МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1987

УДК 532.593

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

КОГАН В. Р., ЧУРИЛОВ Ю. А.

Свойства нестационарных поверхностных волн конечной амплитуды с учетом сил поверхностного натяжения рассматривались в [1–3]. В этих работах на полуэвристическом уровне в рамках квазистационарных моделей исследовано возникновение капиллярной ряби, оценены ее параметры и вычислена реакция ряби на гравитационную волну. При этом остались невыясненными процесс зарождения ряби, динамика ее развития на начальном этапе и границы применимости гипотезы квазистационарности.

Параллельно с этими работами появились публикации [4, 5] по численному моделированию на ЭВМ прогрессивных симметричных периодических гравитационно-капиллярных волн конечной амплитуды, имеющие своими истоками классические работы А. И. Некрасова, Т. Леви-Чивиты, Я. И. Секерж-Зеньковича. Результаты этих работ свидетельствуют об исключительной сложности явления даже в случае прогрессивных симметричных волн.

В [8] впервые численно моделировалась динамика гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости. В настоящей работе в круге идей работы [8] создан алгоритм численного моделирования нестационарных гравитационно-капиллярных волн конечной амплитуды. Переход от гравитационных волн к гравитационно-капиллярным нетривиален – в уравнении Коши – Лагранжа формально появляется малый параметр при старшей производной. На физическом языке это означает, что начинают взаимодействовать волны с различными масштабами с двух ветвей дисперсионной характеристики, вследствие чего становится неприемлемой процедура сглаживания, которая играла центральную роль в алгоритме работы [8]. В результате численного моделирования установлены принципиальные отличия динамики гравитационных и гравитационно-капиллярных волн. Для качественного объяснения эффекта возникновения ряби и особенности ее развития использована вариационная теория конформных отображений.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается плоскопараллельное потенциальное, периодическое по горизонтальной координате течение жидкости бесконечной глубины. Жидкость предполагается невязкой, постоянной плотности и покоящейся на бесконечности.

Изучается временна́я эволюция начального возмущения поверхности под действием силы тяжести и поверхностного натяжения. Задача состоит в отыскании формы свободной поверхности и потенциала скорости $\varphi$ в области течения $G$, занятой одним периодом волны.

Пусть $(x, y)$ – лагранжева координата точки на свободной поверхности. Уравнения движения точек поверхности жидкости в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad \frac{d\varphi}{dt}=-p_s-y+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \tag{1.1}$$

Здесь первые два уравнения – кинематические условия, связывающие лагранжево и эйлерово описание, третье – следствие интеграла Коши – Лагранжа; $p_s=p_a-\mathrm{We}\,K$ – давление на поверхности волны, $K$ – ее локальная кривизна; $p_a$ – атмосферное давление. Система записана в безразмерном виде. В качестве масштаба длины выбрано $L_M=\lambda/2\pi$, где $\lambda$ — длина волны, т. е. $L_M=1/k$, $k$ — волновое число; масштаба времени $T_M=1/\sqrt{kg}$. Очевидно $T_M$ и $L_M$ связаны с периодом и длиной прогрессивной гравитационной волны в линейном приближении. В качестве единиц плотности выбрана $\rho_M=10^3$ кг/м$^3$ — плотность воды; масштаба давления $p_M=\rho_M g L_M$; $\mathrm{We}=\gamma/\rho_M g L_M{}^3$ — число Вебера и $\gamma=0{,}074$ н/м — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела вода — воздух.

Конформным отображением $\zeta=e^{-iz}=re^{i\theta}$ ($y=\ln r$, $x=2\pi-\theta$) отобразим область $G$ на внутренность некоторой замкнутой кривой $C$ в плоскости $\zeta$ [8]. Здесь использован тот факт, что функция $\varphi$ периодична по $x$ с периодом $2\pi$ и, следовательно, контур можно склеить по разрезу. Заметим, что $\zeta$ неоднолистно в точке $z=\infty$, поэтому всюду далее рассмотрение ведется на одном листе римановой поверхности. Полученную область в дальнейшем будем обозначать $G_\zeta$.

В окрестности $C$ введем локальные координаты $(s, n)$, где $s$ — длина дуги на $C$, $n$ — внешняя нормаль к $C$. Если функции $r$, $\theta$, $\varphi$ на контуре $C(t)$ известны, то можно найти производные $\partial r/\partial s$, $\partial\theta/\partial s$, $\partial\varphi/\partial s$ на нем. Поэтому в правой части системы (1.1), записанной для $r$, $\theta$, $\varphi$ как функций $(s, n)$, оказывается неизвестной только $\partial\varphi/\partial n$ на $C(t)$. Получим уравнение для ее определения.

Пусть $Q\in G_\zeta$ — произвольная фиксированная точка, $P$ — текущая точка контура. Из интегральной формулы Коши для комплексного потенциала и формул Коши — Римана нетрудно получить

$$\varphi(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c(t)}\varphi\,d\alpha-\ln R\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds$$

Здесь $\alpha$ — угол между горизонталью и вектором $\mathbf{QP}$, $R=|\mathbf{QP}|$. Если точка $Q$ лежит на $C(t)$, то из формул Сохоцкого — Племеля имеем

$$\int\varphi\,d\alpha=\mathrm{v.p.}\int\limits_{c(t)}\varphi\,d\alpha+\pi\varphi(Q)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения. Отсюда получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром

$$\int\limits_{c(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}(P)\ln R(P)\,ds=\mathrm{v.p.}\int\limits_{c(t)}\varphi(P)\,d\alpha-\pi\varphi(Q) \qquad (1.2)$$

**2. Метод численного решения.** Пусть в момент времени $t=t_0$ задается профиль волны и потенциал на нем в виде $\{x(j,t_0),\ y(j,t_0),\ \varphi(j,t_0)\}$, где $1\leqslant j\leqslant N$ и $j$ изменяется по целым числам. В силу периодичности при любом $t$ выполняется $r(1,t)=r(N,t)$, $\theta(1,t)=\theta(N,t)$, $\varphi(1,t)=\varphi(N,t)$. Бесконечномерная система (1.1) при этом становится системой $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений и описывает временну́ю эволюцию частиц поверхности жидкости и потенциала. Она решалась для функций $r(s,n)$, $\theta(s,n)$, $\varphi(s,n)$ методом Рунге — Кутта в сочетании с методом Адамса.

Уравнение (1.2), имеющее особенность в ядре при $R=0$, регуляризировалось разложением плотности $\partial\varphi/\partial n$ в степенно́й ряд с последующим применением явных квадратурных формул. Получающаяся в результате регуляризации система линейных алгебраических уравнений относительно $(\partial\varphi/\partial n)_j$ решалась методом Гаусса.

Точность решения уравнения (1.2) контролировалась проверкой условия Неймана для гармонической функции

$$A=\int\limits_{c(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds=0 \qquad (2.1)$$

Вычислялись также следующие инварианты потенциального течения: средний уровень $\langle y\rangle$ и средняя кривизна $\langle K\rangle$ профиля, полная энергия $E$. Для крутых гравитационных волн с крутизной $a/\lambda=0{,}16$ и более было получено обрушение волн на временах порядка $T\sim\sqrt{\lambda/g}$, причем инварианты $\langle y\rangle$, $\langle K\rangle$, $E$ сохранялись с относительной точностью $10^{-2}$ вплоть до момента обрушения. Алгоритм тестировался на точном решении [6], описывающем чисто капиллярную прогрессивную симметричную волну конечной амплитуды. Тест показал, что для волны с $a/\lambda=0{,}06$ за время $T=3{,}3$ — характерное время возникновения ряби в гравитационно-капиллярной волне — инварианты $A$, $K$ сохраняются с абсолютными точностями $10^{-4}$ и $10^{-8}$ соответственно, энергия $E$ изменяется не более чем на 1%. Для гравитационно-капиллярной волны с тем же отношением $a/\lambda$ при развитой капиллярной ряби было найдено, что значения $A$ и $K$ в процессе счета отличаются от нуля на $10^{-3}$ ($N=60$) и $10^{-4}$ ($N=80$) соответственно; полная энергия $E$ сохраняется с точностью $10^{-4}$.

**3. Результаты численного моделирования.** На ЭВМ моделировалась динамика гравитационно-капиллярных волн с начальными крутизнами $a/\lambda=0{,}06$ и 0,08. Время счета одного варианта гравитационно-капиллярной волны на порядок превосходит время счета варианта чисто гравитационной волны. Начальный профиль и потенциал задавались в виде

$$y_s=-\frac{a\pi}{\lambda}\cos x,\qquad \varphi_s=-\frac{a\pi}{\lambda}e^{y_s}\sin x \tag{3.1}$$

Качественно эволюция совпадает у вариантов с $a/\lambda=0{,}06$ и 0,08, хотя бифуркационные моменты временно́й эволюции существенно различаются.

Наиболее тонкой и динамичной характеристикой является кривизна волны, и по ее изменению можно проследить и понять природу возникновения капиллярной ряби. До момента времени $T=2{,}1$, $a/\lambda=0{,}08$ гравитационно-капиллярная волна эволюционирует так же, как и гравитационная, с теми же начальными данными, т. е. капиллярность до этого момента времени не играет роли. С момента $T=2{,}1$ начинается качественное различие в динамике гравитационной и гравитационно-капиллярной волн — в окрестности точки профиля $R_k$, характеризуемой условием $\{K=0,\ \partial^2\varphi/\partial x^2<0\}$, образуется рябь.

В дальнейшем будет существенна еще одна точка профиля $R_u$, в которой $\{\varphi_x=0,\ \partial^2\varphi/\partial x^2<0\}$. Как следует из (3.1), при $T=0$ $R_k$ совпадает с $R_u$. В момент возникновения ряби $R_u$ лежит вблизи $R_k$ вниз по течению, что видно из фиг. 1, 2, где для моментов времени $T=4{,}5$; 5,7 приведены графики профиля гравитационно-капиллярной волны, ее крутизны, горизонтальной скорости и кривизны (соответственно кривые *1*—*4*). Следует отметить, что рябь возникает не в вершине волны, как ранее считалось, а вблизи узла, и ее появление связано с потерей симметрии профиля. Длина волны ряби $\lambda_c\sim(\mathrm{We})^{1/2}$, что совпадает с размерами неоднородности $\partial K/\partial x$ в точке $R_k$.

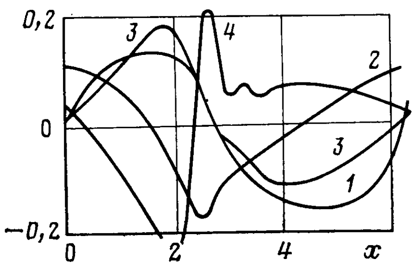
На фиг. 3, 4 для сравнения приведены графики профилей и кривизн гравитационной и гравитационно-капиллярной волн при $T=2{,}1$; 2,3. Начальные условия (3.1) для этих двух вариантов брались идентичными. Цифрами *1*, *2* на фигурах обозначены профиль и кривизна гравитационной волны; *3*, *4* — соответствующие величины для гравитационно-капиллярной волны.

Прежде всего рябь проявляется на графике кривизны, в то время как на профиле она незаметна. Очевидно, рябь характеризует локальную неоднородность течения вдоль свободной поверхности. Для оценки неоднородности горизонтальной скорости продифференцируем третье уравнение системы (1.1) по $x$, считая на свободной поверхности $y=y(x)$. Получим

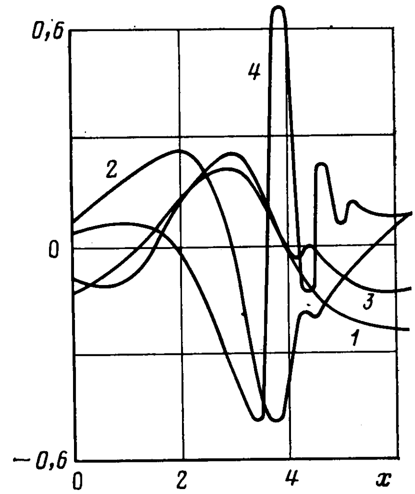
$$\frac{d\varphi_x}{dt}=\mathrm{We}\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}(1+\varphi_x\varphi_{xy}+\varphi_y\varphi_{yy}) \tag{3.2}$$

Для волн с начальными крутизнами $a/\lambda=0{,}06$ отличие коэффициента при $\partial y/\partial x$ в (3.2) от единицы составляет менее $10^{-3}$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением приближенного равенства

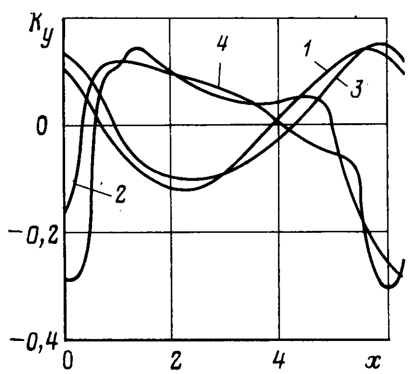
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\simeq\mathrm{We}\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x} \tag{3.3}$$



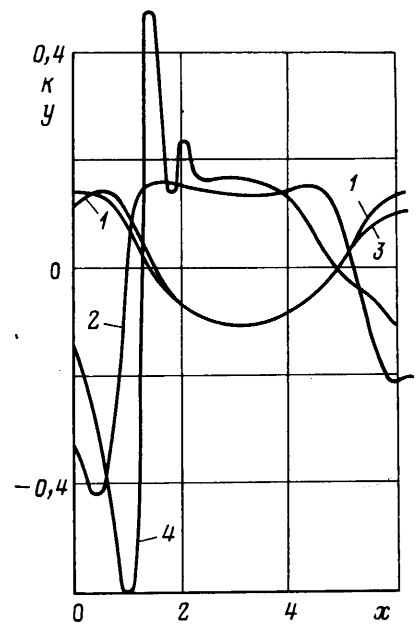

Фиг. 1




Фиг. 2




Фиг. 3




Фиг. 4

Левая часть (3.3) есть ускорение лагранжевой частицы, правая зависит от геометрических характеристик профиля и имеет смысл силы. Отметим, что член $\mathrm{We}\,\partial K/\partial x$, обусловленный силами поверхностного натяжения и несимметрией волны, играет центральную роль в образовании ряби. Можно объяснить возникновение и развитие капиллярной ряби с помощью (3.3) и вариационной теории конформных отображений, зависящих от времени.

Пусть $\sigma$ — площадь малой вариации профиля со знаком (считается $\sigma>0$, если варьируемая область содержится в исходной, и $\sigma<0$ в противном случае), тогда [9] изменение потенциала $\sim\sigma/r$, изменение комплексной скорости $\sim\sigma/r^2$, где $r$ расстояние от центра области варьирования. Рассмотрим комплексную скорость

$$\frac{dW}{dz} = ce^{\tau - i\Phi}$$

Очевидно, $\tau$, $\Phi$ — сопряженные гармонические функции, следовательно

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=-\frac{\partial\tau}{\partial n},\qquad \tau=\log\frac{1}{c}\left|\frac{dW}{dz}\right|$$

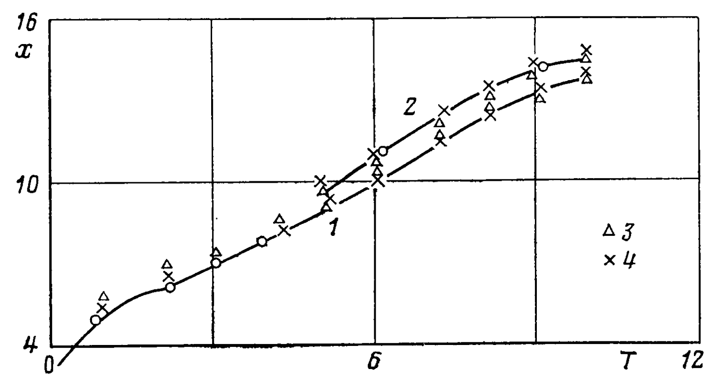
Функции $\tau$, $\Phi$ обычно вводятся для установившихся течений. Для малых времен порядка $T$=0,2—0,6 течение в рассматриваемом случае достаточно близко к квазистационарному, и для качественных рассуждений можно пользоваться понятием $\tau$, $\Phi$, считая, что $\Phi$ — угол между касательной к мгновенному профилю и осью $x$. Поэтому вследствие гармоничности $\tau$

$$K=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_{n=0},\qquad \int\limits_{c(t)}K\,ds=\int\limits_{c(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial s}ds=-\int\limits_{c(t)}\frac{\partial\tau}{\partial n}ds=0 \tag{3.4}$$

Интегрирование в (3.4) ведется по свободной поверхности, ограничивающей один период волны. Интеграл в (3.4) можно представить в виде

$$\int\limits_{c(t)}K\,ds=\int\limits_{l}K\,ds+\int\limits_{\partial\sigma_-}K\,ds+\int\limits_{\partial\sigma_+}K\,ds \tag{3.5}$$

где $\partial\sigma_\mp$ — граница локально варьируемой области с отрицательной (поло-




Фиг. 5

жительной) кривизной профиля, $l$ — часть свободной поверхности $C$ вне вариаций. Из-за нелинейности и дисперсии фронт волны становится круче, производная $\partial K/\partial x$ положительна и максимальна в $R_k$, а крутизна $\partial y/\partial x$ отрицательна. Поскольку $K$=0 в $R_k$, а $K\approx d^2y/dx^2$ для малых волн, то крутизна достигает в $R_k$ минимума. Из (3.3) следует, что совместное действие этих двух эффектов приводит к локальному росту горизонтального ускорения в $R_k$. В точке $R_u$ скорость $\varphi_x$=0 и, следовательно, $R_u$ является неподвижной при горизонтальных деформациях профиля. Из кинематических соображений легко понять, что большое положительное ускорение в $R_k$ приводит к неоднородным горизонтальным смещениям и сильному изгибанию свободной поверхности справа от $R_u$. Максимальный рост кривизны, достигается именно в $R_u$. Он локален и приводит в силу (3.5) к образованию в окрестности $R_u$ вниз по течению участка профиля с уменьшающейся кривизной (интеграл по $l$ в (3.5) не изменяется ввиду локальности вариаций!).

Таким образом, справа от $R_u$ кривизна становится локально-немонотонной функцией. Отсюда и из формулы (3.3) следует, что горизонтальное ускорение становится также немонотонной функцией, а на графике крутизны появляется дополнительная экстремальная точка. Рост амплитуды ряби со временем легко объясняется с помощью вариационной теории конформных отображений. Действительно, как следует из результатов работы [9], в экстремальных точках крутизны $\tau'(s)=0$, причем в точке локального минимума $\tau(s)$ имеет максимум, а в точке максимальной крутизны — минимум. Поскольку $\varphi_x=0$ в окрестности $R_u$, а $\tau(s)$ возрастает, то вертикальная скорость $\varphi_y$ увеличивается, что и приводит к увеличению амплитуды ряби. На фиг. 1, 2 проиллюстрированы качественные рассуждения, приведенные выше для варианта с $a/\lambda=0{,}06$. Начальный профиль и потенциал задавались в виде (3.1).

На фиг. 5 представлены графики зависимости горизонтальных координат главного (кривая *1*) и следующего за ним по величине (кривая *2*) локальных максимумов кинетической энергии $Q$ от времени. Точками *3* и *4* обозначены координаты соответствующих локальных максимумов вертикальной скорости и координаты соответствующих локальных максимумов крутизны.

Таким образом, численно установлен и качественно объяснен новый тип неустойчивости, в котором капиллярные эффекты играют принципиальную роль. Описанный механизм неустойчивости следует учитывать при выработке корректных приближений для описания такого сложного явления, как нестационарные гравитационно-капиллярные волны.

Авторы выражают благодарность Г. Ю. Степанову за внимание и полезные замечания, Г. И. Баренблатту и М. А. Евграфову за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Longuet-Higgins M. S.* The generation of capillary waves by steep gravity waves // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. № 1. P. 138–159.
2. *Варавин В. Ю., Наугольных К. А., Рыбак С. А.* О механизме возбуждения капиллярной ряби на заднем склоне гравитационной волны // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 7. С. 770–782.
3. *Рувинский К. Д., Фрейдман Г. И.* О генерации капиллярно-гравитационных волн крутыми гравитационными волнами // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 7. С. 746–753.
4. *Schwartz L. W., Vanden-Broeck J.-M.* Numerical solution of the exact equations for capillary-gravity waves // J. Fluid Mech. 1979. V. 95. № 1. P. 119–139.
5. *Chen B., Saffman P. G.* Steady gravity-capillary waves on deep water // Stud. Appl. Math. 1979. V. 60. № 3. P. 183–210.
6. *Crapper G. D.* An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. № 6. P. 532–540.
7. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных вынужденных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 445–458.
8. *Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D.* The deformation of steep surface waves on water. 1 // Proc. Roy. Soc. Lond. 1976. V. A350. № 1660. P. 1–26.
9. *Лаврентьев М. А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 136 с.

Горький

Поступила в редакцию
10.X.1985