МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1987

УДК 532.59:539.3

О НЕЛИНЕЙНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

ГЛАДУН О. М., ФЕДОСЕНКО В. С.

В работе рассматривается нелинейная задача об установившихся волнах в идеальной жидкости бесконечной глубины, на поверхности которой плавает тонкая упругая пластина. Решение ищется методом возмущений. Найдены три приближения. Проведено исследование случая ветвления решения.

1. Рассмотрим слой идеальной несжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство, на поверхности которой плавает тонкая изотропная упругая пластина толщины h. Исследуем плоскую задачу о свободных волнах установившегося вида на поверхности раздела жидкости и пластины.

Для установившихся бегущих волн принимается, что переменные x_1 и t_1 входят в φ^* и ζ^* (φ^* — потенциал скорости движения жидкости, ζ^* — прогиб пластины) в виде комбинации x_1-ct_1, а ζ^* является периодической функцией по x_1 с периодом λ, где c — фазовая скорость, λ — длина волны.

Будем искать периодическую волну, симметричную относительно вертикали, проходящей через вершину гребня. Ось x_1 направим вдоль среднего уровня поверхности раздела жидкости и пластины.

Для определения φ^* и ζ^* получаем следующую задачу в безразмерных переменных [1, 2]:

$$\Delta\varphi=0 \quad (-\infty<x<\infty,\ -\infty<z<\varepsilon\zeta) \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\mu}D\zeta_{xxxx}+\varkappa\zeta_{xx}-\varphi_x+\frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_x^2+\varphi_z^2)+\frac{1}{\mu}\zeta=F$$

$$-\zeta_x+\varepsilon\zeta_x\varphi_x=\varphi_z \quad (z=\varepsilon\zeta),\quad \varphi_z=0 \quad (z=-\infty) \tag{1.2}$$

$$\zeta(x+2\pi)=\zeta(x),\qquad \zeta(-x)=\zeta(x),\qquad \int_0^{2\pi}\zeta(x)\,dx=0$$

$$\mu=\frac{kc^2}{g},\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g}k^4,\qquad \varkappa=\frac{\rho_1 h}{\rho}k$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\qquad \varphi^*=\frac{c}{k}\varepsilon\varphi,\qquad \zeta^*=\frac{1}{k}\varepsilon\zeta,\qquad F^*=c^2\rho\varepsilon F$$

$$x=k(x_1-ct_1),\quad z=kz_1,\quad \varepsilon=ak$$

Здесь E — модуль нормальной упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ_1 — плотность пластины, ρ — плотность жидкости, k — волновое число, a — амплитуда волны, ε — малый параметр, F^* — произвольная функция времени.

Решение задачи будем искать методом возмущений. Для этого представим φ, ζ, μ, F в виде степенных рядов по малому параметру ε [2]

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\varepsilon^n,\qquad \zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\zeta_n\varepsilon^n,\qquad \frac{1}{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\varepsilon^n,\qquad F=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\varepsilon^n$$

а также преобразуем нелинейные условия на поверхности раздела, записав их в приближенном варианте, используя разложение φ в ряд Маклорена по z. Тогда с точностью до ε^3 условия (1.2) запишутся в виде

$$\frac{1}{\mu}D\zeta_{xxxx}+\varkappa\zeta_{xx}-\varphi_x-\varepsilon\zeta\varphi_{xz}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta^2\varphi_{xzz}+\frac{\varepsilon}{2}(\varphi_x^2+\varphi_z^2)+$$

$$+\varepsilon^2\zeta(\varphi_x\varphi_{xz}+\varphi_z\varphi_{zz})+\frac{1}{\mu}\zeta=F$$

$$-\zeta_x+\varepsilon\zeta_x(\varphi_x+\varepsilon\zeta\varphi_{xz})=\varphi_z+\varepsilon\zeta\varphi_{zz}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta^2\varphi_{zzz}\quad (z=0)$$

Используя обычный прием (см., например, [2] и опуская все промежуточные выкладки, находим с точностью до третьего приближения

$$\zeta^*=\frac{\varepsilon}{k}\left[\cos x+\varepsilon A_1\cos 2x+\varepsilon^2(A_2\cos x+A_3\cos 3x)\right]\qquad(1.3)$$

$$\varphi^*=\varepsilon\frac{c_0}{k}\left[\sin xe^z+\varepsilon B_1\sin 2xe^{2z}-\varepsilon^2B_2\sin 3xe^{3z}\right]\qquad(1.4)$$

$$c=c_0(1+c_1\varepsilon^2),\qquad c_0=\left(\frac{g}{k}\frac{1+D}{1+\varkappa}\right)^{1/2}\qquad(1.5)$$

$$c_1=\frac{2-R}{4(1-R)(1+\varkappa)},\qquad F^*=0,\qquad A_1=\frac{0{,}5}{1-R}$$

$$A_2=\frac{1+3R+\varkappa(R+5)}{8(1-R)(1+\varkappa)},\qquad A_3=\frac{3+R}{4(1-R)(2+P)}$$

$$B_1=\frac{R}{2(1-R)},\qquad B_2=\frac{3P(1+R)+4R}{8(1-R)(2+P)}$$

$$R=\frac{12D_1\varkappa_1k^5+15D_1k^4-3\varkappa_1k}{1+D_1k^4}$$

$$P=\frac{8\varkappa_1k-80D_1k^4-72D_1\varkappa_1k^5}{1+D_1k^4}$$

$$D_1=\frac{D}{k^4},\qquad \varkappa_1=\frac{\varkappa}{k}$$

Приравнивая производную от профиля волны $(\zeta^*)'$ к нулю, находим, что точки $x=0$ и $x=2\pi$ — точки максимума, а точка $x=\pi$ — точка минимума. Амплитуды гребня ζ_+^* и впадины ζ_-^* определяются из формулы (1.3) при $x=0$ и $x=\pi$ соответственно

$$\zeta_\pm^*=\frac{\varepsilon}{k}\left[\pm1+\varepsilon A_1\pm\varepsilon^2(A_2+A_3)\right]\qquad(1.6)$$

Решая уравнение $\zeta^*=0$, находим с точностью до ε^2, что профиль волны пересекает ось x в точках

$$x_1=\frac{\pi}{2}-A_1\varepsilon, \qquad x_2=\frac{3}{2}\pi+A_1\varepsilon \tag{1.7}$$

Из равенств (1.6), (1.7) можно заключить: если $A_1>0$, амплитуда гребня больше амплитуды впадины, гребень у́же, впадина шире; если $A_1<0$, амплитуда гребня меньше амплитуды впадины, гребень шире, впадина у́же.

Высоту волны определим из равенства

$$H=\zeta^*(0)-\zeta^*(\pi)=2(\varepsilon/k)[1+\varepsilon^2(A_2+A_3)]$$

Отсюда следует, что в зависимости от знака величины A_2+A_3 высота волны может быть как больше, так и меньше высоты волны, соответствующей линейной задаче. Из формулы (1.5) аналогично заключаем, что фазовая скорость может быть как больше, так и меньше соответствующей величины в линейной задаче.

Указанные свойства решения задачи связаны с тем, что уравнения пятой степени относительно k $1-R=0$ и $2+P=0$ имеют по одному положительному действительному корню. В окрестностях данных корней амплитуды нелинейных добавок могут значительно превосходить амплитуду линейного приближения. Так как абсолютное значение каждого из нелинейных добавок в формулах (1.3)—(1.5) должно быть по крайней мере на порядок меньше, чем предыдущее значение, то для определения промежутков непригодности найденного решения могут быть проведены численные расчеты. Расчеты для параметров задачи, указанных ниже, показали, что, например, для $h=0{,}2$ м в каждой точке интервала $[0{,}244998;$ $0{,}547994]$ м$^{-1}$ хотя бы одна из величин $|A_1|$, $|A_2+A_3|$, $|B_1|$, $|B_2|$, $|c_1|$ больше единицы, для $h=0{,}4$ м аналогичным интервалом является $[0{,}153999;$ $0{,}325997]$ м$^{-1}$. Поэтому указанные интервалы представляют собой промежутки непригодности решения при $\varepsilon\geqslant 0{,}1$. При увеличении h «резонансный» интервал сужается. Интересно отметить, что при $D_1=0$ (битый лед) $1-R>0$, $2+P>0$, т. е. «резонансных» длин волн не существует.

Вычисление каждого из последующих приближений решения задачи по методу возмущений будет сопровождаться появлением одного резонансного значения волнового числа. Таким образом, будем иметь спектр резонансных длин волн, получающийся решением последовательности следующих уравнений, каждое из которых является уравнением пятой степени относительно k и имеет один положительный действительный корень k_{n-1}:

$$\theta(n^4D+1)-n^2\varkappa-n=0, \qquad n=2,3,\ldots, \qquad \theta=\frac{1+\varkappa}{1+D}$$

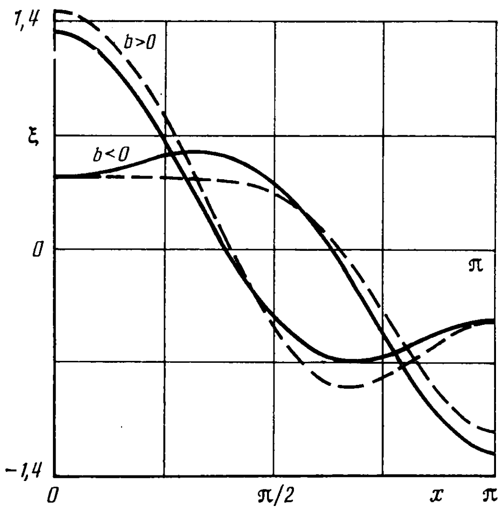
$$\left(\frac{1}{n(n^2+n+1)D_1}\right)^{1/4}<k_{n-1}<\left(\frac{1}{n^2D_1}\right)^{1/4} \tag{1.8}$$

Так как в случае реальных параметров задачи $D_1>1$, то из оценки (1.8) следует, что спектр резонансных значений волнового числа k принадлежит промежутку $(0,1)$ и имеет точку сгущения 0. Ниже приведены результаты вычисления корней k_1 и k_2 уравнений $1-R=0$ и $2+P=0$, дающих первых два резонансных значения волнового числа, при $E=3\cdot10^7$ Н/м^2, $\rho_1=870$ кг/м^3, $\rho=1080$ кг/м^3, $\nu=0{,}34$:

h, м	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
k_1, м$^{-1}$	0,4422	0,2644	0,1958	0,1583	0,1342	0,1173
k_2, м$^{-1}$	0,3436	0,2056	0,1523	0,1232	0,1045	0,0913

2. Проведем исследование в случае, когда $k=k_1$ является корнем урав-

нения $1-R=0$. Придадим k_1 небольшое возмущение $k_1+\varepsilon k^*$ и подставим его в (1.3) и (1.4). Это позволяет установить, что в окрестности $k=k_1$ амплитуда первого нелинейного добавка имеет конечное значение порядка амплитуды линейного приближения; амплитуда второго нелинейного добавка имеет порядок ε (по сравнению с амплитудой линейного приближения). Тогда первое приближение при $k=k_1$ для φ по методу возмущений необходимо искать в виде $\sin x e^{z}+b\sin 2x e^{2z}$. Отметим, что при использовании обычных схем метода возмущений (см., например, [2]) при нахождении каждого из приближений для φ и ζ получается один неопределенный коэффициент, который определяется при вычислении последующих приближений. Коэффициент b определяем, находя второе приближение. Опуская промежуточные выкладки, в результате имеем с точ-



ностью до второго приближения следующие выражения для профиля волны и фазовой скорости:

$$\zeta^*=\frac{\varepsilon}{k_1}\left[\cos x+b\cos 2x+\varepsilon\left(E_1\cos x+E_2\cos 2x+E_3\cos 3x+E_4\cos 4x\right)\right] \tag{2.1}$$

$$c=c_0\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon c_1\right),\qquad c_1=\frac{b}{1+\varkappa}$$

$$b=\pm\left(\frac{1+\varkappa}{2(4\varkappa+2)}\right)^{1/2},\qquad E_1=\frac{b(2+3\varkappa)}{2(1+\varkappa)}$$

$$E_2=b^2\frac{108\varkappa^2+117\varkappa+23}{4(1+\varkappa)(12\varkappa+5)}+b^4\frac{72\varkappa+24}{18\varkappa+7}-\frac{1}{4}$$

$$E_3=-\frac{3b}{12\varkappa+5},\qquad E_4=-\frac{b^2}{18\varkappa+7}$$

Таким образом, в случае $k=k_1$ имеем две волны одинаковой длины, распространяющиеся со скоростями, различающимися на величину $\varepsilon c_0|c_1|$. Численное исследование выражения (2.1) для конкретных параметров задачи, указанных выше, показывает, что абсолютное значение нелинейного добавка не превосходит $0{,}61\varepsilon$, т. е. профиль волны в случае бифуркации в основном описывается первым приближением. На фигуре изображены графики $\zeta=(k_1/\varepsilon)\zeta^*$ для $b>0$ и $b<0$, показывающие изменение профиля в зависимости от параметра ε ($\varepsilon=0{,}1$ — сплошная, $\varepsilon=0{,}4$ — штриховая кривая). Заметим, что изменение профиля волны в зависимости от толщины пластины, когда 0,2 м$\leqslant h \leqslant$1,2 м, незначительно и не превосходит 0,01.

Исследование случая корня уравнения $2+P=0$, проведенное аналогично корню уравнения $1-R=0$, показывает, что величина $(\varepsilon^3/k_2)A_3$ является конечной порядка амплитуды линейного приближения. Первое приближение для φ в этом случае ищем в виде $\sin xe^z + B\sin 3xe^{3z}$. Однако отметим, что коэффициент B определяется уже не из второго приближения, а при нахождении третьего приближения из кубического уравнения, которое ввиду громоздкости не выписывается. Анализ этого кубического уравнения показывает, что при $0<\varkappa<0{,}64447$ оно имеет три действительных корня, при $\varkappa\approx0{,}64447$ — два действительных корня, один из которых кратный, при $0{,}64447<\varkappa<1$ (оценка $\varkappa<1$ следует из уравнения $2+P=0$) — один действительный корень. Поэтому в первом случае решение задачи имеет три ветви, во втором — две, а в третьем случае имеется одно решение конечной амплитуды.

В заключение заметим, что ветвление решений было обнаружено в работе Я. И. Секерж-Зеньковича [3], где рассматривались капиллярно-гравитационные волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 215 с.
2. *Алешков Ю. З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 196 с.
3. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных вынужденных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 445–458.

Минск

Поступила в редакцию 22.IV.1986