  со значениями  $\omega_0 > \omega_*$  удовлетворяют условию  $\operatorname{Im} k_0 < 0$ , в этом случае решение (2.4) дает волну

Толлмина – Шлихтинга с амплитудой, нарастающей позади вибратора по экспоненциальному закону.

При изучении свободных колебаний в пограничном слое, для которых вектор возмущенной скорости удовлетворяет однородным краевым условиям на пластинке, коэффициент при  $\exp[i\omega_0 t + ik_0(\omega_0)x]$  может быть выбран произвольно. Напротив, в решении (2.4) произведение  $f^*B$  зависит от общих свойств течения, от частоты  $\omega_0$  источника и его формы, определяющей фурье-образ  $f^*$ . Что касается функции  $B$ , то она стандартна; заменив  $|k|$  на  $-k_0$  в дисперсионном соотношении (2.1) и формуле (2.2)



Фиг. 1



Фиг. 2

для  $H$  и подставив результат дифференцирования последней в (2.3), получим [12]

$$B = \frac{3\pi}{2} k_0^{3/2}(\omega_0) \frac{d\text{Ai}[\Omega_0(\omega_0)]}{d\Omega} \left\{ 2I[\Omega_0(\omega_0)] + \right. \\ \left. + \Omega_0(\omega_0) \left[ 1 - \frac{\omega_0}{k_0^2(\omega_0)} \right] \text{Ai}[\Omega_0(\omega_0)] \right\}^{-1}$$

Как показывает несложный асимптотический анализ, дополненный прямыми вычислениями на ЭВМ, вдоль кривой  $k_0$  функция  $B$  может обращаться либо в нуль, либо в бесконечность только в двух точках:  $k_0=0$  и  $\infty$ . Первая из них соответствует стационарному состоянию с  $\omega_0=0$ , вторая достигается при частоте колебаний источника  $\omega_0=\infty$ . Таким образом, вопрос о нахождении формы вибратора, не излучающего волны Толлмина – Шлихтинга на фиксированной частоте  $\omega_0$ , сводится к равенству

$$f^*[k_0(\omega_0)] = 0 \quad (2.5)$$

Чтобы проиллюстрировать существование у него множества нетривиальных решений, рассмотрим сначала простейший пример, задав форму мембраны треугольной:  $f(x)=2x$  при  $0 \leq x \leq b$ ,  $2b(a-x)/(a-b)$  при  $b \leq x \leq a$ , что и определит явный вид функции  $f^*(k)$ . Из равенства (2.5) получим

$$ae^{-ibk_0(\omega_0)} - be^{-iak_0(\omega_0)} = a - b \quad (2.6)$$

Для критической частоты  $\omega_0 = \omega_*$  явные формулы

$$a = \frac{2\pi(n_1 + n_2)}{k_*}, \quad b = \frac{2\pi n_2}{k_*}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

удовлетворяют (2.6). Выбор  $n_1 = n_2 = 1$  дает мембрану в виде равнобедренного треугольника с основанием, равным двум длинам нейтральной волны Толлмина – Шлихтинга. При работе такого вибратора в критическом режиме возбуждаемые им колебания затухают вниз по потоку, но на закритических частотах  $\omega_0 > \omega_*$  он, разумеется, излучает волны Толлмина – Шлихтинга с экспоненциально нарастающей амплитудой. Общий вывод из (2.7) состоит в том, что для критической частоты  $\omega_0 = \omega_*$  имеется счетный набор базисных параметров  $a$  и  $b$ , которые позволяют сконструировать

ровать устройства, не вносящие нейтральных возмущений в пограничный слой на пластинке во время своей работы.

Если частота колебаний мембраны треугольной формы произвольна, решения уравнения (2.6) образуют в пространстве параметров  $\omega_0$ ,  $a$ ,  $b$  счетное множество траекторий. Фиксируем первые три из них условиями, чтобы они проходили через точки  $M_1(\omega_*, 4\pi/k_*, 2\pi/k_*)$ ,  $M_2(\omega_*, 6\pi/k_*, 2\pi/k_*)$  и  $M_3(\omega_*, 6\pi/k_*, 4\pi/k_*)$  соответственно. Результаты расчетов этих траекторий представлены на фиг. 2 в виде зависимостей  $a$  и  $b$  от  $\omega_0$ .

3. Обратимся к общему случаю, когда форма мембраны в уравнении (1.4) задана функцией  $f(x)$ . Пусть  $k_0 = -\alpha_0(\omega_0) + i\beta_0(\omega_0)$ . Равенство (2.5) выражает требование

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\beta_0(\omega_0)x} e^{i\alpha_0(\omega_0)x} dx = 0 \quad (3.1)$$

чтобы вибратор не излучал волны Толлмина — Шлихтинга на фиксированной частоте  $\omega_0$ . Однако при смене режима и переходе на другие частоты тот же самый вибратор будет вносить в пограничный слой возмущения, экспоненциально растущие по координате  $x$ .

Как ясно из разобранный выше примера, равенство (3.1) обладает континуумом решений, поскольку оно налагает лишь весьма слабые ограничения на  $f$ . Действительно, его можно трактовать как условие обращения в нуль преобразования Фурье в точке  $-\alpha_0(\omega_0)$  функции  $f(x) \times \exp[\beta_0(\omega_0)x]$ , зависящей не только от формы мембраны, но и от общих свойств течения через  $\beta_0(\omega_0)$ . Вспомогая, что, по предположению, функция  $f$  отлична от нуля лишь в интервале  $0 < x < a$ , дадим несколько иную формулировку требования, обеспечивающего затухание колебаний вниз по потоку от вибратора. С этой целью возьмем наименьшее целое положительное число  $m$ , для которого отрезок  $l = 2\pi m / \alpha_0 \geq a$  ( $m=1$  при  $2\pi / \alpha_0 \geq a$ ), и запишем комплексное соотношение (3.1) в виде двух действительных равенств

$$\int_0^l f(x) e^{\beta_0(\omega_0)x} \cos \alpha_0(\omega_0)x dx = 0, \quad \int_0^l f(x) e^{\beta_0(\omega_0)x} \sin \alpha_0(\omega_0)x dx = 0 \quad (3.2)$$

Разложим подынтегральную функцию из (3.1) в ряд Фурье

$$f(x) e^{\beta_0(\omega_0)x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{l} \right) \quad (3.3)$$

на промежутке  $0 \leq x < l$ . Следовательно, равенства (3.2) являются условиями одновременного обращения в нуль коэффициентов Фурье  $a_m$  и  $b_m$ .

Пусть теперь имеется вибратор с заданным профилем  $f_0$ , совершающий гармонические колебания на частоте  $\omega_0 > \omega_*$ . Естественно считать, что коэффициенты Фурье  $a_m^{(0)}$ ,  $b_m^{(0)}$  из (3.3) с функцией  $f_0$  в левой части отличны от нуля, в силу чего происходит излучение волны Толлмина — Шлихтинга, сопровождающееся ростом ее амплитуды в пограничном слое. Поставим вопрос: какие деформации мембраны ведут к прекращению излучения самораскачивающихся возмущений? Из предыдущего ясно, что существует бесчисленное множество способов достичь требуемого результата даже при неизменной протяженности источника. В самом деле, выберем две любые финитные функции  $f_1$  и  $f_2$ , отличные от нуля в интервале  $0 < x < a$ . Будучи умноженными на  $\exp[\beta_0(\omega_0)x]$ , они разлагаются в ряды Фурье вида (3.3). Обозначим через  $a_m^{(1)}$ ,  $b_m^{(1)}$  и  $a_m^{(2)}$ ,  $b_m^{(2)}$  соответствующие этим функциям коэффициенты Фурье с номером  $m$ . Подчиним де-

формацию исходного профиля  $f_0$  правилу

$$f = f_0(x) + C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \quad (3.4)$$

Если постоянные  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$a_m^{(0)} + C_1 a_m^{(1)} + C_2 a_m^{(2)} = 0, \quad b_m^{(0)} + C_1 b_m^{(1)} + C_2 b_m^{(2)} = 0 \quad (3.5)$$

такая деформация дает новый профиль  $f$ , не испускающий волны Толлмина — Шлихтинга в режиме колебаний с частотой  $\omega_0$ .

В качестве иллюстрации сформулированного правила деформации приведем пример, в котором базисные функции  $f_1$  и  $f_2$  построены на отрезке  $0 \leq x \leq a$  при помощи двух гармоник из ряда (3.3) с номерами  $\lambda$  и  $\nu$

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{-\beta_0(\omega_0)x} \left( \sin \frac{2\pi m x}{l} + A_\lambda \sin \frac{2\pi \lambda x}{l} \right), \\ f_2 &= e^{-\beta_0(\omega_0)x} \left( \sin \frac{2\pi m x}{l} + B_\nu \sin \frac{2\pi \nu x}{l} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} A_\lambda &= -\frac{\sin \beta_m}{\sin \beta_\lambda}, \quad B_\nu = -\frac{\sin \beta_m}{\sin \beta_\nu}, \quad \beta_m = \frac{2\pi m a}{l}, \\ \beta_\lambda &= \frac{2\pi \lambda a}{l}, \quad \beta_\nu = \frac{2\pi \nu a}{l} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Связь (3.7) обеспечивает обращение в нуль обеих функций в конечных точках отрезка. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , согласно (3.5), определяются как

$$C_1 = \frac{-a_m^{(0)} G_2(\beta_\nu) + b_m^{(0)} G_1(\beta_\nu)}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{a_m^{(0)} G_2(\beta_\lambda) - b_m^{(0)} G_1(\beta_\lambda)}{\Delta} \quad (3.8)$$

$$G_1(\beta_\lambda) = \frac{a \sin \beta_m}{\beta_m^2 - \beta_\lambda^2} \left[ -\frac{\beta_m^2 + \beta_\nu^2}{2\beta_m} \sin \beta_m + \beta_\lambda \frac{1 - \cos \beta_m \cos \beta_\lambda}{\sin \beta_\lambda} \right]$$

$$G_2(\beta_\lambda) = \frac{a}{2} + \frac{a \sin \beta_m}{\beta_m^2 - \beta_\lambda^2} \left[ \frac{\beta_\lambda^2 + \beta_m^2}{2\beta_m} \cos \beta_m - \beta_\lambda \frac{\sin \beta_m \cos \beta_\lambda}{\sin \beta_\lambda} \right]$$

$$\Delta = G_1(\beta_\lambda) G_2(\beta_\nu) - G_1(\beta_\nu) G_2(\beta_\lambda)$$

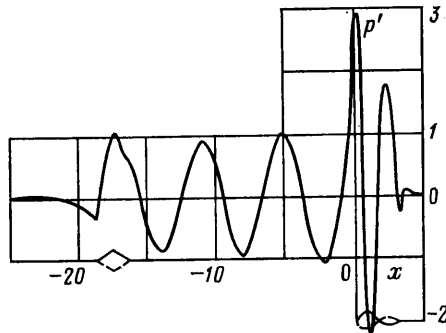
4. До сих пор рассматривались способы, которые приводят к подавлению волны Толлмина — Шлихтинга, излучаемой вибратором заданной формы. Для практических приложений основной интерес представляет, однако, выработка методов гашения уже распространяющихся в пограничном слое самораскачивающихся колебаний вне зависимости от причин, их породивших. Вид источника возмущений, как правило, определить вообще невозможно.

Чтобы получить параметры волнового движения, необходимо поместить на поверхности пластинки прибор, позволяющий проводить частотный анализ колебаний и одновременно измерять их амплитуду вместе с фазой. Предположим, что в некотором месте пограничного слоя, принимаемом за начало отсчета  $x=0$ , все три величины установлены при помощи такого прибора. Свяжем с ним мембрану, назначение которой состоит в подавлении приходящей волны Толлмина — Шлихтинга.

Заметим теперь, что точный вид вибратора  $f_0$ , излучающего волну Толлмина — Шлихтинга на частоте  $\omega_0$ , фактически не играл никакой роли во всех изложенных выше рассуждениях. Обращая их, будем понимать под  $f_0$  в сумме (3.4) профиль любого фиктивного источника, позади которого

параметры волны равнялись бы параметрам, измеренным прибором. Не представляет труда рассчитать характеристики такого рода источника, имея в распоряжении, как и прежде, две произвольные базисные функции  $f_1$  и  $f_2$ . Их можно определить, например, формулами (3.6)–(3.8). Будем трактовать систему линейных алгебраических уравнений (3.5) для вычисления коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в качестве условий, фиксирующих амплитуду и форму мембраны, которая колеблется с частотой  $f_0$  в противофазе с фиктивным источником  $f_0$ . Испускаемая ею волна Толлмина – Шлихтинга компенсирует, очевидно, приходящую в сечение  $x=0$ , поскольку фазы обеих волн различаются на  $\pi$ .

На фиг. 3 изображено распределение давления в волне Толлмина – Шлихтинга, которую испускает на частоте  $\omega_0=2,5$  вибратор в форме рав-



Фиг. 3

нобедренного треугольника, имеющего основание и высоту, равные 2 и 2 соответственно, в моменты времени  $t=0,18+2\pi N/\omega_0$  ( $N=1, 2, \dots$ ). На принятом за 19 расстояний от начала этого вибратора расположена мембрана с параметрами  $m=1$ ,  $\lambda=2$ ,  $\nu=3$ ,  $l=5,89$ , амплитуда и фаза ее колебаний рассчитаны по указанному выше рецепту. Проведенные вычисления для фиктивного источника с основанием  $a=3$ , фаза колебаний которого отличалась от фазы колебаний треугольного вибратора на  $\varphi=4,74$ , дали следующие результаты:

$$a_1^{(0)}=0,295; \quad b_1^{(0)}=0,837; \quad C_1=-1,51; \quad C_2=1,86$$

Обсуждаемое устройство позволяет подавлять самораскачивающиеся возмущения в ламинарном пограничном слое и затягивать его переход в турбулентный. Конечно, в рамках теории свободного взаимодействия полученные выводы имеют силу только при числе Рейнольдса  $R \rightarrow \infty$ . Однако нет сомнений, что они останутся справедливыми для любых закритических значений  $R$ . В принципиальном отношении метод расчета параметров гасящей мембраны также не изменится. Имеющиеся экспериментальные данные [13–15] позволяют оптимистически оценить практические возможности создать устройство, способное препятствовать развитию волны Толлмина – Шлихтинга с экспоненциально нарастающей амплитудой. Реализация такого рода устройства открыла бы путь к проектированию аэродинамических форм с ламинаризованным пограничным слоем на их поверхности.

Предложенный способ воздействия на возмущения в пограничном слое с полным подавлением последних приводит к регуляторам, не обладающим свойством «грубости», т. е. к таким регуляторам, сколь угодно малое изменение параметров которых не сохраняет способность вибратора полностью гасить колебания. При незначительном отличии параметров

вибратора от расчетных можно лишь заметно уменьшить амплитуду колебаний, но не обратить ее в нуль. Поэтому предложенный способ регулирования лишь замедляет раскачку колебаний, смещая тем самым зону перехода ламинарного потока в турбулентный вниз по пластине, что уменьшает сопротивление рассматриваемого участка пластины.

Авторы благодарны рецензенту В. А. Бучину за полезное замечание, высказанное в процессе подготовки статьи к печати.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 125 с.
2. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. — In: Advances in Appl. Mech. V. 14. N. Y.: Acad. Press. 1974. P. 145–239.
3. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи мех. 1979. Т. 2. № 4. С. 57–95.
4. Smith F. T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.
5. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
6. Ryzhov O. S. Stability and separation of viscous flows // In: Laminar-Turbulent Transition, IUTAM Symp. Novosibirsk 1984. Berlin: Springer. 1985. P. 337–347.
7. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, с. 1007–1023.
8. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах // ПМТФ. 1982. № 4. С. 65–72.
9. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264–272.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
11. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure // J. Mécanique. 1980. V. 19. № 3. P. 561–580.
12. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049–1055.
13. Thomas A. S. W. The control of boundary-layer transition using a wave-superposition principle // J. Fluid Mech. 1983. V. 137. P. 233–250.
14. Gedney C. J. The cancellation of a sound-excited Tollmien – Schlichting wave with plate vibration // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 5. P. 1158–1160.
15. Гилев В. М., Козлов В. В. Влияние периодического вдува-отсоса на процесс перехода в пограничном слое. Препринт № 1–85. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985.

Москва

Поступила в редакцию  
2.IV.1986.