МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1987

УДК 533.6.01

ОДНОМЕРНЫЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА С ЛИНЕЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТИ ПО КООРДИНАТЕ

БУРДЭ Г. И.

В работе рассматриваются одномерные движения совершенного газа в случаях сферической, цилиндрической и плоской симметрий, для которых величина скорости пропорциональна расстоянию до центра симметрии. Получены решения, которые являются обобщением известных решений Л. И. Седова [1, 2] на случай вязкого теплопроводного газа со степенной зависимостью коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры.

Будем рассматривать одномерные движения совершенного газа, для которых скорость представляется выражением

$$v=\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}r \tag{1}$$

где r — расстояние до центра симметрии, $R(t)$ — функция времени.

Уравнения, описывающие одномерные движения вязкого теплопроводного газа, в переменных $\xi=r/R$, t имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\nu}{R}\frac{dR}{dt}\rho=0$$

$$\rho R\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\rho}{\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\gamma}{R^2}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\nu\right)\left(\frac{\chi}{\xi}\frac{\partial E}{\partial\xi}\right)-\frac{\nu}{R}\frac{dR}{dt}Q$$

$$Q=(\gamma-1)\rho E-\frac{\nu}{R}\frac{dR}{dt}AE^n$$

$$\chi=kE^n,\qquad \lambda=aE^n,\qquad \mu=bE^n,\qquad A=a-\frac{2b}{3}+\frac{2b}{\nu}$$

$$\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\nu\right)\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)=4\pi fR^2\rho \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность, E — удельная внутренняя энергия, $\gamma=c_p/c_v$, $\chi=\varkappa/c_p$, где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, λ — коэффициент объемной вязкости, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, Φ — гравитационный потенциал, f — гравитационная постоянная, величина ν указывает вид симметрии задачи ($\nu=1, 2, 3$).

Рассмотрим сначала движения газа в отсутствие сил тяготения (система (2) без последнего слагаемого в уравнении движения). В случае адиабатических движений ($a=b=k=0$) решение, полученное в [1], можно записать в виде

$$\rho=R^{-\nu}\frac{\psi'}{\xi},\qquad E=R^{-\alpha}\left(C_1\frac{\xi}{\psi'}+C_2\frac{\xi\psi}{\psi'}\right) \tag{4}$$

$$V=\pm\left(C_3+\frac{2C_2}{\nu}R^{-\alpha}\right)^{1/2} \tag{5}$$

$$V=dR/dt,\quad \alpha=\nu(\gamma-1) \tag{6}$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, $\psi(\xi)$ — произвольная функция, $\psi'=d\psi/d\xi$.

Решения системы (2) с учетом вязкости и теплопроводности можно представить в виде, сходном с (4)

$$\rho=R^{-\nu}\frac{\psi'}{\xi},\qquad E=U_1(t)\frac{\xi}{\psi'}+U_2(t)\frac{\xi\psi}{\psi'} \tag{7}$$

но эти решения требуют специального выбора функции $\psi(\xi)$, причем зависимости $U_1(t)$, $U_2(t)$, $R(t)$ определяются соотношениями, вообще говоря, не совпадающими с (4), (5).

Укажем сначала решения, существующие при любых значениях параметров в системе (2). Наиболее простое решение соответствует движениям с однородным распределением плотности и энергии по координате (используются обозначения (6))

$$\begin{gathered}\rho=C_1R^{-\nu},\quad E=U(t),\quad dV/dt=0\\ U=R^{-\alpha}\left[C_2+(1-n)\frac{\nu^2AV}{C_1}Z(R)\right]^{1/1-n}\qquad (n\neq 1)\\ U=R^{-\alpha}C_2\exp\left[\frac{\nu^2AV}{C_1}Z(R)\right]\qquad (n-1)\\ Z(R)=\int\limits_1^R \tau^{\alpha(1-n)+\nu-2}\,d\tau\end{gathered} \tag{8}$$

Это решение получается из (7), если положить

$$\psi=C_1\xi^2/2,\quad U_1=C_1U,\quad U_2=0$$

Решение с неоднородным распределением величин ρ и E по координате имеет вид

$$\rho=C_1R^{-\nu}\xi^{2n-2},\quad E=U(t)\xi^2 \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{dV}{dt}=\frac{2n}{\nu}\left(\frac{\nu^2A}{C_1}R^{\nu-2}U^nV_n-\frac{\alpha U}{R}\right)\\ \frac{dU}{dt}=V\left(\frac{\nu^2A}{C_1}R^{\nu-2}U^nV-\frac{\alpha U}{R}\right)+\frac{2\gamma k}{C_1}(2n+\nu)R^{\nu-2}U^{n+1}\end{gathered} \tag{10}$$

и получается из (7), если

$$\psi=C_1\int\limits_{\delta_{n0}}^{\xi} z^{2n-1}\,dz,\qquad U_1=\delta_{n0}C_1U,\qquad U_2=2nU$$

Здесь δ_{n0} — символ Кронеккера.

Из (10) видно, что при сжатии газа ($V<0$) величины $|V|$ и U монотонно растут ($d|V|/dt>0$, $dU/dt>0$), а при расширении газа ($V>0$) величина V в зависимости от начальных условий может как увеличиваться, так и уменьшаться — в последнем случае происходит смена знака V. Заметим еще, что при $n<1$ решение (9) нельзя продолжить до центра симметрии.

При некоторых выделенных значениях параметров в системе (2) можно указать решения, отличные от (8), (9). Далее для краткости не будем приводить и обсуждать формулы, относящиеся к временно́й зависимости решений.

Случай $n=0$:

$$\rho=C_1R^{-\nu},\qquad E=\frac{U_1(t)}{C_1}+\frac{U_2(t)}{2}\xi^2,\qquad \psi=\frac{C_1}{2}\xi^2$$

$$\rho=C_1R^{-\nu}\xi^{-2},\qquad E=\frac{U_1(t)}{C_1}\xi^2+\frac{U_2(t)}{m}\xi^2\ln\xi^m,\qquad \psi=\frac{C_1}{m}\ln\xi^m$$

$$\rho=C_1R^{-\nu}\xi^{\nu-2},\qquad E=\frac{U_1(t)}{C_1}\xi^{2-\nu}+\frac{U_2(t)}{\nu}\xi^2,\qquad \psi=\frac{C_1}{\nu}\xi^\nu$$

$$\rho=\frac{R^{-\nu}}{F(\xi)},\qquad E=U(t)F(\xi),\qquad F(\xi)=C_1+C_2\int_1^\xi z^{1-\nu}\,dz+C_3\xi^2$$

$$\psi=\int_1^\xi\frac{z\,dz}{F(z)},\qquad U_1=U,\qquad U_2=0$$

Случай $n=1$:

$$\rho=C_1R^{-\nu},\qquad E=\frac{U_1(t)}{C_1}+\frac{U_2(t)}{2}\xi^2,\qquad \psi=\frac{C_1}{2}\xi^2$$

Случай $A=0$ (например, одноатомный газ и сферическая симметрия, см. последнюю формулу системы (2)):

$$\rho=\frac{C_1R^{-\nu}}{h^{1/(n+1)}}\exp\left(\int_1^\xi\frac{z\,dz}{h^{1/(n+1)}}\right),\qquad E=U(t)h^{1/(n+1)},\qquad h=C_2+C_3\int_1^\xi z^{1-\nu}\,dz$$

$$\psi=C_4+C_1\exp\left(\int_1^\xi\frac{z\,dz}{h^{1/(n+1)}}\right),\qquad U_1=-C_4U,\qquad U_2=U$$

$$\rho=\frac{R^{-\nu}}{F^{1/(n+1)}},\qquad E=U(t)F^{1/(n+1)},\qquad F=C_1+C_2\int_1^\xi z^{1-\nu}\,dz+C_3\xi^2$$

$$\psi=\int_1^\xi\frac{z\,dz}{F^{1/(n+1)}},\qquad U_1=U,\qquad U_2=0$$

Укажем также некоторые решения системы (2), (3), описывающей движения вязкого теплопроводного газа с учетом сил тяготения (предполагается $\nu=3$, значения $n<0$ не рассматриваем).

Случай однородного распределения ρ и E по координате:

$$\rho=C_1R^{-3},\qquad E=U(t),\qquad \Phi=\frac{2\pi fC_1}{3}R^{-1}\xi^2+C_2$$

Случай $n=0$:

$$\rho=C_1R^{-3},\qquad E=U_1(t)+U_2(t)(\xi^2+C_2\xi^{-1})\tag{11}$$

$$\Phi=\frac{2\pi fC_1}{3}R^{-1}\xi^2-(\gamma-1)C_2U_2\xi^{-1}+C_3$$

Случай $n=1$:

$$\rho=C_1R^{-3},\qquad E=U_1(t)+U_2(t)\xi^2,\qquad \Phi=\frac{2\pi fC_1}{3}R^{-1}\xi^2+C_2 \tag{12}$$

Решению (11) соответствуют функции $U_2(t)$ и $R(t)$ того же вида, что и для аналогичного решения в адиабатическом случае, но функция $U_1(t)$ не совпадает с $U_2(t)$. В (12) все функции $U_1(t)$, $U_2(t)$, $R(t)$ отличаются от адиабатического решения.

Случай $\gamma=4/3$ и $A=0$

$$\rho=\frac{C_1R^{-3}}{\xi^2},\qquad E=6\pi fC_1R^{-1},\qquad \Phi=4\pi fC_1R^{-1}\ln\xi+C_2 \tag{13}$$

$$\rho=C_1R^{-3}\xi^{-(2n+3)/(n+1)},\qquad E=\frac{12\pi fC_1(n+1)^2}{n(2n+4)}R^{-1}\xi^{-1/(n+1)}$$

$$\Phi=-\frac{4\pi fC_1(n+1)^2}{n}R^{-1}\xi^{-1/(n+1)}+C_2$$

Решениям (13) соответствуют движения с $V=\mathrm{const}$. Решения с $V\neq\neq\mathrm{const}$ в случае $\gamma=4/3$ существуют при $n=5/2$ и выражаются через решения уравнения Эмдена с индексом 5/7.

Автор благодарен Л. И. Седову за внимание к работе и А. Г. Куликовскому за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Об интегрировании уравнений одномерного движения газа // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. № 5. С. 735.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.

Пермь

Поступила в редакцию 29.IV.1986