

УДК 532.5.011:536.252

**ПОДАВЛЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ И КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ УСТОЙЧИВО  
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ**

ГЕЛЬФГАТ А. Ю., ПЕРЕЦ И. В.

Для совершенствования некоторых технологических процессов, например выращивания монокристаллов, желательно управлять интенсивностью течения жидкости с целью влияния на тепло- и массообменные процессы. Для этого обычно используют вращение, наложение электромагнитного поля или создание условий пониженной гравитации [1].

В настоящей работе на примере простейших решений системы уравнений свободной конвекции в бесконечных вертикальных каналах показано, что задача снижения интенсивности течения может быть решена при соответствующем соотношении степени устойчивой (по плотности) стратификации жидкости с величиной факторов, вызывающих течение. Ниже рассматривается возможность использования температурной стратификации, однако все выводы полностью относятся и к концентрационной стратификации.

Рассмотрим неизотермическое течение в плоском слое, ограниченном плоскостями  $x = \pm d$ , на границах которого задается линейное распределение температуры;  $T = kz$  ( $x = -d$ );  $T = kz + T_0$  ( $x = d$ ), где  $k > 0$  – параметр стратификации,  $T_0 > 0$  – горизонтальный перепад температуры.

Свободная конвекция в приближении Буссинеска описывается следующими безразмерными уравнениями и граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{Pr} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Ra T e_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad Pr \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \Delta T \quad (1)$$

$$T = z \quad (x = -1); \quad T = z + \frac{T_0}{kd} \quad (x = 1) \quad (2)$$

$$\int_0^1 v_z dx = 0 \quad (3)$$

Здесь  $Pr = \nu / \chi$  – число Прандтля,  $Ra = g \beta k d^4 / \nu \chi$  – число Рэлея,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\chi$  – температуропроводность,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объемного расширения.

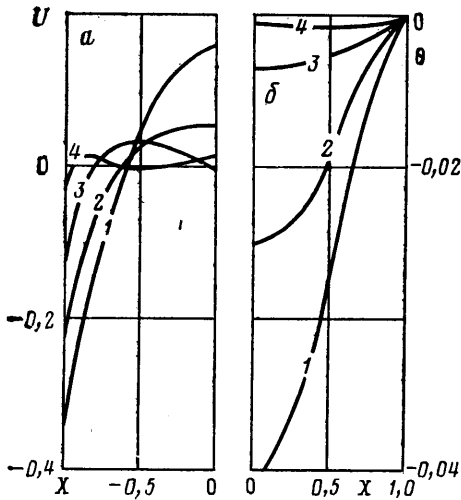
Если движение жидкости вызывается постоянными внешними силами, параллельными оси  $z$ , то решение имеет вид  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z(x))$ ,  $T = z + f(x)$ .

Естественная конвекция ( $v_z(x = \pm 1) = 0$ ) в такой системе хорошо исследована [2, 3]. В [2] показано, что с увеличением  $k$  скорость течения  $v_z$  уменьшается как  $k^{-1/2}$  и изменяется характер неустойчивости свободноконвективного течения. Влияние устойчивой температурной стратификации на движение жидкости, обусловленное другими причинами, до сих пор не изучалось.

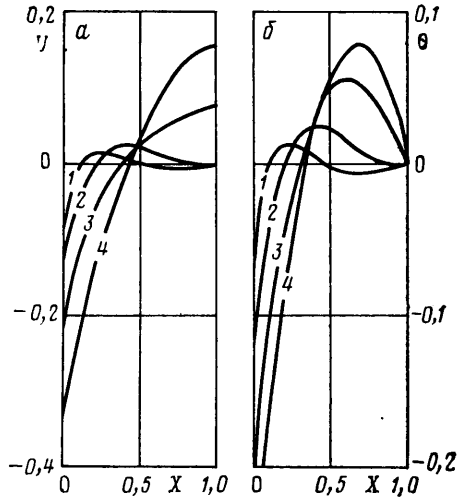
Рассмотрим конвективное течение, вызванное термокапиллярной силой. Пусть  $T_0 = 0$  и

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \mp Ma \frac{\partial T}{\partial z} \quad (x = \pm 1); \quad Ma = \left| \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right| \frac{kd^2}{\nu \chi \rho} \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $Ma$  – число Маран-



Фиг. 1



Фиг. 2

гоии. Тогда решение задачи (1)–(4) имеет вид

$$v_z = \frac{Ma}{\gamma Ra} G_1(x), \quad f(x) = \frac{Ma}{\gamma Ra} G_2(x)$$

$$G_1(x) = \text{Im} \left[ \frac{\bar{\alpha} \text{ch } \bar{\alpha} x}{\text{sh } \bar{\alpha}} \right], \quad G_2(x) = \text{Im} \left[ \frac{\text{ch } \bar{\alpha} x - \text{ch } \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} \text{sh } \bar{\alpha}} \right] \quad (5)$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Ra}{4}} (1+i), \quad \bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{Ra}{4}} (1-i)$$

Проанализируем влияние температурной стратификации на полученное течение. Вместо увеличения параметра стратификации рассмотрим более общий случай – увеличение числа Рэлея  $Ra$ . При этом величины  $G_1(x)$  и  $G_2(x)$  остаются ограниченными, а  $v_z$  и  $f(x)$  стремятся к нулю как  $MaRa^{-1/4}$  и  $MaRa^{-3/4}$  соответственно.

На фиг. 1,  $a$  показаны  $u=v_z/Ma$ , а на фиг. 1,  $\delta - \theta=f(x)/Ma$  при числах Рэлея  $Ra=0,100, 10^3, 10^4$  (кривые 1–4). Начиная с  $Ra=10^4$  течение вытесняется к границе слоя, а в центральной части слоя скорость колеблется около значения  $v_z=0$ , причем число корней функции  $v_z(x)$  растет как  $Ra^{1/4}$ . Среднеквадратичное значение скорости

$$\langle v \rangle = \int_0^1 |v_z|^2 dx$$

убывает как  $MaRa^{-3/8}$ .

Рассмотрим случай, когда плоскости  $x=\pm 1$  движутся с постоянной скоростью  $W$ , т. е. при  $x=\pm 1$   $v_z=-W$ , однако вертикальный градиент температуры остается неизменным и выполняется условие замкнутости потока (3). Тогда при  $T_0=0$  имеем

$$v_z = W \frac{\text{Im}[\bar{\alpha} \text{sh } \alpha \text{ch } \bar{\alpha} x]}{\text{Im}[\alpha \text{sh } \bar{\alpha} \text{ch } \alpha]} \quad (6)$$

$$f(z) = \frac{W}{\gamma Ra} \frac{\text{Im}[\bar{\alpha} \text{sh } \alpha (\text{ch } \bar{\alpha} x - \text{ch } \bar{\alpha})]}{\text{Im}[\alpha \text{sh } \bar{\alpha} \text{ch } \alpha]} \quad (7)$$

Здесь увеличение числа Рэлея не влияет на максимальное значение скорости, так как скорость жидкости на границах фиксирована. Однако среднеквадратичное значение скорости убывает как  $W Ra^{-1/8}$ . Функция  $f(x)$  аналогично предыдущим случаям уменьшается как  $W Ra^{-1/2}$ .

На фиг. 2 показано, как изменяются величины  $u=v_z/W$  и  $\theta=f(x)/W$  при увеличении числа Рэлея  $Ra=10^4, 10^3, 100, 0$  (кривые 1–4). С ростом  $Ra$  течение вытесняется к границе. При этом, как следует из фигуры, скорость в центральной части слоя уменьшается быстрее, чем в предыдущем примере. Таким образом, и в этом случае эффект подавления течения имеет место.

Аналогичные результаты можно получить и для прямого кругового вертикального цилиндра радиуса  $d$ , на боковой поверхности которого задается температура  $T=kz$ , при  $(r=d)$ . Решение системы уравнений (1) в этом случае имеет вид  $v=(0, 0, v_z(r))$ ,  $T=z+f(r)$ .

Для термокапиллярной конвекции получаем

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\text{Ma} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (r=1)$$

$$v_z = \frac{\text{Ma}}{2\beta} \left[ \frac{J_0(\beta r)}{J_1(\beta)} + i \frac{J_0(i\beta r)}{J_1(i\beta)} \right] \quad (8)$$

$$f(r) = \frac{\text{Ma}}{2\beta^3} \left[ \frac{J_0(\beta) - J_0(\beta r)}{J_1(\beta)} + i \frac{J_0(i\beta) - J_0(i\beta r)}{J_1(i\beta)} \right] \quad (9)$$

Если на поверхности цилиндра задана скорость, то имеем

$$v_z = -W \quad (r=1)$$

$$v_z = -W \frac{J_1(\beta)J_0(i\beta r) + iJ_1(i\beta)J_0(\beta r)}{J_1(\beta)J_0(i\beta) + iJ_1(i\beta)J_0(\beta)} \quad (10)$$

$$f(r) = \frac{W}{\beta^3} [J_1(i\beta)(J_0(\beta r) - J_0(\beta)) - J_1(\beta)(J_0(i\beta r) - J_0(i\beta))] (J_1(\beta)J_0(i\beta) + iJ_1(i\beta)J_0(\beta))^{-1}$$

где  $\beta = \sqrt{\text{Ra}}$ ,  $J_0, J_1$  — функции Бесселя.

Значения (8)–(9) и (10)–(11) также могут подавляться путем наложения устойчивой температурной стратификации. При этом сохраняются полученные выше выводы:  $f(r)$  (9), (18) убывает пропорционально  $\text{Ra}^{-1/4}$ ;  $v_z(r)$  в случае термокапиллярной (8) конвекции убывает как  $\text{MaRa}^{-1/4}$ ; число корней функции в обоих случаях растет как  $\text{Ra}^{1/4}$ . Среднеквадратичное значение скорости убывает как  $\text{MaRa}^{-1/4}$  и  $W\text{Ra}^{-1/4}$  соответственно для (8) и (11).

Аналогичные результаты также можно получить, рассматривая вертикальный цилиндрический слой с радиальным перепадом температуры, движущимися поверхностями и термокапиллярной силой на одной или обеих поверхностях.

Отметим, что из (5), (7), (9) и (11) следует:  $f'(1)=0$ .

Это значит, что выводы остаются справедливыми и в случае, когда на боковой поверхности ставится условие теплообмена по Ньютону или условие Стефана — Больцмана.

Приведенные выше примеры показывают, что устойчивая (по плотности) стратификация жидкости приводит к подавлению не только естественных термоконвективных течений, то и течений, вызванных любыми другими факторами.

Авторы благодарят Б. Я. Мартузана за ценные указания и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Осрач*. Влияние гидродинамики на рост кристаллов. Фримановская лекция. // Тр. амер. о-ва, инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов. 1983. Т. 105. № 1. С. 89–107.
2. *Bergholz R. F.* Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer. // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 84. № 4. P. 743–768.
3. *Nielsen H. B., True H.* Numerical investigation of the 3-dimensional stability of a convective flow in a slot. — In: *Boundary and Inter. Layers Comput. — Asympt. Meth. Proc. BAIL 1 Conf., Dublin, 1980. Dublin, 1980, p. 381–386.*

Рига

Поступила в редакцию  
10.IV.1986