

УДК 536.42

**ВЛИЯНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ
ТЕПЛОПЕРЕНОСА НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ И ДИНАМИКУ
ПРОТАИВАНИЯ ГРУНТОВ**

ЗВЯГИН В. В.

Проведено исследование влияния конвективной составляющей теплопереноса на температурное поле и динамику продвижения фронта протаивания грунта при больших скоростях фильтрации жидкости в талой зоне. Методами смены стационарных состояний и приближенной автомодельности получены двухсторонние оценки решения задачи Стефана с конвективной составляющей теплопереноса в пористой среде. По результатам проведенных расчетов делаются выводы о точности и пределах применимости полученных решений.

В большинстве случаев в инженерных расчетах конвективный теплоперенос в пористых средах учитывается введением эффективных коэффициентов теплопроводности. Такой подход к решению задач протаивания не всегда верен, особенно при больших скоростях массопереноса в грунтах, так как он не отражает истинной картины процесса [1, 2].

Влияние фильтрации жидкости на прогноз теплового состояния мерзлых грунтов рассматривалось в [1-4 и др.]. При этом применялись численные методы, обычно без оценки точности получаемых решений.

1. Процесс протаивания грунта, первоначально находящегося при температуре, близкой к температуре фазового перехода T_s (для простоты будем считать $T_s=0$), с учетом фильтрации воды, при условии идеального дренажа в оттаивающем массиве и наличии термического сопротивления на его поверхности описывается уравнением Фурье — Кирхгофа

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c_w V_w \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq x_s, \quad T \geq 0 \quad (1.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$x=0: \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + c_w V_w T = K(T_c - T) \quad (1.2)$$

$$x=x_s: \quad T=0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \sigma \frac{dx_s}{dt} \quad (1.3)$$

$$t=0: \quad T=0, \quad x_s=0 \quad (1.4)$$

Здесь T — температура, t — время, c — объемная теплоемкость грунта, λ — теплопроводность, c_w — объемная теплоемкость воды, V_w — скорость фильтрации, T_c — температура над поверхностью грунта, K — коэффициент теплопередачи из окружающего воздуха в грунт, σ — объемная теплота фазового перехода в грунте, x_s — координата фронта фазового перехода.

Запишем (1.1) — (1.4) в безразмерном виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \beta Pe \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq \eta \quad (1.5)$$

$$\xi=0: -\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \beta \text{Pe} \theta = \text{Bi}(1-\theta) \quad (1.6)$$

$$\xi=\eta: \theta=0, \quad -\text{Ste} \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \frac{d\eta}{d\text{Fo}} \quad (1.7)$$

$$\text{Fo}=0: \theta=0, \quad \eta=0 \quad (1.8)$$

$$\theta = \frac{T}{T_c}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{x_s}{l},$$

$$\beta = \frac{c_w}{c}, \quad \text{Fo} = \frac{\kappa t}{l^2}$$

$$\text{Pe} = \frac{V_w l}{\kappa}, \quad \text{Bi} = \frac{Kl}{\lambda},$$

$$\text{Ste} = \frac{cT_c}{\sigma}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{c}$$

Здесь l — масштаб (максимальное протаивание), Fo — число Фурье, Pe — число Пекле, Bi — число Био, Ste — число Стефана, κ — коэффициент температуропроводности талого грунта.

Для реальных грунтов $\beta > 1$ ($\beta \approx 2$), а параметр Pe может изменяться в широких пределах от нуля до значительных величин в зависимости от скорости фильтрации воды. При малых значениях $\text{Pe} \approx 0$ имеем обычную задачу кондуктивной теплопроводности с фазовыми переходами, решение которой в настоящее время известно с достаточно высокой точностью [5].

Представляет интерес рассмотрение другого предельного случая $\text{Pe} \gg 1$. Для этого используем методы возмущений [6].

Введем малый параметр $\varepsilon = 1/\beta \text{Pe}$, в результате уравнение (1.5) примет вид

$$\varepsilon \frac{\partial\theta}{\partial\text{Fo}} = \varepsilon \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \quad (1.9)$$

Малый параметр ε при второй производной приводит в предельном уравнении при $\varepsilon \rightarrow 0$ к сингулярной задаче, так как граничные условия (1.6) и (1.7) не могут быть удовлетворены одновременно. Потеря граничного условия приводит к появлению пограничного слоя. Для решения в пограничном слое характерно экспоненциальное затухание в окрестности границы $\xi=\eta$.

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то при фиксированном $\xi \neq \eta$ уравнение (1.9) приводится к виду

$$\partial\theta/\partial\xi=0, \quad 0 \leq \xi < \eta$$

решение которого $\theta = \text{const}$ должно удовлетворять граничному условию (1.6). Из него следует, что

$$\theta = \text{Bi}/(\text{Bi} + \beta \text{Pe}) \quad (1.10)$$

При малых значениях ε решение (1.10) близко к точному всюду, за исключением малого интервала вблизи границы фазового перехода $\xi=\eta$, где истинное решение быстро изменяется, чтобы удовлетворить граничному условию $\theta=0$.

Для получения решения, пригодного в окрестности границы фазового перехода, введем преобразование растяжения $\zeta = (\eta - \xi)/\varepsilon$. В результате уравнение (1.9) принимает вид

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0, \quad 0 \leq \zeta < \infty$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = A + B \exp(-\zeta) \quad (1.11)$$

Постоянные A и B находятся из условия на границе $\xi = \eta$ ($\theta = 0$) и условия сращивания внешнего (1.10) и внутреннего (1.11) решений

$$\lim_{\xi \rightarrow \eta} \theta(\xi) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \theta(\zeta)$$

В результате получаем температурное поле вблизи границы фазового перехода

$$\theta = \frac{Bi}{Bi + \beta Pe} \{1 - \exp[(\xi - \eta)\beta Pe]\}$$

Равномерно пригодное (составное) решение на всем интервале изменения ξ имеет вид [6]

$$\theta = \theta(\xi) + \theta(\zeta) - \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \theta(\zeta) = \theta(\xi) + \theta(\zeta) - \lim_{\xi \rightarrow \eta} \theta(\xi)$$

Отсюда находим

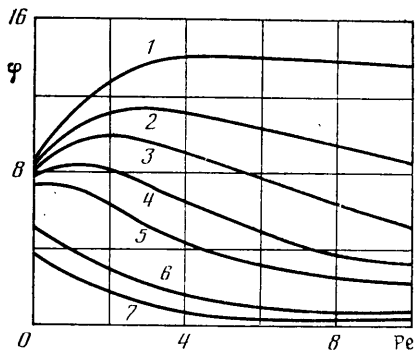
$$\theta = \frac{Bi}{Bi + \beta Pe} \{1 - \exp[(\xi - \eta)\beta Pe]\} + O(\varepsilon) \quad (1.12)$$

Если подставить выражение (1.12) в условие Стефана (1.7) и проинтегрировать с учетом (1.8), то получим

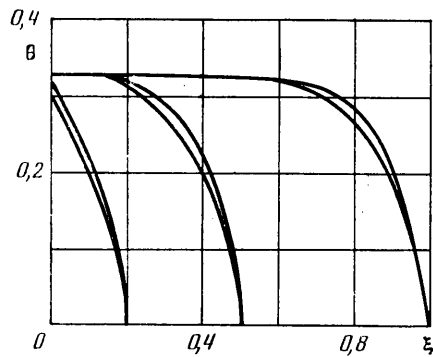
$$\eta = \frac{Ste Bi \beta Pe}{Bi + \beta Pe} Fo \quad (1.13)$$

Таким образом, для достаточно больших чисел Pe зависимость положения фронта протаивания от времени является линейной, а температурное поле в каждый момент времени близко к стационарному решению.

2. Двусторонние оценки решения задачи (1.5)–(1.8) можно получить, используя метод смены стационарных состояний и метод приближенной автомодельности. Доказательство оценочного характера данных решений для случая кондуктивного теплопереноса приводится в [5]. В связи с тем что уравнение Фурье – Кирхгофа отличается от обычного уравнения кондуктивной теплопроводности лишь дополнительным членом, содержащим производную по координате, то доказательство оценочного характера этих двух решений для задачи с фильтрацией жидкости аналогично [5] и здесь не приводится.



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение по методу смены стационарных состояний находится путем приравнивания нулю производной в левой части (1.5), использования граничного условия (1.6) и первого условия (1.7). В результате имеем

$$\theta_1 = \frac{Bi}{Bi + \beta Pe} \left\{ \frac{1 - \exp[(\xi - \eta)\beta Pe]}{1 - \exp(-\beta Pe \eta) [1 - \beta Pe (Bi + \beta Pe)^{-1}]} \right\} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.7) и интегрируя с начальным условием (1.8), получаем

$$Fo_1 = \frac{Bi + \beta Pe}{Ste Bi \beta Pe} \left\{ \left(\frac{1}{\beta Pe} - \frac{1}{Bi + \beta Pe} \right) [\exp(-\beta Pe \eta) - 1] + \eta \right\} \quad (2.2)$$

Выражение θ_1 из (2.1) является оценкой сверху для температурного поля задачи (1.5)–(1.8), а Fo_1 — соответственно оценкой снизу для времени достижения фронтом протаивания заданной координаты $\xi = \eta$.

Для получения противоположной оценки решения предположим, что безразмерная температура θ является функцией лишь разности η и ξ

$$\theta = \theta_2(h), \quad h = \eta - \xi \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (1.5), (1.6) и (1.7), получаем

$$(\dot{\eta} - \beta Pe)\theta_2' = \theta_2'', \quad \dot{\eta} = d\eta/dFo \quad (2.4)$$

$$h=0: \quad \theta_2 = 0, \quad Ste \theta_2' = \dot{\eta} \quad (2.5)$$

$$h=\eta: \quad \theta_2' + \beta Pe \theta_2 = Bi(1 - \theta_2) \quad (2.6)$$

Интегрируя (2.4) с условиями на подвижной границе (2.5), находим с учетом (2.3)

$$\theta_2 = \frac{\dot{\eta}}{Ste(\dot{\eta} - \beta Pe)} \{ \exp[(\dot{\eta} - \beta Pe)(\eta - \xi)] - 1 \} \quad (2.7)$$

Для получения $\dot{\eta}$ используем условие на возмущающей границе (2.6). В результате получаем уравнение

$$\frac{Bi}{Bi + \beta Pe} - \frac{\dot{\eta}}{(Bi + \beta Pe) Ste} \exp[(\dot{\eta} - \beta Pe)\eta] -$$

$$-\frac{\dot{\eta}}{(\dot{\eta}-\beta Pe)Ste} \{ \exp [(\dot{\eta}-\beta Pe)\eta] - 1 \} = 0 \quad (2.8)$$

Решение (2.8) относительно $\dot{\eta}$ находится одним из итерационных методов, например методом Ньютона [7].

Время, в течение которого фронт фазовых переходов достигнет заданной координаты η , определяется численным интегрированием из соотношения

$$Fo_2 = \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\dot{\eta}} \quad (2.9)$$

Выражение (2.7) является нижней оценкой для температурного поля задачи (1.5)–(1.8), а Fo_2 из (2.9) – верхней оценкой для времени.

3. Результаты численных расчетов дают зависимости расхождения между решениями по методу смены стационарных состояний и по методу приближенной автомодельности от параметров Bi и Pe .

На фиг. 1 приводятся зависимости от числа Pe отклонения (%) величин Fo_1 и Fo_2 от их среднего значения Fo_m

$$\varphi = 100 \left| \frac{Fo_m - Fo_i}{Fo_m} \right| ; \quad i = 1, 2$$

на момент максимального протаивания ($\eta=1$) при различных значениях $Bi=100; 20; 10; 5; 3; 1; 0,5$ (кривые 1–7). При этом параметры β и Ste принимались близкими к реальным условиям ($\beta=2, Ste=0,4$).

Величина φ стремится к нулю при $Pe \rightarrow \infty$ тем быстрее, чем меньше Bi . Можно показать, что эти два решения Fo_1 и Fo_2 для $Pe \rightarrow \infty$ приближаются к решению по методу малого параметра (1.13).

Действительно, при данном условии (2.1) переходит в (1.12) и соответственно (2.2) в (1.13).

Уравнение (2.8) при $Pe \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\frac{Bi}{Bi + \beta Pe} = \frac{\dot{\eta}}{Ste(\dot{\eta} - \beta Pe)}$$

откуда находим

$$Fo_2 = \left(\frac{1}{\beta Pe} + \frac{Bi + \beta Pe}{Bi Ste \beta Pe} \right) \eta \approx \frac{Bi + \beta Pe}{Bi Ste \beta Pe} \eta$$

Линейный характер продвижения фронта протаивания быстрее проявляется при $Bi \ll \beta Pe$. Это хорошо видно из соотношения (2.2).

На фиг. 2 приводятся графики температурных полей при $Bi=Pe=5$ в различные моменты времени, рассчитанные по формулам (2.1) и (2.7). Как видно из фиг. 2, они близки между собой, при этом температурное поле, полученное

методом смены стационарных состояний, практически совпало с решением по методу малого параметра (1.12) на всем интервале изменения ξ в различные моменты времени.

Двухсторонние оценки положения фронта протаивания от времени уже при $Bi=Pe=5$ близки к линейной зависимости, рассчитанной по методу малого параметра (фиг. 3).

Таким образом, на основании проведенных расчетов можно сделать вывод, что линейный характер зависимости положения фронта протаивания от времени может проявляться и при умеренных скоростях фильтрации в оттаивающем массиве, если соблюдается условие $Bi \ll \beta Pe$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А. В. Теплообмен почвы с атмосферой в северных и умеренных широтах территории СССР. Якутск: Кн. изд-во, 1975. 302 с.
2. Перльштейн Г. З. Водно-тепловая мелиорация мерзлых пород на северо-востоке СССР. Новосибирск: Наука, 1979. 304 с.
3. Фельдман Г. М. Прогноз температурного режима грунтов и развития криогенных процессов. Новосибирск: Наука, 1977. 191 с.
4. Красс М. С., Попенко Ф. Е., Евсеев Ю. А. Прогноз температурного режима намывных оснований в пойменной части р. Лены // В сб.: Задачи механики природных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 26–46.
5. Медведский Р. И. Двухсторонние оценки внешней однофазной задачи Стефана // В сб.: Математическое моделирование и экспериментальные исследования процессов тепло- и массопереноса. Якутск, 1979. С. 71–82.
6. Нейфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 831 с.

Тюмень

Поступила в редакцию
6.VI.1986