УДК 532.51+532.527

ПРИМЕР ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПОТОКЕ

ВЛАДИМИРОВ В. А.

Параметрический резонанс – один из распространенных типов неустойчивости механических систем [1]. Стандартным примером уравнений, описывающих параметрические колебания, является уравнение Матье и его обобщения. В гидродинамике такие колебания подробно изучены для задачи вертикальных колебаний сосуда с несжимаемой жидкостью в однородном поле тяжести [1–5]. В настоящей работе дан новый пример течения, задача устойчивости которого сводится к уравнению Матье. Это течение представляет собой поток специального вида во вращающемся цилиндрическом канале. Направление угловой скорости вращения перпендикулярно оси канала, а ее величина периодически изменяется со временем. Течения такой геометрии могут представлять интерес в технических приложениях [6, 7].

Уравнения движения идеальной несжимаемой однородной по плотности жидкости, записанные во вращающейся со скоростью $\boldsymbol{\Omega}(t)$ системе координат x, y, z, имеют вид [8, с. 37]

$$D\mathbf{u}+2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=\mathbf{f}-\nabla p^*-\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r} \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0; \qquad D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla, \qquad \dot{\boldsymbol{\Omega}}\equiv d\boldsymbol{\Omega}/dt$$

$$p^*\equiv p_0-{}^1/_2(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2$$

где $\mathbf{r}=(x,y,z)$ – радиус-вектор; t – время; $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ – поля скорости и внешних массовых сил. Поле давления p^* является «модифицированным», отличающимся от истинного давления p_0 включением «центробежной» добавки. Область течения τ и ее граница $\partial\tau$ являются цилиндрическими с образующей, параллельной оси z. На $\partial\tau$ заданы условия непротекания

$$\mathbf{u}\mathbf{n}=0 \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – нормаль к $\partial\tau$.

Рассматривается класс трансляционно-инвариантных движений, поле $\mathbf{u}$ в которых не зависит от z. Для таких движений уравнения (1) с $\mathbf{f}\equiv0$ преобразуются к виду

$$Du=-p_x+\rho g_1+\dot{\Omega}_3 y, \qquad Dv=-p_y+\rho g_2-\dot{\Omega}_3 x \tag{3}$$

$$D\rho=0, \qquad u_x+v_y=0; \qquad D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\mathbf{u}=(u,v,w), \qquad \rho\equiv w+2\Omega_1 y-2\Omega_2 x$$

$$p\equiv p^*+2(\Omega_2 x-\Omega_1 y)^2-z(\dot{\Omega}_1 y-\dot{\Omega}_2 x)-2\Omega_3\psi$$

$$u=-\psi_y, \qquad v=\psi_x, \qquad g_1\equiv-2\Omega_2, \qquad g_2\equiv2\Omega_1$$

Соотношения (3), (2) формально совпадают с уравнениями и граничными условиями непротекания для плоских движений идеальной несжимаемой неоднородной по плотности (стратифицированной) жидкости, записанными в приближении Буссинеска. Если $\dot{\Omega}_3\equiv0$, то движение происходит в однородном, зависящем только от времени поле «массовой силы» с ускорением $\mathbf{g}=(g_1,g_2)$. При $\dot{\Omega}_3\not\equiv0$ к нему добавляется непотенциальная «сила» $\mathbf{f}_0=\dot{\Omega}_3(y,-x)$. Редукция уравнений (1) к виду (3) является обобщением результатов [9–11] на случай зависящей от времени угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$.

Ниже изучается только случай $\dot{\Omega}_3\equiv0$, $g_1\equiv0$. Точными решениями (3), (2) являются «состояния покоя», задающиеся одной произвольной функцией $\rho_0(y)$, которым в исходных переменных отвечают нестационарные плоскопараллельные течения

$$u=v=0, \qquad \rho=\rho_0(y) \tag{4}$$

Рассматривается задача устойчивости течения (4). При $\boldsymbol{\Omega}(t)=\mathrm{const}$ она в нелинейной постановке изучалась в [11–13]. Здесь исследуется устойчивость по линейному приближению для периодических функций $\boldsymbol{\Omega}(t)$.

Линеаризованные на (4) уравнения (3) имеют вид

$$u_t=-p_x, \qquad v_t=-p_y-\rho g \tag{5}$$

$$\rho_t+\rho_0'v=0, \qquad u_x+v_y=0$$

где u, v, p и ρ – суть возмущения x- и y-компонент скорости, давления и «плотности»; $\rho_0' \equiv d\rho_0/dy$, $g \equiv g_2$.

Для простоты аналитического рассмотрения предполагается, что область течения τ представляет собой канал прямоугольного сечения: $0<x<a$, $0<y<b$. Кроме того, пусть $\rho_0' = -\beta = \mathrm{const}$. Из (5) вытекает уравнение для ρ

$$\Delta\rho_{tt}+\beta g\rho_{xx}=0 \tag{6}$$

Решение (6) ищется в виде $\rho=R(t)k_1\cos k_1x\sin k_2y$ где $(k_1, k_2)\equiv\pi(n_1/a, n_2/b)$; n_1, n_2 – произвольные целые числа. При этом вычисленные по (5) компоненты u, v удовлетворяют граничным условиям (2). Из (6) следует:

$$\ddot{R}+\beta gBR=0, \qquad B\equiv k_1^2/(k_1^2+k_2^2) \tag{7}$$

Это уравнение вследствие периодичности $g(t)$ представляет собой уравнение Хилла [13]. При $\beta g=N^2-\beta\omega^2A\cos\omega t$ (A – амплитуда, ω – частота, N – постоянная величина) оно сводится к уравнению Матье, каноническая форма которого получается из (7) с помощью следующего преобразования:

$$\sigma\equiv {}^1/_2\omega t, \qquad a\equiv 4BN^2/\omega^2, \qquad q\equiv 2BA$$

$$R_{\sigma\sigma}+(a-2q\cos 2\sigma)R=0 \tag{8}$$

Устойчивость нулевого решения (8) подробно изучена [14, 15]. На плоскости a, q (при $a>0$) неустойчивые области представляют собой «языки», выходящие из точек $a=m^2$, $m=1, 2, 3\ldots$ При малых амплитудах A решения (8) неустойчивы в узких зонах вокруг точек $\omega=2N\sqrt{B}/m$. Таким образом, для данных размеров канала a, b и частоты N существует трехпараметрическое (по n_1, n_2, m) счетное множество частот колебаний, при которых имеет место неустойчивость по механизму параметрического резонанса. Во всех случаях под неустойчивостью понимается экспоненциальный рост решений при $t\to\infty$.

Другим интересным следствием (8) является неустойчивость течения в отсутствие среднего вращения ($N^2=0$). Условие неустойчивости (приближенное [15]): $|A|>(2|\beta|)^{-1}$. Такая неустойчивость проявляется при движении оси канала по закону, подобному закону движения маятника.

Набор резонансных частот ω получен для случая $N^2>0$. В то же время из (8) следует, что при выполнении условия

$$\frac{\sqrt{2B|N^2|}}{\omega}<AB|\beta|<\frac{1}{2}+\frac{2B|N^2|}{\omega^2} \tag{9}$$

устойчивым оказывается состояние с нарастанием плотности $\rho_0(y)$ (4) «вверх» ($N^2<0$). Это свойство является аналогом известного результата для маятника, у которого верхнее положение становится устойчивым при колебаниях точки подвеса [16]. Однако в отличие от этого случая полной стабилизации в рассматриваемой задаче достигнуть не удается. Для любой амплитуды A всегда существуют столь короткие в y-направлении возмущения ($k_2\to\infty$), что левая часть (9) нарушается. Возможно, что стабилизация здесь может быть достигнута введением вязкости.

В заключение остановимся на демонстрации невозможности параметрического резонанса в твердотельно вращающейся жидкости с периодически зависящей от времени угловой скоростью. Для уравнений (1) такое движение соответствует $\mathbf{u}=0$ с подходящим подбором силы $\mathbf{f}$. В [17] было высказано предположение, что в частном случае $\boldsymbol{\Omega}(t)=(0, 0, \Omega(t))$ с периодической функцией $\Omega(t)$ такое состояние жидкости неустойчиво по механизму параметрического резонанса. Для пояснения вопроса при произвольных $\boldsymbol{\Omega}(t)$ достаточно рассмотреть линеаризованные на решении $\mathbf{u}=0$ уравнения для z-составляющих возмущений вихря ω и скорости w

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\omega=2(\boldsymbol{\Omega}\nabla)w, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\Delta w=-2(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\omega$$

Здесь в рассмотрение включена вязкость жидкости с постоянным коэффициентом кинематической вязкости ν. Для простоты объем жидкости считается безграничным. После выделения гармоники возмущения, пропорциональной $\exp[i(kx+ly+mz)-\nu\varkappa^2t]$; $\varkappa^2\equiv k^2+l^2+m^2$ уравнения на амплитуды $\omega_0(t)$, $w_0(t)$ принимают вид

$$\frac{d\omega_0}{dt}=2i(\mathbf{k}\boldsymbol{\Omega})w_0, \qquad \varkappa^2\frac{dw_0}{dt}=2i(\mathbf{k}\boldsymbol{\Omega})\omega_0 \tag{10}$$

Введение новой переменной $\tau=\int \mathbf{k}\boldsymbol{\Omega}dt$ при $\mathbf{k}\boldsymbol{\Omega}\geqslant 0$ сводит (10) к системе уравнений с постоянными коэффициентами, соответствующей возмущениям твердотельного вращения идеальной жидкости, происходящего с постоянной угловой скоростью. Устойчивость последнего течения общеизвестна [18]. Можно показать также, что рассмотрение ограниченных течений (по крайней мере при $\nu=0$ и $\Omega=\Omega_0\varphi(t)$, где Ω_0 – постоянный вектор, $\varphi(t)$ – функция времени) не меняет сути дела. Пример вращающегося течения (4) показывает, как надо изменить постановку задачи, чтобы параметрическая неустойчивость имела место.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
2. *Калинченко В. А., Нестеров С. В., Секерж-Зенькович С. Я., Чайковский А. А.* Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных волн. Препринт № 243. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1985.
3. *Секерж-Зенькович С. Я.* Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости при вертикальных колебаниях сосуда // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 1089–1091.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. *Владимиров В. А.* Параметрический резонанс в стратифицированной жидкости // ПМТФ. 1981. № 6. С. 168–174.
6. *Смирнов Е. М., Юркин С. В.* О течении жидкости по вращающемуся каналу поперечного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 24–30.
7. *Кузьминский А. В., Смирнов Е. М., Юркин С. В.* Продольно ориентированные ячеистые структуры типа вихрей Тейлора – Гертлера на стороне повышенного давления вращающихся каналов // ПМТФ. 1983. № 6. С. 129–134.
8. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
9. *Владимиров В. А.* О сходстве эффектов плотностной стратификации и вращения.– ПМТФ, 1985, № 3, с. 58–68.
10. *Владимиров В. А.* Пример эквивалентности эффектов плотностной стратификации и вращения.– Докл. АН СССР, 1985, т. 284, № 2, с. 310–313.
11. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
12. *Владимиров В. А.* Вариационный принцип и априорная оценка устойчивости для состояний покоя непрерывно стратифицированной жидкости.– В сб.: Динамика неоднородных жидкостей (Динамика сплошной среды. Вып. 72). Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985.
13. *Владимиров В. А.* Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости.– ПМТФ, 1986, № 3.
14. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1962. 343 с.
15. *Абрамовиц М., Липман Д., Мак Ниш А. и др.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
16. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.– ЖЭТФ, 1951, т. 21, № 5, с. 588–597.
17. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О параметрической неустойчивости твердого вращения жидкости.– ПММ, 1964, т. 28, № 5, с. 829–834.
18. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
5.II.1986

УДК 532.516

ВЛИЯНИЕ РАДИАЛЬНОГО ПОТОКА МАССЫ НА МОМЕНТ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВРАЩАЮЩУЮСЯ В ВЯЗКОМ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ГАЗЕ СФЕРИЧЕСКУЮ ЧАСТИЦУ

ГОЛОВИН А. М., РОГОВОЙ А. Ф.

Рассматривается стационарное осесимметричное течение газа в окрестности сферы радиуса a, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω. С поверхности сферы осуществляется вдув в радиальном направлении со скоростью $\mathbf{w}_a$, а вдали от сферы газ покоится. Предполагается, что температура T_a на поверхности сферы отлична от температуры T_∞ вдали от нее. Движение и распределение температуры газа описываются уравнениями Навье – Стокса, непрерывности и теплопроводности,