

рассмотрение ограниченных течений (по крайней мере при $v=0$ и $\Omega=\Omega_0\varphi(t)$, где Ω_0 — постоянный вектор, $\varphi(t)$ — функция времени) не меняет сути дела. Пример вращающегося течения (4) показывает, как надо изменить постановку задачи, чтобы параметрическая неустойчивость имела место.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
2. Калинин В. А., Нестеров С. В., Секерж-Зенькович С. Я., Чайковский А. А. Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных волн. Препринт № 243. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1985.
3. Секерж-Зенькович С. Я. Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1089–1091.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. Владимиров В. А. Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1981. № 6. С. 168–174.
6. Смирнов Е. М., Юркин С. В. О течении жидкости по вращающемуся каналу поперечного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 24–30.
7. Кузьминский А. В., Смирнов Е. М., Юркин С. В. Продольно ориентированные ячеистые структуры типа вихрей Тейлора – Гертлера на стороне повышенного давления вращающихся каналов // ПМТФ. 1983. № 6. С. 129–134.
8. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
9. Владимиров В. А. О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения. — ПМТФ, 1985, № 3, с. 58–68.
10. Владимиров В. А. Пример эквивалентности эффектов плотностной стратификации и вращения. — Докл. АН СССР, 1985, т. 284, № 2, с. 310–313.
11. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
12. Владимиров В. А. Вариационный принцип и априорная оценка устойчивости для состояний покоя непрерывно стратифицированной жидкости. — В сб.: Динамика неоднородных жидкостей (Динамика сплошной среды. Вып. 72). Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985.
13. Владимиров В. А. Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости. — ПМТФ, 1986, № 3.
14. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1962. 343 с.
15. Абрамовиц М., Липман Д., Мак Ниш А. и др. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
16. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. — ЖЭТФ, 1951, т. 21, № 5, с. 588–597.
17. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрической неустойчивости твердого вращения жидкости. — ПММ, 1964, т. 28, № 5, с. 829–834.
18. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.II.1986

УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ РАДИАЛЬНОГО ПОТОКА МАССЫ НА МОМЕНТ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВРАЩАЮЩУЮСЯ В ВЯЗКОМ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ГАЗЕ СФЕРИЧЕСКУЮ ЧАСТИЦУ

ГОЛОВИН А. М., РОГОВОЙ А. Ф.

Рассматривается стационарное осесимметричное течение газа в окрестности сферы радиуса a , вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω . С поверхности сферы осуществляется вдув в радиальном направлении со скоростью w_a , а вдали от сферы газ покоится. Предполагается, что температура T_a на поверхности сферы отлична от температуры T_∞ вдали от нее. Движение и распределение температуры газа описываются уравнениями Навье – Стокса, непрерывности и теплопроводности.

которые, как известно [1], можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla \left[p - \left(\frac{1}{3} \mu + \xi \right) \operatorname{div} \mathbf{V} \right] + \mu \Delta \mathbf{V} + \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \mu) + \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \nabla \mu] - \mathbf{V} \Delta \mu$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \rho c_p (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \operatorname{div}(\kappa \nabla T).$$

Граничные условия

$$\mathbf{V} = a[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}] + w_a \mathbf{n}, \quad T = T_a, \quad r = a$$

$$\mathbf{V} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь $\mathbf{v}$, p , μ , ξ , c_p , T , κ — скорость, давление, динамическая вязкость, второй коэффициент вязкости, теплоемкость при постоянном давлении, температура и коэффициент теплопроводности газа соответственно, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности сферы. Здесь и далее индексами a и ∞ отмечены значения величин на поверхности сферы и вдали от нее.

Следуя, например, [1], принимаем

$$\frac{\mu}{\mu_a} = \frac{\kappa}{\kappa_a} = \frac{\rho_a}{\rho} = \frac{T}{T_a} = \tau, \quad c_p = c_{pa}$$

Введем обозначения

$$R = \frac{aw_a}{\nu_a}, \quad R_\omega = \frac{a^2 \Omega}{\nu_a}, \quad v_r = \frac{w_a \tau}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{w_a \tau}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\phi = \frac{a \Omega \Phi}{r \sin \theta}$$

Здесь τ — безразмерная температура газа, v_r , v_θ , v_ϕ — компоненты скорости $\mathbf{v}$ газа в сферической системе координат, R , R_ω — числа Рейнольдса по скоростям вдува и вращения соответственно.

Будем считать, что $R \approx 1$, $R_\omega \ll 1$.

Используя главный член разложения функции тока $\psi(r, \theta) = 1 - \cos \theta$ по параметру $R_\omega^2/R \ll 1$, для определения функции $\Phi(r, \theta)$ в первом приближении можно записать следующее уравнение:

$$\frac{R}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \tau D^2 \Phi + \frac{d\tau}{dr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2\Phi}{r} \right), \quad D^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (1)$$

$$\Phi(r, \theta) = \sin^2 \theta, \quad r = 1$$

В случае изотермической жидкости ($\tau \equiv 1$) уравнение (1) совпадает с полученными ранее [2–3].

Решение уравнения (1) будем искать методом разделения переменных

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta \quad (2)$$

Для определения функции $f(r)$ получим уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dr} - \frac{R}{\tau r^2} \right) \frac{df}{dr} - \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dr} \right) f = 0 \quad (3)$$

$$f(r) = 1, \quad r = 1; \quad f(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Уравнение теплопроводности в сферической системе координат без учета членов порядка $R_\omega^2/R \ll 1$ примет вид

$$\frac{d}{dr} r^2 \tau \frac{dT}{dr} - P \frac{dT}{dr} = 0, \quad P = \frac{aw_a}{\chi_a} \quad (4)$$

$$\tau(r) = 1, \quad r = 1; \quad \tau(r) \rightarrow \tau_\infty, \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь P — число Пекле по скорости вдува, χ_a — коэффициент температуропроводности. Хотя результаты получены при условии $R_\omega^2 \ll R$, тем не менее можно непосредственно убедиться, что уравнения справедливы и при $R = 0$.

Решение (2) позволяет вычислить $\mathbf{M}$ — момент сил, действующих на вращающуюся в газе сферическую частицу

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \frac{df}{dr} (1) \right) = m \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{M}_0 = -8\pi \mu_a a^3 \boldsymbol{\Omega} \quad (5)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и (4) решалась численно методом прогонки.

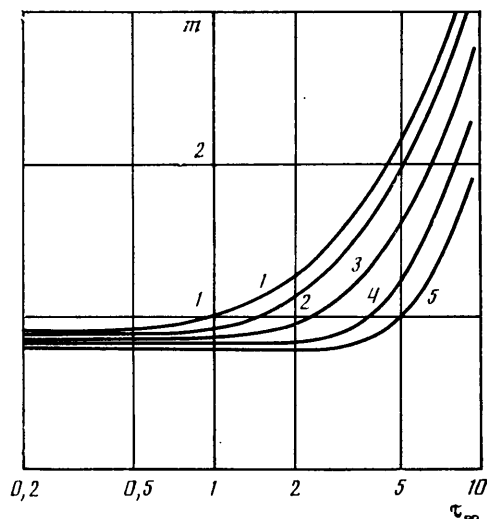
На фигуре сплошными линиями изображена зависимость коэффициента m от безразмерной температуры τ_∞ и числа Рейнольдса R при допущении, что $R=P$. Кривые 1–5 соответствуют $R=0; 1; 3; 5; 7$. Интерполяционная формула

$$m_0 = \frac{5}{9} k \left[1 + \frac{\tau_\infty^2 (1+3\tau_\infty)}{8\tau_\infty^2 + 9\tau_\infty + 3} \right] \left[\frac{R(R-1+\exp(-R))}{R^2 - 2(R-1+\exp(-R))} \right]$$

$$k = 1 + R^{1,92} (1 - \tau_\infty) (A + B\tau_\infty + C\tau_\infty^2) \exp(\gamma\tau_\infty)$$

$$A = 6,49 \cdot 10^{-3}, \quad B = 2,89 \cdot 10^{-3}, \quad C = -3,23 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma = -0,395$$

согласуется с результатами численных расчетов в рассматриваемом диапазоне изменения параметров с погрешностью, не превышающей 11%.



В предельных случаях $R=0$, $\tau_\infty \neq 1$, а также при $\tau_\infty=1$ эта формула совпадает с ранее полученными результатами [3–4].

При $\tau_\infty \rightarrow 1$, $R=P=0$ выражение (5) принимает известное значение M_0 [5]. При $\tau_\infty \rightarrow 0$, $R=P=0$ момент сил стремится к постоянной величине $M=5M_0/6$ [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Наука, 1978. 736 с.
2. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. Т. 1. 379 с.
3. Головин А. М., Роговой А. Ф. Влияние радиального потока массы на момент сил, действующих на вращающуюся сферическую частицу в вязкой жидкости // Вестн. МГУ. Матем., механ. 1986. № 5. С. 84–86.
4. Роговой А. Ф. К расчету момента сил, действующих на вращающуюся сферическую частицу в вязком неизотермическом газе // Тез. докл. Всесоюз. совещания-семинара молодых ученых «Современные проблемы механики жидкости и газа». Грозный, 1986. 207 с.
5. Ламб Г. *Гидродинамика*. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.VII.1986