МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1987

УДК 533.951

УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИПРОДОЛЬНО РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ СОЛИТОНОВ В ПЛАЗМЕ С ХОЛЛОВСКОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

РУДЕРМАН М. С.

Распространение нелинейных волн малой амплитуды в столкновительной плазме с дисперсией, обусловленной учетом токов Холла, исследовано в [1–4]. Было показано, что быстрые и медленные магнитозвуковые волны, распространяющиеся под углом к магнитному полю, описываются уравнением Кортевега – де Вриза.

В том случае, когда кинетическое давление плазмы много меньше магнитного, уравнения, описывающие плазму с холловской дисперсией, совпадают с уравнениями для бесстолкновительной плазмы с учетом инерции ионов. В [5, 6] выведено так называемое нелинейное уравнение Шредингера с производной, описывающее распространение вдоль магнитного поля нелинейных поперечных магнитогидродинамических волн в холодной плазме с дисперсией, обусловленной учетом инерции ионов при условии, что характерная частота волн много больше ионной циклотронной частоты. В [7] нелинейное уравнение Шредингера с производной получено для двухжидкостной плазмы с конечным давлением. Вывод, проделанный в [5–7], почти дословно переносится на случай плазмы с холловской дисперсией. В [5, 7–9] найдены решения нелинейного уравнения Шредингера с производной в виде солитонов огибающих. В [10] развита схема решения нелинейного уравнения Шредингера с производной при нулевых граничных условиях на бесконечности с помощью метода обратной задачи теории рассеяния. В [11] этот метод обобщен на постоянные ненулевые граничные условия на бесконечности, а в [12, 13] – на случай, когда на бесконечности задается волна с круговой поляризацией. В [14] описан численный метод решения нелинейного уравнения Шредингера с производной, а в [15] с помощью этого метода исследована устойчивость солитонов огибающих относительно одномерных возмущений и эволюция начального возмущения.

В настоящей работе получено обобщение нелинейного уравнения Шредингера с производной на слабо неодномерный случай, аналогичное обобщению, полученному в [16] для уравнения Кортевега – де Вриза. На основе полученного уравнения исследована устойчивость солитонов, распространяющихся под малыми углами к невозмущенному магнитному полю относительно неодномерных возмущений.

1. Основные уравнения. Рассматриваем однотемпературную квазинейтральную плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов одного сорта, считая, что характерное время изменения параметров много больше времени свободного пробега. Кроме того, предполагаем, что произведение циклотронной частоты электронов на время свободного пробега удовлетворяет условию $\omega_e\tau_e \geqslant 1$. При этом становятся существенными токи Холла. Пренебрегая вязкостью и теплопроводностью, считая плазму совершенным газом и учитывая джоулеву диссипацию, имеем следующую систему гидродинамических уравнений [1]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0; \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right)=-\nabla p+\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})+\frac{cm_i}{4\pi e\rho}\Big[(\operatorname{rot}\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}-(\mathbf{B}\nabla)\operatorname{rot}\mathbf{B}+ \qquad (1.1)$$

$$+\frac{1}{\rho}(\mathbf{B}\nabla\rho)\operatorname{rot}\mathbf{B}-\frac{1}{\rho}(\nabla\rho\operatorname{rot}\mathbf{B})\mathbf{B}-\frac{2\pi}{\rho}\nabla\rho\times\nabla p\Big]+\nu_m\Delta\mathbf{B}$$

$$\frac{p}{\gamma-1}\frac{d}{dt}\ln\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{\nu_m}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{B})^2-\frac{cm_i}{8\pi e\rho}\operatorname{rot}\mathbf{B}\nabla p$$

Здесь ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, c — скорость света, m_i — масса иона, e — заряд электрона, γ — показатель адиабаты, $\nu_m=c^2/4\pi\sigma$, σ — проводимость.

Система уравнений (1.1) является исходной для вывода уравнения, описывающего распространение нелинейных волн малой амплитуды.

2. Вывод уравнения для нелинейных волн малой амплитуды. Рассматриваем распространение нелинейных волн в плазме, невозмущенное состояние которой задается формулами $p=p_0$, $\rho=\rho_0$, $\mathbf{B}=B_0\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}=0$, где $\mathbf{x}_0$ — единичный вектор оси x декартовой системы координат x, y, z.

При отсутствии диссипации дисперсионное уравнение для малых возмущений, распространяющихся вдоль поля в положительном направлении оси x, в длинноволновом приближении имеет вид

$$\frac{\omega}{k}=V_A-\varkappa k,\qquad V_A=\frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}},\qquad \varkappa=\frac{V_A^2}{2\omega_i},\qquad \omega_i=\frac{eB_0}{cm_i}$$

где $k<0$ и $k>0$ соответствуют право- и левополяризованным альфвеновским волнам, ω_i — ионная циклотронная частота.

Пусть безразмерная амплитуда волны равна $\varepsilon\ll1$. Для того чтобы дисперсия конкурировала с нелинейностью, которая при продольном распространении является кубической, необходимо, чтобы отношение дисперсионной поправки к первому члену в дисперсионном уравнении было порядка ε^2. Таким образом, приходим к условию $\varkappa k/V_A\sim\varepsilon^2$. Нетрудно показать, что в этом приближении диссипативные эффекты также будут одного порядка с нелинейными. В [17] показано, что дифракционные эффекты, связанные со слабой неодномерностью, будут одного порядка с нелинейными, если характерный масштаб в поперечном направлении в ε^{-1} раз больше длины волны. Таким образом, для рассматриваемой задачи необходимо ввести следующие растянутые переменные: $\xi=\varepsilon^2(x-V_At)$, $\eta=\varepsilon^3y$, $\zeta=\varepsilon^3z$, $\tau=\varepsilon^4t$.

В новых переменных уравнения (1.1) перепишутся в виде

$$\varepsilon^2\frac{\partial\rho}{\partial\tau}-V_A\frac{\partial\rho}{\partial\xi}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi}+\varepsilon\nabla_\perp'(\rho\mathbf{v}_\perp)=0;\quad p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma+O(\varepsilon^4)$$

$$\rho\left(\varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial\tau}-V_A\frac{\partial u}{\partial\xi}+u\frac{\partial u}{\partial\xi}+\varepsilon(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp')u\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p+\frac{B_\perp^2}{8\pi}\right)+\frac{\varepsilon}{4\pi}(\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp')B_x$$

$$\rho\left(\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial\tau}-V_A\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial\xi}+u\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial\xi}+\varepsilon(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp')\mathbf{v}_\perp\right)=$$

$$=-\varepsilon\nabla_\perp'\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(B_x\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial\xi}+\varepsilon(\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp')\mathbf{B}_\perp\right)\qquad(2.1)$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial B_x}{\partial\tau}-V_A\frac{\partial B_x}{\partial\xi}=\varepsilon\nabla_\perp'(u\mathbf{B}_\perp-B_x\mathbf{v}_\perp)+\varepsilon^2\nu_m\frac{\partial^2B_x}{\partial\xi^2}+O(\varepsilon^4)$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial\tau}-V_A\frac{\partial\mathbf{B}_\perp}{\partial\xi}=B_x\frac{\partial\mathbf{v}_\perp}{\partial\xi}-\frac{\partial(u\mathbf{B}_\perp)}{\partial\xi}+\varepsilon(\mathbf{B}_\perp\nabla_\perp')\mathbf{v}_\perp-\varepsilon(\mathbf{v}_\perp\nabla_\perp')\mathbf{B}_\perp-$$

$$
-\varepsilon\mathbf{B}_\perp(\nabla_\perp'\mathbf{v}_\perp)-2\varepsilon^2\varkappa\mathbf{x}_0\times\frac{\partial^2\mathbf{B}_\perp}{\partial\xi^2}+\varepsilon^2\nu_m\frac{\partial^2\mathbf{B}_\perp}{\partial\xi^2}+O(\varepsilon^4)
$$

$$
\mathbf{v}=u\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_\perp;\ \mathbf{B}=B_x\mathbf{x}_0+\mathbf{B}_\perp;\ \mathbf{v}_\perp\perp\mathbf{x}_0;\ \mathbf{B}_\perp\perp\mathbf{x}_0;\ \nabla_\perp'=\left(0;\frac{\partial}{\partial\eta};\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)
$$

Предполагаем, что при $\xi\to+\infty$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{B}_\perp\to B_\infty(0,\cos(k_0'\xi-\omega_0'\tau),\sin(k_0'\xi-\omega_0'\tau))\\
\mathbf{v}_\perp+\left(\frac{V_A}{B_0}+O(\varepsilon^2)\right)\mathbf{B}_\perp\to0;\qquad \omega_0'=-\varkappa k_0'^2
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

где k_0' и B_∞ — константы, а все остальные переменные стремятся к нулю, причем $B_\infty=0$ при $\nu_m\neq0$.

Решение ищем в виде $f=f_0+\varepsilon f_1+\varepsilon^2f_2+\varepsilon^3f_3+\ldots$

В первом приближении по ε имеем

$$
V_A\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi}=\rho_0\frac{\partial u_1}{\partial\xi};\quad p_1=c_S^2\rho_1;\quad \rho_0V_A\frac{\partial u_1}{\partial\xi}=\frac{\partial p_1}{\partial\xi};\quad c_S^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}
$$

$$
\rho_0V_A\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp1}}{\partial\xi}=-\frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\xi};\quad V_A\frac{\partial B_{x1}}{\partial\xi}=0;\quad V_A\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\xi}=-B_0\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp1}}{\partial\xi}
$$

откуда

$$
\rho_1=u_1=p_1=B_{x1}=0;\qquad \mathbf{v}_{\perp1}=-(V_A/B_0)\mathbf{B}_{\perp1}
\tag{2.3}
$$

Во втором приближении по ε, учитывая (2.3), получим

$$
V_A\frac{\partial\rho_2}{\partial\xi}-\rho_0\frac{\partial u_2}{\partial\xi}=-\frac{\rho_0V_A}{B_0}\nabla_\perp'\mathbf{B}_{\perp1};\qquad p_2=c_S^2\rho_2
$$

$$
\rho_0V_A\frac{\partial u_2}{\partial\xi}-\frac{\partial p_2}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{B_{\perp1}^2}{8\pi};\quad \rho_0V_A\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp2}}{\partial\xi}+\frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp2}}{\partial\xi}=0
$$

$$
\frac{\partial B_{x2}}{\partial\xi}=-\nabla_\perp'\mathbf{B}_{\perp1};\qquad V_A\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp2}}{\partial\xi}+B_0\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp2}}{\partial\xi}=0
$$

откуда следует

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_{\perp2}=-\frac{V_A}{B_0}\mathbf{B}_{\perp2};\quad B_{x2}=\int_\xi^\infty\nabla_\perp'\mathbf{B}_{\perp1}\,d\xi'\equiv-\varphi_1\\
p_2=c_S^2\rho_2;\quad u_2=\frac{V_A}{\rho_0}\rho_2+\frac{V_A}{B_0}\varphi_1;\quad \rho_2=\frac{B_{\perp1}^2-B_\infty^2-2B_0\varphi_1}{8\pi(V_A^2-c_S^2)}
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Собирая члены порядка ε^3 в третьем и пятом уравнениях (2.1) и учитывая (2.3) и (2.4), находим

$$
\begin{gathered}
B_0\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp3}}{\partial\xi}+V_A\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp3}}{\partial\xi}=-\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\tau}+2\alpha B_0\nabla_\perp'(B_{\perp1}^2-2B_0\varphi_1)\\
B_0\frac{\partial\mathbf{v}_{\perp3}}{\partial\xi}+V_A\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp3}}{\partial\xi}=\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\tau}+2\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}\{\mathbf{B}_{\perp1}(B_{\perp1}^2-B_\infty^2-2B_0\varphi_1)\}+\\
+\frac{2\varkappa}{B_0}\mathbf{x}_0\times\frac{\partial^2\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\xi^2}-\nu_m\frac{\partial^2\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\xi^2};\qquad \alpha=\frac{V_A^3}{4B_0^2(V_A^2-c_S^2)}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Вычитая из второго уравнения (2.5) первое, имеем

$$
\frac{\partial\mathbf{B}_{\perp1}}{\partial\tau}+\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}\{\mathbf{B}_{\perp1}(B_{\perp1}^2-B_\infty^2-2B_0\varphi_1)\}-
$$

$$-\alpha B_0 \nabla_\perp' (B_{\perp 1}^2 - 2B_0 \varphi_1) + \varkappa \mathbf{x}_0 \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi^2} - \frac{\nu_m}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi^2} = 0$$

Переходя к старым переменным и вводя $\mathbf{b} = \varepsilon \mathbf{B}_{\perp 1}$, $\varphi = \varepsilon^2 \varphi_1$, $b_0 = \varepsilon B_\infty$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + V_A \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \{\mathbf{b}(b^2 - b_0^2 - 2B_0 \varphi)\} -$$

$$- \alpha B_0 \nabla_\perp (b^2 - 2B_0 \varphi) + \varkappa \mathbf{x}_0 \times \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial x^2} - \frac{\nu_m}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial x^2} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla_\perp \mathbf{b}; \qquad \nabla_\perp = \left(0;\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

При $\nabla_\perp = 0$, $\nu_m = 0$ уравнение (2.6) превращается в нелинейное уравнение Шредингера с производной [5–7], а при $\varkappa = 0$, $\nu_m = 0$, $b_0 = 0$ – в уравнение для узких пучков квазипоперечных магнитогидродинамических волн, полученное в [17].

3. Наклонно распространяющиеся солитоны. Распространение солитонов произвольной амплитуды под произвольным углом к магнитному полю в плазме с холловской дисперсией исследовано в [18]. Однако общие формулы, полученные в [18], весьма громоздки, поэтому представляется более удобным исследовать распространение солитонов под малыми углами к магнитному полю непосредственно с помощью уравнения (2.6).

Будем искать решения (2.6), зависящие от $\theta = x + ky + lz - (V_A + C)t$, где $k \ll 1$, $l \ll 1$, $C \ll V_A$. Таким образом, рассматриваются волны неизменной формы, распространяющиеся под малыми углами к невозмущенному магнитному полю. Предполагаем, что решение стремится к нулю при $|\theta| \to \infty$ (т. е. в (2.6) $b_0 = 0$).

Уравнение (2.6) переписывается в виде

$$\{-C + \alpha(h^2 - B_0^2 k_\perp^2)\}\mathbf{h} + \varkappa \mathbf{x}_0 \times \frac{d\mathbf{h}}{d\theta} = CB_0 \mathbf{k}_\perp$$

$$\mathbf{k}_\perp = (0, k, l), \qquad \mathbf{h} = \mathbf{b} - B_0 \mathbf{k}_\perp \tag{3.1}$$

Вектор $\mathbf{h}$ имеет простой физический смысл: он равен компоненте магнитного поля, перпендикулярной направлению распространения волны.

Умножая (3.1) скалярно на $d\mathbf{h}/d\theta$, имеем

$$\{-C + \alpha(h^2 - B_0^2 k_\perp^2)\} \frac{dh^2}{d\theta} = 2CB_0 \mathbf{k}_\perp \frac{d\mathbf{h}}{d\theta}$$

откуда с учетом условий при $|\theta| \to \infty$ получим

$$(\mathbf{k}_\perp \mathbf{h}) = \frac{\{\alpha(h^2 - B_0^2 k_\perp^2) - C\}^2 - (C^2 + 4\alpha C B_0^2 k_\perp^2)}{4\alpha C B_0} \tag{3.2}$$

Представим $\mathbf{h}$ в виде

$$\mathbf{h} = \frac{h}{k_\perp} (\mathbf{k}_\perp \cos \varphi + (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{k}_\perp) \sin \varphi)$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\varkappa^2 \left(\frac{dh^2}{d\theta}\right)^2 = F(h^2) \equiv (h^2 - B_0^2 k_\perp^2)^2 \left\{2\alpha C B_0^2 k_\perp^2 - \left[\frac{\alpha}{2}(h^2 - B_0^2 k_\perp^2) - C\right]^2\right\} \tag{3.3}$$

откуда

$$\theta = \pm \varkappa \int \frac{dh^2}{\sqrt{F(h^2)}} \tag{3.4}$$

Из (3.3) следует, что решение возможно только при $C^2 < 2\alpha C B_0^2 k_\perp^2$.

Вычисляя интеграл в (3.4), получим

$$h^2=h_s^2 \equiv B_0^2k_\perp^2\left(1+\frac{2\sin\beta\sin 2\beta}{\operatorname{ch}(\theta/\delta)-\cos\beta}\right)$$
$$C=2\alpha B_0^2k_\perp^2\cos^2\beta;\qquad \delta^{-1}=\varkappa^{-1}B_0^2k_\perp^2|\alpha\sin 2\beta| \tag{3.5}$$

Из (3.1) с помощью (3.2) нетрудно получить

$$\varkappa\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\alpha}{4h_s^2}(h_s^2-B_0^2k_\perp^2)\{3(h_s^2-B_0^2k_\perp^2)+4B_0^2k_\perp^2\sin^2\beta\} \tag{3.6}$$

С помощью (3.5), учитывая условие $|\varphi|\to\pi$ при $|\theta|\to\infty$, из (3.6) имеем

$$\varphi=\varphi_s\equiv\operatorname{sgn}(\alpha\cos\beta)\left\{3\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{th}\frac{\theta}{2\delta}\right)-\right.$$
$$\left.-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\beta}{2}\operatorname{th}\frac{\theta}{2\delta}\right)+\pi H\left(\beta-\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \tag{3.7}$$

где H — функция Хевисайда.

В зависимости от β формулы (3.5) и (3.7) описывают три различных типа солитонов. При $0<\beta<\pi/2$ имеем $h_s^2>B_0^2k_\perp^2$, а φ_s изменяется от $-\pi\operatorname{sgn}\alpha$ до $\pi\operatorname{sgn}\alpha$, т. е. $\mathbf{h}_s$ делает один оборот вокруг $\mathbf{x}_0$ в положительном направлении при $\alpha>0$ и в отрицательном при $\alpha<0$. Такой солитон будем называть альфвеновским солитоном сжатия.

При $\pi/2<\beta<2\pi/3$ имеем $h_s^2<B_0^2k_\perp^2$, а φ_s изменяется от $\pi\operatorname{sgn}\alpha$ до $-\pi\operatorname{sgn}\alpha$, т. е. $\mathbf{h}_s$ делает один оборот вокруг $\mathbf{x}_0$ в отрицательном направлении при $\alpha>0$ и в положительном при $\alpha<0$.

Наконец, при $2\pi/3<\beta<\pi$ угол φ_s изменяется от $\pi\operatorname{sgn}\alpha$ до $(\pi-\varphi_0)\operatorname{sgn}\alpha$ при изменении θ от $-\infty$ до $-\theta_0$, затем от $(\pi-\varphi_0)\operatorname{sgn}\alpha$ до $(\pi+\varphi_0)\operatorname{sgn}\alpha$ при изменении θ от $-\theta_0$ до θ_0 и от $(\pi+\varphi_0)\operatorname{sgn}\alpha$ до $\pi\operatorname{sgn}\alpha$ при изменении θ от θ_0 до ∞. Величины φ_0 и θ_0 определяются формулами

$$\varphi_0=3\operatorname{arctg}\sqrt{\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2\operatorname{tg}\frac{3\beta}{2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{3\beta}{2}}$$
$$\theta_0=\delta\ln\left(\sqrt{4\cos^2\beta-1}-2\cos\beta\right)$$

Такой солитон будем называть магнитозвуковым (быстрым при $\alpha>0$ и медленным при $\alpha<0$).

Отметим, что формула, аналогичная (4.5), найдена в [11] с помощью решения нелинейного уравнения Шредингера с производной методом обратной задачи теории рассеяния. Однако в [11] не приведено выражение для угла φ_s и нет детального исследования полученного результата.

4. Устойчивость солитонов относительно неодномерных возмущений. Исследуем устойчивость солитонов, описываемых формулами (3.5), (3.7) относительно возмущений с очень большим поперечным масштабом. Для этого перейдем в (2.6) от x к θ, представим $\mathbf{b}$ в виде $\mathbf{b}=\mathbf{b}_s+\mathbf{b}'$, линеаризуем полученное уравнение относительно $\mathbf{b}'$ и будем полагать $\mathbf{b}\sim\exp(\lambda t+i\mu K_y y+i\mu K_z z)$, где $\mu\ll 1$. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(\mathbf{b}')=-\lambda\mathbf{b}'+2i\mu\alpha B_0\mathbf{K}(\mathbf{h}_s\mathbf{b}'-B_0\varphi')+2\alpha B_0\frac{\partial(\varphi'\mathbf{h}_s)}{\partial\theta}$$
$$L(\mathbf{b}')=\mathbf{b}'(-C+\alpha h_s^2-\alpha B_0^2k_\perp^2)+2\alpha\mathbf{h}_s(\mathbf{h}_s\mathbf{b}')+\varkappa\mathbf{x}_0\times\frac{\partial\mathbf{b}'}{\partial\theta} \tag{4.1}$$
$$\frac{\partial\varphi'}{\partial\theta}=i\mu(\mathbf{K}\mathbf{b}'),\qquad \mathbf{K}=(0,K_y,K_z)$$

При $\mu=0$ задача на собственные значения (4.1) имеет решение $\lambda=0$, $\mathbf{b}'=$

$=d\mathbf{b}_S/d\theta$. Будем искать решение (4.1) в виде

$$\mathbf{b}'=\frac{d\mathbf{b}_s}{d\theta}+\mu\mathbf{b}_1'+\mu^2\mathbf{b}_2'+\ldots$$

$$\varphi'=\mu\varphi_1'+\mu^2\varphi_2'+\ldots,\ \lambda=\mu\lambda_1+\mu^2\lambda_2+\ldots$$

В первом приближении по μ из (4.1) имеем

$$L(\mathbf{b}_1')=-\lambda_1\mathbf{b}_S+i\alpha B_0\{\mathbf{K}(h_S^2-B_0^2k_\perp^2)+2\mathbf{h}_S(\mathbf{K}\mathbf{b}_S)\} \tag{4.2}$$

С помощью (3.1) можно показать, что имеют место формулы

$$L\left(\frac{\partial\mathbf{b}_s}{\partial C}\right)=\mathbf{b}_s;\qquad L\left(\left(\mathbf{K}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}_\perp}\right)\mathbf{b}_s\right)=\alpha B_0\{\mathbf{K}(h_s^2-B_0^2k_\perp^2)+2\mathbf{h}_s(\mathbf{K}\mathbf{b}_s)\} \tag{4.3}$$

С помощью (4.3) запишем решение (4.2) в виде

$$\mathbf{b}_1'=-\lambda\frac{\partial\mathbf{b}_s}{\partial C}+i\left(\mathbf{K}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}_\perp}\right)\mathbf{b}_s \tag{4.4}$$

Во втором приближении по μ получаем

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(\mathbf{b}_2')=-\lambda_1\mathbf{b}_1'-\lambda_2\frac{d\mathbf{b}_s}{d\theta}+2i\alpha B_0\mathbf{K}(\mathbf{h}_s\mathbf{b}_1)+2\alpha B_0^2\mathbf{K}(\mathbf{K}\mathbf{b}_s)+2\alpha B_0\frac{d(\varphi_2'\mathbf{h}_s)}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}=i(\mathbf{K}\mathbf{b}_1') \tag{4.5}$$

Умножая (4.5) на $\mathbf{b}_S$ и интегрируя по θ, имеем

$$\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{b}_s\mathbf{b}_1')\,d\theta=i\alpha B_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{(\mathbf{K}\mathbf{b}_1')(h_s^2-B_0^2k_\perp^2)+2(\mathbf{K}\mathbf{b}_s)(\mathbf{h}_s\mathbf{b}_1')\}\,d\theta+2\alpha B_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{K}\mathbf{b}_s)^2\,d\theta \tag{4.6}$$

С помощью (4.4) приведем (4.6) к виду

$$\lambda_1^2\frac{\partial I_1}{\partial C}-i\lambda_1\left(\mathbf{K}\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{k}_\perp}+2\alpha B_0\frac{\partial I_2}{\partial C}\right)-2\alpha B_0\mathbf{K}\frac{\partial I_2}{\partial\mathbf{k}_\perp}=0$$

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}b_s^2\,d\theta,\qquad I_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathbf{K}\mathbf{b}_s)(h_s^2-B_0^2k_\perp^2)\,d\theta \tag{4.7}$$

Возмущение будет экспоненциально расти, если дискриминант (4.8) положителен, т. е. при условии

$$8\alpha B_0\mathbf{K}\frac{\partial I_2}{\partial\mathbf{k}_\perp}\frac{\partial I_1}{\partial C}>\left(\mathbf{K}\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{k}_\perp}+2\alpha B_0\frac{\partial I_2}{\partial C}\right)^2 \tag{4.8}$$

Вычисляя I_1 и I_2 и подставляя в (4.8), получим, что неравенство (4.8) равносильно неравенству $\cos\beta<0$. Таким образом, солитоны с $\pi/2<\beta<\pi$ неустойчивы, т. е. неустойчивы альфвеновские солитоны разрежения и магнитозвуковые солитоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов В. Б., Рудерман М. С.* Волны в плазме с холловской дисперсией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 108–113.
2. *Рудерман М. С.* Метод получения уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса // ПММ. 1975. Т. 39. № 4. С. 686–694.
3. *Рудерман М. С.* Волны в неоднородной плазме с холловской дисперсией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 139–144.
4. *Рудерман М. С.* Влияние рефракции на распространение магнитно-звуковых волн в неоднородной плазме // Физика плазмы. 1977. Т. 3. № 6. С. 1225–1235.
5. *Mjolhus E.* On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field // J. Plasma Phys. 1976. V. 16. № 3. P. 321–334.
6. *Mio K., Ogino T., Minami K., Takeda S.* Modified nonlinear Schrödinger equation

for Alfven waves propagating along the magnetic field in cold plasmas // J. Phys. Soc. Japan. 1976. V. 41. № 1. P. 265–271.
7. *Spangler S. R., Sheerin J. P.* Properties of Alfven solitons in a finite-beta plasma // J. Plasma Phys. 1982. V. 27. Pt 2. P. 193–198.
8. *Mio K., Ogino T., Minami K., Takeda S.* Modulational instability and envelope-solitons for nonlinear Alfven waves propagating along the magnetic field in plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1976. V. 41. № 2. P. 667–673.
9. *Ichikawa Y.-H., Konno K., Wadati M., Sanuki H.* Spiky soliton in circular polarized Alfven wave // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 48. № 1. P. 279–286.
10. *Kaup D. J., Newell A. C.* An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 4. P. 798–801.
11. *Kawata T., Inoue H.* Exact solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation under the nonvanishing conditions // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 6. P. 1968–1976.
12. *Wadati M., Konno K., Ichikawa Y.-H.* A generalization of inverse scattering method // J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 46. № 6. P. 1965–1966.
13. *Kawata T., Sakai J., Kobayashi N.* Inverse method for the mixed nonlinear Schrödinger equation and soliton solutions // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 48. № 4. P. 1371–1379.
14. *Payne G. L., Nicholson D. R., Downie R. M.* Numerical solution of the Zakharov equations // J. Comput. Phys. 1983. V. 50. № 3. P. 482–498.
15. *Spangler S. R., Sheerin J. P., Payne G. L.* A numerical study of nonlinear Alfven waves and solitons // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 1. P. 104–109.
16. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.* Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753–756.
17. *Рудерман М. С.* Квазипродольное распространение узких пучков нелинейных магнитогидродинамических волн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 21–28.
18. *Осин А. И.* Солитоны в плазме с холловской дисперсией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 161–168.

Москва

Поступила в редакцию
7.V.1986