

УДК 533.6.011.8

**О ГРАНИЧНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В ЗАДАЧЕ  
МЕДЛЕННОГО ОБТЕКАНИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ**

АСМОЛОВ Е. С., БОРИС А. Ю.

Показано, что при достаточно больших значениях теплопроводности конденсированной фазы  $\lambda'$  по сравнению с теплопроводностью пара  $\lambda$  ( $\lambda/\lambda' \sim \text{Kn}$ ) учет эффектов, связанных с наличием на испаряющейся поверхности частицы слоя Кнудсена, необходим для получения решения задачи о медленном ( $\text{Re}_\infty \ll 1$ ) обтекании сферической частицы сплошнородным (число Кнудсена  $\text{Kn} \ll 1$ ) потоком ее пара. Рассчитана сила сопротивления для различных видов граничных условий на поверхности частицы.

1. Задача определения силы сопротивления испаряющейся в свой пар частицы требует знания распределений скорости испарения на поверхности частицы и температуры газа вблизи нее. Вообще говоря, для выяснения граничных условий на испаряющейся поверхности, даже в случае сплошнородного течения ( $\text{Kn} \ll 1$ ), необходимо решение кинетического уравнения в тонком пристеночном слое Кнудсена, имеющем размер порядка длины свободного пробега  $l$  ( $\text{Kn} = l/r_w$ ,  $l = \nu_w(2m/kT_w)^{1/2}$ ,  $\nu_w = \nu(T_w)$ ,  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $r_w$  — радиус частицы,  $T_w$  — температура газа у поверхности частицы). В литературе часто приводятся полученные с помощью простейших предположений о виде функции распределения молекул пара в кнудсеновском слое классическая формула Герца — Кнудсена (1.1) [1] и ее модификация (1.2) [2], связывающие расход испарения с параметрами пара вблизи поверхности:

$$(nv)_w = a \frac{n_{ew} - n_w}{2\sqrt{\pi}} h_w^{-1/2}, \quad T_w = T_w', \quad h_w = \frac{m}{2kT_w'} \quad (1.1)$$

$$(nv)_w = \frac{a}{1 - 0,5a} \frac{n_{ew} - n_w}{2\sqrt{\pi}} h_w^{-1/2}, \quad T_w = T_w' \quad (1.2)$$

Здесь и далее величины со штрихом относятся к конденсированной фазе, без штриха — к газу, индексом  $W$  обозначены величины на межфазной границе,  $n_{ew}$  — плотность насыщенного пара при температуре поверхности  $T_w'$ ,  $a$  — коэффициент испарения, остальные обозначения общеприняты.

Более точные выражения для расхода испарения и скачка температуры дает решение в слое Кнудсена модельного кинетического уравнения [3]

$$(nv)_w = \frac{a}{1 - 0,535a} \left[ \frac{n_{ew} - n_w}{2\sqrt{\pi}} h_w^{-1/2} - 0,154 \left( \frac{\lambda}{k} \frac{\partial \ln T}{\partial r} \right)_w \right]$$

$$\frac{T_w - T_w'}{T_w'} = -0,44 \nu_w h_w^{1/2} + \left( \frac{\lambda}{p} \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w h_w^{1/2} \quad (1.3)$$

Обычно, однако, температура поверхности  $T_w'$  не задается, а опреде-

ляется из баланса энергии на поверхности раздела. В этой связи необходимо отметить, что в случае слабого испарения ( $v_w h_w^{1/2} \ll 1$ ), используя любое из граничных условий (1.1), (1.2) или (1.3), можно получить оценку

$$(n_w - n_{ew})/n_w \sim (T_w - T_w')/T_w' \sim (p_w - p_{ew})/p_w \sim v_w h_w^{1/2} \ll 1 \quad (1.4)$$

т. е. в главном приближении температуры поверхности и пара вблизи нее равны, а плотность и давление равны плотности и давлению насыщенного пара.

На основе этого простого соображения о квазиравновесности [4] граничные условия на испаряющейся поверхности ставятся, как правило, без непосредственного использования соотношений (1.3) ((1.1) или (1.2)). Температуры поверхности и газа вблизи нее при этом полагаются равными температуре насыщения, а расход испарения определяется из условия неразрывности потока энергии на межфазной границе

$$T_w = T_w' = T_s \equiv T_{ew}(p_\infty) \quad (1.5)$$

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)_w + n_w v_w L = \left(-\lambda' \frac{\partial T'}{\partial r}\right)_w \quad (1.6)$$

Здесь  $L$  — теплота испарения, приходящаяся на одну молекулу.

Задача о медленном обтекании испаряющейся сферы своим паром с использованием граничных условий (1.5), (1.6) решена в [5, 6]. Аналогичная задача в случае фиксированной температуры частицы с использованием в качестве граничных условий соотношений (1.3) рассмотрена в [7]. В этих работах задачи решались методом сращиваемых асимптотических разложений по малому параметру  $Re_\infty = u_\infty r_w / \nu_w \ll 1$ . В качестве нулевого приближения выбиралось сферически-симметричное решение задачи об испарении неподвижной частицы в собственный пар. Число Рейнольдса, определенное по скорости испарения,  $Re_w \ll 1$ . Набегающий поток оказывает лишь возмущающее воздействие, приводя к появлению несимметрии распределения гидродинамических величин в потоке и на поверхности частицы: скорости испарения  $v_{1w}$  и теплового потока  $q_{1w}$  в первом приближении по  $Re_\infty$ . Несимметричные части соответствующих величин имеют порядок  $v_{1w}/v_{0w} \sim q_{1w}/q_{0w} \sim Re_\infty$ . Тем не менее малые поправки к скорости испарения конечным образом изменяют величину силы сопротивления частицы.

Как будет показано ниже, использование различных граничных условий в работах [5, 6] и [7] соответствует различным неявным предположениям о соотношении параметров  $\Lambda = \lambda'/\lambda$  и  $Kn$ . Постановки задач в [5, 6] справедливы при  $\Lambda Kn \ll 1$ , а в [7] при  $\Lambda Kn \gg 1$ . При произвольном отношении величин  $\Lambda$  и  $Kn$  необходимо решать сопряженную задачу в наиболее общей постановке с учетом распределения тепла в частице, с использованием выражений для скорости испарения и скачка температур (1.3) (или (1.1), (1.2)) и условия неразрывности энергии на межфазной границе (1.6).

Необходимость учета слоя Кнудсена при произвольных  $\Lambda$  в случае нестационарного испарения неподвижной частицы была показана в [8].

2. Пусть  $\Lambda$  настолько велико, что малые перепады температуры поверхности частицы  $\Delta T_w'$ , задаваемые соотношениями (1.3), приводят к появлению внутри частицы теплового потока, сравнимого с несимметричной частью потока тепла из газа.

Величина несимметричной части теплового потока в газовой фазе по порядку величины равна

$$q_1 \sim Re_\infty \lambda_w (T_w - T_\infty) / r_w$$

Используя граничное условие (1.6) и считая в нем члены  $n_w v_w L$  и  $q$

величинами одного порядка, с учетом того, что  $\lambda_w \sim kn_w l h_w^{-1/2}$ , получим оценку скорости испарения

$$v_{1w} \sim \text{Re}_\infty \text{Kn} h_w^{-1/2} k (T_w - T_\infty) / L$$

В случае конечных перепадов температур частицы и газа вдали от нее ( $k(T_w - T_\infty)/L \sim 1$ ) из оценки (1.4) имеем для возмущения температуры поверхности частицы:  $\Delta T_w' \sim T_w \text{Kn} \text{Re}_\infty$ . Наконец, для несимметричной части теплового потока в конденсированной фазе получим

$$q_{1w}' = \left( -\lambda' \frac{\partial \Delta T'}{\partial r} \right)_w \sim \lambda' \frac{T_w \text{Kn} \text{Re}_\infty}{r_w}$$

Величина  $q_{1w}'$  оказывается сравнимой с тепловым потоком в газовой фазе  $q_{1w}$  при соотношении теплопроводностей  $\Lambda = \lambda'/\lambda \sim \text{Kn}^{-1}$ . Следовательно, при  $\Lambda \text{Kn} \sim 1$  определение несимметричной части скорости испарения  $v_{1w}$  из условия баланса энергии на поверхности (1.6) и силы сопротивления частицы возможно лишь при правильном учете малых поправок к температуре насыщения  $\Delta T_w' \sim T_w \text{Kn} \text{Re}_\infty$  на основе соотношений 1.3 (или (1.1), (1.2)).

Приведенные оценки показывают, что определение  $v_{1w}$  из граничного условия (1.6), в котором опущен член  $(-\lambda' \partial T' / \partial r)_w$ , как это было сделано в [5], соответствует предельному случаю  $\Lambda \text{Kn} \ll 1$ , а использование в качестве одного из граничных условий заданной температуры частицы и определение скорости испарения из соотношений (1.3) [7], соответствует предельному случаю  $\Lambda \text{Kn} \gg 1$ .

Следует также отметить, что аналогичные соображения относительно необходимости учета слоя Кнудсена в задаче обтекания теплопроводной испаряющейся частицы можно привести и в случаях  $\text{Re}_\infty \sim 1$ ,  $\text{Re}_\infty \gg 1$ .

3. Рассмотрим ситуацию, когда  $\Lambda \text{Kn} \sim 1$  и необходимо совместное решение уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности в частице с полными граничными условиями (1.3) и (1.6).

Произведем обезразмеривание следующим образом: температуру, плотность и коэффициенты переноса отнесем к их значениям у поверхности частицы, координаты — к радиусу сферы  $r_w$ , скорость — к «вязкой» скорости  $v_w/r_w$ , теплоту испарения  $L$  — к  $kT_w$ . Введем вместо давления  $p$  безразмерную величину  $\pi$ :  $p/p_\infty = 1 + \text{Kn}^2 \pi$ . Предполагается, что газ одноатомный,  $\kappa = c_p/c_v = 5/3$ .

Медленные ( $\text{Re} \sim 1$ ), неизотермические ( $\Delta T/T \sim 1$ ) течения газа при  $\text{Kn} \ll 1$  описываются, вообще говоря, уравнениями, содержащими температурные напряжения [9]. Однако поскольку целью настоящей работы является выяснение роли слоя Кнудсена для определения силы сопротивления испаряющейся частицы, а температурные напряжения, как показывают расчеты [7], в данной задаче не оказывают существенного влияния, будем описывать течение системой уравнений Навье — Стокса для медленных течений (в уравнении энергии, как обычно, пренебрегаем вязкой диссипацией энергии). Динамическая вязкость  $\mu$  и теплопроводность предполагаются линейно зависящими от температуры, число Прандтля  $\text{Pr} = 2/3$ . Внутри сферы распределение температуры описывается уравнением Лапласа.

Аналогично [7] решение можно искать в виде разложения по малому параметру  $\text{Re}_\infty$  (отметим лишь, что возмущение температуры внутри сферы, согласно оценкам разд. 2, имеет порядок  $\text{Kn} \text{Re}_\infty$ ) и разделение переменных свести систему уравнений первого приближения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \text{Re}_\infty \mathbf{v}_1 + \dots, & T &= T_0 + \text{Re}_\infty T_1 + \dots, & T' &= T'_0 + \text{Re}_\infty \text{Kn} T'_1 + \dots \\ \Pi &= \pi - 1/3 \mathbf{v} \nabla T = \Pi_0 + \text{Re}_\infty \Pi_1 + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
v_{1r} &= f(r) \cos \theta, \quad v_{1\theta} = -g(r) \sin \theta, \quad T_1 = T_0^{-1} \tau(r) \cos \theta \\
T_1' &= \tau'(r) \cos \theta, \quad \Pi_1 = h(r) \cos \theta \\
f &= (T_0^{-1} T_0' - 2r^{-1}) f + 2r^{-1} g - 2T_0^{-3} T_0' v_0' \tau + T_0^{-2} v_0 \tau' \\
\tau'' &= {}^2/3 T_0^{-1} T_0' f + (2r^{-2} - {}^4/3 T_0^{-3} T_0' v_0) \tau + ({}^2/3 T_0^{-2} v_0 - 2r^{-1}) \tau' \\
h &= (T_0^{-1} (T_0')^2 - 2r^{-2} T_0 + T_0'' - 6r^{-1} T_0' - {}^1/3 T_0^{-2} T_0' v_0 + 2r^{-1} T_0^{-1} v_0 - \\
&\quad - T_0^{-1} v_0') f + (2r^{-2} T_0 + 6r^{-1} T_0' - 2r^{-1} T_0^{-1} v_0) g + 2r^{-1} T_0 g' + \\
&\quad + (3T_0^{-3} (T_0')^2 v_0 - 2T_0^{-2} T_0' v_0 - 3T_0^{-2} T_0' v_0' + T_0^{-1} v_0'' + \\
&\quad + 2r^{-1} T_0^{-1} v_0' + T_0^{-3} v_0 v_0' + 2r^{-1} T_0^{-3} T_0' v_0 - {}^2/3 T_0^{-4} v_0^2) \tau + \\
&\quad + (2T_0^{-1} v_0' - 2T_0^{-2} T_0' v_0 - 4r^{-1} T_0^{-1} v_0 - {}^1/3 T_0^{-3} v_0^2) \tau' \\
g &= -r^{-1} (T_0^{-1} T_0' + 2r^{-1}) f + r^{-1} (T_0^{-1} T_0' + 2r^{-1} + T_0^{-2} v_0) g + \\
&\quad + r^{-1} T_0^{-1} h + (T_0^{-2} v_0 - T_0^{-1} T_0' - 2r^{-1}) g' + r^{-1} T_0^{-2} v_0' \tau, \quad r \geq 1 \\
(\tau')'' &= 2r^{-2} \tau' - 2r^{-1} (\tau')', \quad r < 1, \quad A' \equiv dA/dr
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Нулевое приближение  $v_0$ ,  $T_0$  разложения (3.1), входящее в коэффициенты системы (3.2), соответствует сферически-симметричному испарению неподвижной частицы [4]

$$r^2 T_0 T_0' = {}^2/3 v_{0w} (T_0 + {}^2/3 L - 1), \quad T_0(1) = 1, \quad T_0(\infty) = T_\infty, \quad v_0 = v_{0w} T_0 r^{-2}$$

Граничные условия для уравнений (3.2) вдали от сферы могут быть получены аналогично [7] методом сращиваемых асимптотических разложений и приведены к следующему виду:

$$r \rightarrow \infty, \quad f = 1, \quad g = 1, \quad \tau = -{}^2/9 v_{0w} (T_\infty + {}^2/5 L - 1) \tag{3.4}$$

Возмущения тангенциальной скорости и температуры газа у поверхности частицы в нулевом приближении по  $\text{Kn}$  равны нулю, так как скорость скольжения и скачок температур малы по сравнению с характерными значениями полей скорости и температуры

$$r = 1, \quad g = 0, \quad \tau = 0 \tag{3.5}$$

Однако учет скачка температур, как показано в разд. 2, необходим при определении возмущения скорости вдува на поверхности частицы при  $\Lambda \sim \text{Kn}^{-1}$ . Используя линеаризованные выражения (1.3) или (1.1), (1.2), получим

$$r = 1, \quad f = \left( 1 - \frac{A_1 B_2}{2\sqrt{\pi}} \right)^{-1} \left[ \frac{A_1}{2\sqrt{\pi}} L \tau' + \left( \frac{A_1 B_2}{2\sqrt{\pi}} + A_2 \right) \frac{c_p}{\text{Pr}} \tau \right] \tag{3.6}$$

Коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$  имеют следующие значения:  $A_1 = a$ ,  $A_2 = B_1 = B_2 = 0$  для формул (1.1);  $A_1 = a/(1 - 0,5a)$ ,  $A_2 = B_1 = B_2 = 0$  для (1.2);  $A_1 = a/(1 - 0,535a)$ ,  $A_2 = -0,154A_1$ ,  $B_1 = -0,44$ ,  $B_2 = 1$  для (1.3).

Линеаризованное соотношение для баланса энергии на поверхности частицы (1.6) запишется в виде

$$r = 1, \quad -\tau' + (\text{Pr}/c_p) L f \rightarrow -\Lambda \text{Kn} (\tau')'. \tag{3.7}$$

Поскольку в выражения (3.6), (3.7) входит величина  $\tau'(1)$  — возмущение температуры поверхности частицы, при  $\Lambda \text{Kn} \sim 1$  необходимо, как и указывалось в разд. 2, совместное решение газодинамической задачи и уравнения теплопроводности внутри частицы с учетом слоя Кнудсена.

Решением уравнения (3.3), описывающего распределение температуры внутри частицы, очевидно является  $\tau' = \tau'(1)r$  ( $r \leq 1$ ). Используя это решение, получим из (3.6), (3.7)

$$r = 1, \quad f = \alpha \tau' \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= [A_1 L + (A_1 B_2 / \sqrt{2} + A_2 \sqrt{2\pi}) c_p \text{Pr}^{-1} \Lambda \text{Kn}] \times \\
&\quad \times [A_1 L^2 \text{Pr} c_p^{-1} + (\sqrt{2\pi} - A_1 B_1 / \sqrt{2}) \Lambda \text{Kn}]^{-1}
\end{aligned}$$

Таким образом, для определения возмущенных значений газодинамических величин  $f$ ,  $g$ ,  $\tau$ ,  $h$  имеем замкнутую краевую задачу — уравнения (3.2) с граничными условиями (3.4), (3.5), (3.8).

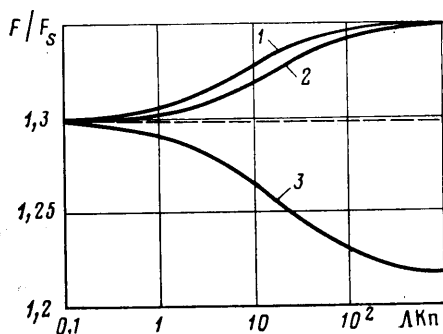
Нетрудно видеть, что входящий в граничное условие (3.8) параметр  $\alpha$  отличается для разных форм записи зависимостей в слое Кнудсена и разных соотношений параметров  $\Lambda$  и  $\text{Kn}$ .

Соответствующие работам [7] и [5] предельные значения параметра  $\alpha$  равны

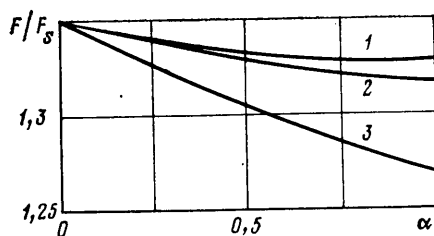
$$\alpha = (A_1 B_2 + A_2 2\sqrt{\pi}) (2\sqrt{\pi} - A_1 B_1)^{-1} c_p \text{Pr}^{-1}, \quad \Lambda \text{Kn} \gg 1 \quad (3.9)$$

$$\alpha = c_p \text{Pr}^{-1} L^{-1}, \quad \Lambda \text{Kn} \ll 1$$

Различие параметра  $\alpha$  при разных способах постановки граничных условий приведет к тому, что окажутся разными также и значения силы



Фиг. 1



Фиг. 2

сопротивления, выражение для которой может быть приведено к виду

$$F = \frac{2}{3} F_s [2g^* + (T_0^* - 2 - 2v_0 + \alpha v_0) f - h], \quad F_s = 6\pi \mu_w u_\infty r_w$$

4. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2) с краевыми условиями (3.4), (3.5), (3.8) интегрировалась численно, по методу, предложенному в [40].

Результаты расчетов отношения  $F/F_s$  в зависимости от параметра  $\Lambda \text{Kn}$  при  $L=10$ ,  $T_\infty=2$  и фиксированном значении коэффициента испарения  $a=1$  представлены на фиг. 1. Кривые 1, 2 и 3 получены с использованием соответственно формул (1.1), (1.2), (1.3). Пунктиром нанесено значение  $F/F_s$ , соответствующее предельному значению параметра  $\alpha$  при  $\Lambda \text{Kn} \rightarrow 0$  (3.9).

Из графиков видно, что зависимости силы сопротивления качественно отличаются для разных форм записи граничных условий на поверхности частицы: величина  $F/F_s$  при заданном отношении теплопроводностей  $\Lambda$  возрастает с увеличением числа Кнудсена при использовании условий (1.1) или (1.2), в которых не учитывается скачок температур (кривые 1, 2), и убывает при использовании соотношений (1.3), учитывающих скачок температуры на межфазной границе. Однако количественные различия величины силы сопротивления при использовании различного вида граничных условий сравнительно невелики.

Зависимости отношения  $F/F_s$  от величины коэффициента испарения  $a$  при фиксированном значении произведения  $\Lambda \text{Kn}=10$  приведены на фиг. 2. Как видно, для кривых 1 и 2 величина коэффициента испарения слабо влияет на силу сопротивления частицы.

В заключение авторы благодарят В. С. Галкина и М. Н. Когана за полезные обсуждения работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. М.: Metallurgy, 1966. 196 с.
2. Кучеров Р. Я., Рикенглас Л. Э. О гидродинамических граничных условиях при испарении и конденсации // ЖЭТФ, 1959. Т. 37. № 1. С. 125—126.
3. Макашев Н. К. Испарение, конденсация и гетерогенные химические реакции при малых значениях числа Кнудсена // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 3. С. 49—62.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Бродский С. С., Головин А. М. Влияние асимметрии теплового потока на силу сопротивления капли в натекающем вязком потоке // Инж.-физ. журн. 1976. Т. 30. № 3. С. 494—498.
6. Montucon J. Heat and mass transfer in the vicinity of an evaporating droplet // Int. J. Multiphase Flow. 1975. V. 2. № 2. P. 171—182.
7. Борис А. Ю. Медленное обтекание сильно нагретой сферы при вдуве и испарении с ее поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 4. С. 128—134.
8. Асмолов Е. С., Козан М. Н. О роли слоя Кнудсена в задаче об испарении капли // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 127—131.
9. Козан М. Н., Галкин В. С., Фридендер О. Г. О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физ. наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111—125.
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171—174.

Москва

Поступила в редакцию  
2.IV.1986