

УДК 532.59:532.545

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПОТОКЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ С ПРОНИЦАЕМЫМ ДНОМ

САКС С. Е.

В задачах о движении поверхностных гравитационных волн обычно рассматриваются два случая движения: в потоках бесконечной глубины и конечной глубины с непроницаемым дном. В то же время дно реальных водоемов почти всегда сложено рыхлыми грунтами с большей или меньшей степенью пористости. При этом волновое движение над поверхностью дна индуцирует периодические движения жидкости в пористом грунте, которые по аналогии с движением над дном можно определить как фильтрационные волны.

В большинстве работ, посвященных воздействию волнения на пористые грунты, частичный обзор которых приведен в [1, 2], рассмотрение проводилось в рамках классической модели движения волн в потоке над непроницаемым дном, из которой определялась функция волнового давления на дно. Волновое движение в пористом дне рассматривалось как вторичное движение, обусловленное пульсациями волнового давления на линии дна. Такой подход приводил к разрыву потока через пористое дно вследствие несовпадения фаз давления и вертикальной волновой скорости. В [3] приведено решение, в котором фазы движения над и под линией дна согласованы путем введения коэффициентов, определяемых из граничных условий и условий сопряжения. Полученное решение является лишь модификацией частного решения для волн на конечной глубине при непроницаемом дне.

Рассмотрим плоскопараллельное движение гравитационных поверхностных волн в тяжелой несжимаемой жидкости в плоскости xz , причем будем считать ось z направленной вертикально вверх, а линию $z=0$ — верхней границей невозмущенной жидкости. Введем на глубине $z=-H$ пористое однородное и изотропное дно толщиной L с пористостью ε и коэффициентом фильтрации k_f . Под пористостью понимается отношение объема пор элемента грунта ко всему объему этого элемента, причем $0 < \varepsilon < 1$. На глубине $N=H+L$ дно будем считать непроницаемым. Разобьем полуплоскость волнового движения $-N < z < 0$ на две области: $-H < z < 0$ и $-N < z < -H$. Будем рассматривать задачу в рамках линейной теории волн, пренебрегая влиянием вязкости на волновые движения над дном, и упругими свойствами грунта, так как колебания волнового давления невелики.

Периодическое движение жидкости в пористом грунте с учетом вязкой и инерционной составляющей, как легко показать, при принятых допущениях является потенциальным, причем потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1)$$

Обозначим для выделенных областей значения потенциала скорости соответственно через φ_1 и φ_2 , где φ_2 — потенциал фильтрационной (расходной) скорости, определяемой, как обычно, отношением расхода к полному сечению потока. При этом потенциал истинной скорости с учетом стеснения потока $\varphi_2' = \varepsilon^{-1} \varphi_2$. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\varphi = \Phi(z) e^{i(kx - \omega t)}$$

где k — волновое число, ω — частота.

Граничные условия на поверхности и на глубине $z=-N$ имеют вид [4]

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \quad (z=0); \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad (z=-N) \quad (2)$$

Условиями сопряжения на линии дна $z=-H$ являются непрерывность расхода, что обеспечивается равенством вертикальных скоростей, а также непрерывность давления.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad p_1 = p_2 \quad (z=-H) \quad (3)$$

Для давлений над дном справедлива общая зависимость

$$\frac{p_1}{\rho} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - gz \quad (4)$$

где ρ — плотность жидкости.

При рассмотрении волновых движений в грунте уравнения движения включают как вязкую, так и инерционную составляющие. Из уравнений движения в пористом грунте (см., например, [3, 5]) следует:

$$\frac{p_2}{\rho} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{g}{k_f} \varphi_2 - gz \quad (5)$$

Решения уравнения (1) имеют вид

$$\varphi_1 = (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \varphi_2 = (C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}) e^{i(kx - \omega t)} \quad (6)$$

Из граничных условий (2) (второе соотношение) и условий сопряжения (3) с учетом (4) и (5), находим значения коэффициентов

$$C_1 = Cr_1 e^{kH}; \quad C_2 = Cr_2 e^{-kH}; \quad C_3 = 2\varepsilon C e^{kN}; \quad C_4 = 2\varepsilon C e^{-kN}$$

$$r_{1,2} = (B \pm \varepsilon) e^{kL} + (B \mp \varepsilon) e^{-kL}$$

$$B = 1 + i\beta; \quad \beta = g\varepsilon/\omega k_f$$

Введем функции произвольного параметра глубины γ в виде

$$S(\gamma) = r_1 e^{k\gamma} - r_2 e^{-k\gamma}, \quad Q(\gamma) = r_1 e^{k\gamma} + r_2 e^{-k\gamma}$$

Тогда с учетом первого граничного условия (2) и значений C_1 и C_2 из (6) определяется дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{S(H)}{Q(H)} \quad (7)$$

Для возвышения водной поверхности над средним уровнем ξ с учетом (6) и значений C_1 и C_2 имеем

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{g\varphi_1}{\partial t} = i \frac{C\omega}{g} (r_1 e^{kH} + r_2 e^{-kH}) e^{i(kx - \omega t)} = i a e^{i(kx - \omega t)} \quad (z=0)$$

$$C = \frac{ag}{\omega Q(H)}$$

где a — амплитуда волны. По найденному значению C могут быть определены коэффициенты C_1 ; C_2 ; C_3 и C_4 , после подстановки которых из (4) — (6) определяются характеристики волнового движения для рассматриваемых областей.

Полученные решения для величины потенциала скорости φ , горизон-

тальной u и вертикальной v составляющих орбитальной волновой скорости и периодической составляющей волнового давления имеют вид:

$$A\theta(z)e^{i(kx-\omega t)} \quad (8)$$

$$A_\varphi = \frac{ag}{\omega}; \quad A_u = i \frac{agk}{\omega}; \quad A_v = \frac{agk}{\omega}; \quad A_p = iagp$$

$$\theta_{1\varphi} = \theta_{1u} = \theta_{1p} = \frac{Q(z+H)}{Q(H)}; \quad \theta_{1v} = \frac{S(z+H)}{Q(H)}; \quad (-H < z < 0) \quad (9)$$

$$\theta_{2\varphi} = \theta_{2u} = \frac{4\varepsilon \operatorname{ch} k(z+N)}{Q(H)}, \quad \theta_{2v} = \frac{4\varepsilon \operatorname{sh} k(z+N)}{Q(H)}, \quad \theta_{2p} = \frac{4B \operatorname{ch} k(z+N)}{Q(H)},$$

$$(-N < z < -H) \quad (10)$$

Для расчетов по формулам (7)–(10) функции $S(\gamma)$ и $Q(\gamma)$ удобнее преобразовать к виду

$$S(\gamma) = 4 \operatorname{ch} kL (\operatorname{sh} k\gamma + \varepsilon \operatorname{ch} k\gamma \operatorname{th} kL + i\beta \operatorname{sh} k\gamma) \quad (11)$$

$$Q(\gamma) = 4 \operatorname{ch} kL (\operatorname{ch} k\gamma + \varepsilon \operatorname{sh} k\gamma \operatorname{th} kL + i\beta \operatorname{ch} k\gamma)$$

Соотношение между вязкими и инерционными силами определяется значением безразмерного критерия β . При $\beta \gg 1$ определяющими являются силы вязкого сопротивления, при $\beta \ll 1$ движение определяется инерционными силами.

Полученное общее решение для движения волн над проницаемым дном обеспечивает предельные переходы к известным частным случаям волнового движения при предельных значениях свойств грунта. При $k_f \rightarrow 0$ дно практически непроницаемо. При этом $\beta \rightarrow \infty$, $\varphi_2 \rightarrow 0$, $u_2 \rightarrow 0$, $v_2 \rightarrow 0$, а зависимости (7)–(9) переходят в известные формулы движения волн на конечной глубине над непроницаемым дном.

При $k_f \rightarrow \infty$ проницаемость дна очень велика. При этом $\beta \rightarrow 0$ и формулы (7)–(10) преобразуются к случаю волнового движения невязкой жидкости над проницаемым дном, что может иметь место, например, при прохождении волн над валунными отложениями или крупнокачестными техническими сооружениями. При этом характеристики движения определяются пористостью ε , которая может изменяться от нуля до единицы. В предельном случае, если $\varepsilon \rightarrow 0$, то и $\varphi_2 \rightarrow 0$, движение жидкости в пористом дне отсутствует, а зависимости (7)–(9) переходят в формулы для движения волн на конечной глубине H . Во втором предельном случае $\varepsilon \rightarrow 1$ (отсутствие грунта) $\varphi_1 = \varphi_2$ и зависимости (7)–(10) переходят в формулы для волн на конечной глубине $N = H + L$.

Частным случаем полученного решения является прохождение волн над проницаемым дном бесконечной толщины. В этом случае для волнового движения над дном формулы (7)–(9) после подстановки (11) упрощаются, так как $\operatorname{th} kL = 1$. Для волнового движения в пористом грунте зависимости (10) преобразуются с учетом

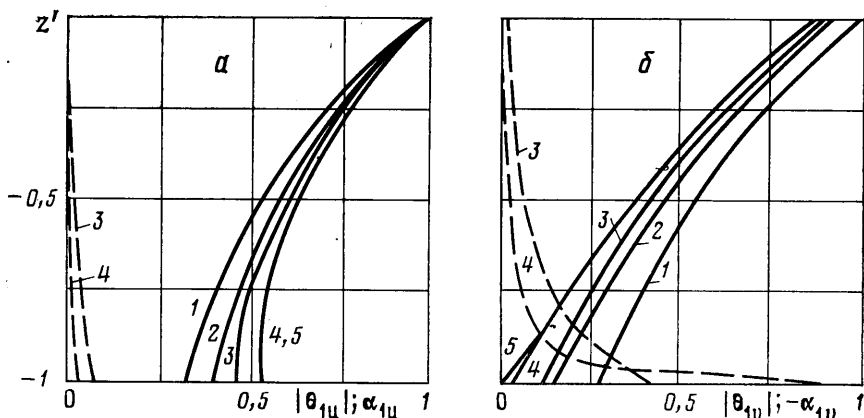
$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{4 \operatorname{ch} k(z+N)}{Q(H)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{4 \operatorname{sh} k(z+N)}{Q(H)} = \frac{e^{k(z+H)}}{\operatorname{ch} kH + \varepsilon \operatorname{sh} kH + i\beta \operatorname{ch} kH}$$

В случае проницаемого грунта бесконечной толщины при рассмотренных выше предельных значениях свойств грунта формулы (7)–(10) преобразуются соответственно в известные формулы волнового движения при конечной и бесконечной глубине жидкости.

На фигуре приведены графики зависимости модуля и аргумента комплексных функций θ_{1u} и θ_{1v} от безразмерной глубины $z' = zH^{-1}$. Модули $|\theta_{1u}|$ и $|\theta_{1v}|$ характеризуют изменение амплитуды, а аргументы α_{1u} и

α_{1v} — сдвиг фазы горизонтальной (а) и вертикальной (б) волновой скорости по глубине потока. На графике представлены относительные значения аргумента $\alpha = 2 \arg \theta / \pi$. Графики построены для потока глубиной $H = 0,2\lambda$, где λ — длина волны, при толщине грунта $L = H$. Сплошными линиями представлены графики для $|\theta_{1u}|$ и $|\theta_{1v}|$, а штриховыми — графики для α_{1u} и α_{1v} .

Влияние проницаемости грунта в соответствии с (7)–(11) определяется как непосредственно через ϵ , так и через безразмерный критерий β , зависящий от ϵ и k_f . Кривые 1 и 5 соответствуют рассмотренным выше предельным случаям: 1 — $\epsilon = 1$, $\beta = 0$, волновое движение жидкости при от-



сутствии грунта на глубине от H до L ; 5 — $\epsilon = 0$, $\beta = 0$, движение при непроницаемом дне на глубине H .

Кривые 2–4 характеризуют вертикальную структуру волновых возмущений при $\epsilon = 0,4$ (что в среднем характерно для морских рыхлых отложений) и различных значениях β , зависящих от изменения k_f : 2 — $\beta = 0$; 3 — $\beta = 1$; 4 — $\beta = 10$. Из графиков видно, что эпюры распределения волновых характеристик по глубине при движении над пористым дном занимают промежуточное положение между распределением при непроницаемом дне и распределением при отсутствии грунта.

Эпюры распределения угла сдвига фаз волновых скоростей показывают, что сдвиг фазы увеличивается от поверхности к дну. При $\beta = 10$, когда влияние инерционной составляющей незначительно и фильтрационное движение обусловлено в основном придонным волновым давлением, можно отметить значительный сдвиг фазы для θ_{1v} в придонной области (кривая 4), что обеспечивает синхронизацию фаз придонного давления и вертикальной скорости. Этим устраняется отмеченное выше противоречие, имевшееся в ранних работах.

При $\beta \geq 10$ пористость дна практически не влияет на амплитуды волновых движений над дном (кривые 4 и 5 совпадают). Это влияние может быть заметным лишь для грунтов с высокой проницаемостью или при очень малых периодах волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yamamoto T., Koning H. L., Sellmeijer H., Van Hijum E. On the response of a poroelastic bed to water waves // J. Fluid. Mech. 1978. V. 87. Pt 1. P. 193–206.
2. Finn W. D. Liam, Siddharthan R., Martin Y. R. Response of seafloor to ocean waves // J. Geotechn. Eng., 1983. V. 109. № 4. P. 556–572.
3. Liu P. L.-F. Damping of water waves over porous bed // Proc. Amer. Soc. civil Eng. J. Hydraul. Divis. 1973. V. 99. № 12. P. 2263–2271.
4. Срегенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
5. Де Уист Р. Гидрогеология с основами гидрологии суши. Т. 1. М.: Мир, 1969. 312 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.1.1986