

УДК 532.546+622.279

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОДОНАПОРНОГО
РЕЖИМА ГАЗОВОЙ ЗАЛЕЖИ В ОГРАНИЧЕННОМ ПЛАСТЕ**

ГУТНИКОВ А. И.

При прогнозировании и анализе разработки газовой залежи в водоносном бассейне возникает необходимость совместного решения уравнения материального баланса газа в залежи и уравнения пьезопроводности для воды. При этом для ограниченных по размерам водоносных бассейнов в задаче возникает некоторый безразмерный параметр — отношение времени распространения возмущения давления от залежи до границ водоносного пласта ко всему времени разработки залежи. Этот безразмерный параметр для многих залежей оказывается малым, что соответствует квазистационарной фильтрации воды в водоносном бассейне. В данной работе методом сингулярного разложения в ряд по малому параметру получено решение задачи истощения газовой залежи при водонапорном режиме. Для простоты газ считается идеальным.

1. Рассмотрим газovou залежь, взаимодействующую с водоносным бассейном. Пусть газонасыщенный поровый объем залежи равен $\alpha\Omega$, начальное давление — P , а β_* и κ — коэффициенты упругоёмкости и пьезопроводности водоносного бассейна.

Краевая задача, описывающая истощение газовой залежи, имеет вид [1]

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\nu \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (1.1)$$

$$p=1, t=0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varepsilon}{\zeta_\nu \gamma} \frac{dQ_w(p)}{dt}, \quad r=R_1 \quad (1.3)$$

$$\partial p / \partial r = 0, \quad r=R_2 \quad (1.4)$$

$$Q_w = -[(1-p) - Q] / p \quad (1.5)$$

Здесь единицей измерения времени t является период разработки T , единицей измерения расстояния r — характерный масштаб водоносного пласта r_* . Давление p измеряется в единицах P , количество вторгшейся в залежь воды Q_w — в единицах $\alpha\Omega$, а добытое количество газа Q — в долях начальных запасов газа $Q_0 = \alpha\Omega P / f p_*$, f — температурная поправка, p_* — атмосферное давление. Индекс ν определяет геометрию водоносного бассейна: $\nu=0$ соответствует плоскопараллельной симметрии пласта, $\nu=1$ — радиальной.

Входящие в краевую задачу параметры определяются по формулам

$$\varepsilon = r_*^2 / \kappa T; \quad \gamma = \beta_* P V / \alpha \Omega$$

$$\zeta_\nu = 1, \quad \nu=0; \quad \zeta_\nu = 2R_1 / (R_2^2 - R_1^2), \quad \nu=1$$

Параметр ε представляет собой отношения характерного времени распространения возмущения давления в водоносном пласте r_*^2 / κ ко време-

ни разработки залежи T и, как указано выше, является во многих реальных ситуациях малым. Параметр γ показывает степень влияния водоносного бассейна на давление в газовой залежи и является отношением количества воды, которое может быть получено из водоносного пласта вследствие его сжимаемости при снижении давления до атмосферного, к начальному газонасыщенному поровому объему залежи. Здесь V — объем водоносного пласта, а ζ_v ($v=0, 1$) — некоторый фактор, зависящий от геометрии пласта.

2. Построим разложение решения задачи (1.1)–(1.5) в ряд по малому параметру $\varepsilon \ll 1$. Вначале рассмотрим более наглядный случай плоскопараллельной симметрии водоносного пласта ($v=0, r=x$). В качестве характерного масштаба r_* выберем протяженность водоносного пласта L , так что $R_1=0$ и $R_2=1$. Будем искать решение в виде суммы двух рядов — регулярного и сингулярного

$$p(x, t) = p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) + \varepsilon^2 p_2(x, t) + \dots \\ \dots + v_0(x, \tau) + \varepsilon v_1(x, \tau) + \varepsilon^2 v_2(x, \tau) + \dots \quad (2.1)$$

где $\tau = t/\varepsilon$ — быстрое время; $v_k(x, \tau)$, $k=0, 1, 2, \dots$, — пограничные функции. Подставим выражение для давления (2.1) в (1.1)–(1.4) и выполним разложение в ряд по ε нелинейного члена в граничном условии (1.3). В результате получим ряд краевых задач для регулярных членов разложения (2.1) и связанную с ними систему краевых задач для сингулярных членов. Ограничимся рассмотрением приближений нулевого и первого порядка по ε .

Из задачи для регулярного члена нулевого порядка следует зависимость давления только от времени: $p_0(x, t) = p_0(t)$. Положим, что $p_0(t)$ удовлетворяет начальному условию (1.2). Сама функция $p_0(t)$ определяется из рассмотрения следующего приближения.

Задача для регулярной поправки первого порядка

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{dp_0}{dt}; \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{dQ_w(p_0)}{dt}, \quad x=0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad x=1$$

имеет решение с точностью до некоторой функции времени

$$p_1(x, t) = (1/2 x^2 - x) dp_0/dt + C_1(t) \quad (2.2)$$

Используя начальное условие для члена нулевого порядка, получим равенство

$$Q_w(p_0) = \gamma(1 - p_0) \quad (2.3)$$

которое совместно с (1.5) полностью определяет регулярный член нулевого порядка $p_0(t)$. В [2] выполнен анализ этого приближения. Показано, что в зависимости от значения параметра γ газовые залежи можно разделить на два подмножества с $0 < \gamma \leq 1$ и $1 < \gamma < \infty$. Для залежей первого типа давление в конце разработки стремится к нулю, в то время как для залежей второго типа конечное давление имеет значение $(\gamma - 1)/\gamma$.

Функция $C_1(t)$ в (2.2), определяющая поправку первого порядка $p_1(x, t)$, находится из решения задачи для следующего регулярного члена разложения $p_2(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q_w(p_0)}{\partial p_0} p_1 \right), \quad x=0; \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad x=1$$

Решение этой задачи имеет вид

$$p_2(x, t) = \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} \right) \frac{d^2 p_0}{dt^2} + \frac{x^2}{2} \frac{dC_1}{dt} + \frac{x}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{1-Q}{p_0^2} C_1 \right) + C_2(t)$$

причем для $C_1(t)$ должно выполняться соотношение

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma} \frac{1-Q}{p_0^2}\right) C_1(t) = \frac{1}{3} \frac{dp_0}{dt} + A \quad (2.4)$$

Таким образом, регулярный член первого порядка, так же как и член нулевого порядка, определяется с точностью до постоянной. Положим для определенности эту постоянную равной нулю: $A=0$. Определение членов регулярного разложения более высоких порядков проводится аналогично, причем они также находятся с точностью до некоторых постоянных.

Найдем теперь пограничную функцию $v_0(x, \tau)$. Она определяется из решения задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} &= 0; & v_0 &= 0, & \tau &= 0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} &= \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v_0}{1+v_0} \right), & x &= 0; & \frac{\partial v_0}{\partial x} &= 0, & x &= 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

и тождественно равна нулю: $v_0=0$. Это следует из свойства монотонности по x решения параболического уравнения с нулевым начальным условием, которое не согласуется с приведенными в (2.5) граничными условиями для v_0 . Физически это легко понять, так как выбранное нами начальное условие для регулярного члена $p_0(t)$ совпадает с начальным условием для всего решения $p(x, t)$.

В соответствии с общим алгоритмом [3] построения уравнений для сингулярных поправок асимптотического разложения краевую задачу для пограничной функции первого порядка $v_1(x, \tau)$ получим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} &= 0; & v_1(x, 0) &= -p_1(x, 0) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v_1}{\partial \tau}, & x &= 0; & \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, & x &= 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Учитывая выражение (2.2) для p_1 , соотношения (2.4) и $dp_0/dt = -(dQ/dt)(1+\gamma)^{-1}$ при $t=0$ (см. [2]), начальное условие в задаче перепишем в явном виде

$$v_1 = \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{1+\gamma} \right), \quad \tau=0 \quad (2.7)$$

Будем искать приближенное решение задачи (2.6) для $v_1(x, \tau)$ в классе квадратичных функций от координаты x (на что указывает квадратичная зависимость от x начального условия (2.7)). Используя для определения коэффициентов параболы метод интегральных соотношений [4], окончательно получим

$$v_1(x, \tau) = \frac{dQ}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{1+\gamma} \right) \exp[-3(1+\gamma)\tau] \quad (2.8)$$

3. При разработке газовой залежи, как правило, наиболее достоверная информация имеется о давлении в самой залежи. Поэтому особый интерес представляет зависимость

$$p(0, t) = p_0(t) + \varepsilon p_1(0, t) + \varepsilon v_1(0, t/\varepsilon) \quad (3.1)$$

где в соответствии с [2], (2.2), (2.4) и (2.8)

$$p_0 = \frac{-(1-\gamma) + \sqrt{(1-\gamma)^2 + 4\gamma(1-Q)}}{2\gamma}$$

$$p_1 = - \frac{\gamma p_0^2}{[2\gamma p_0 + (1-\gamma)][\gamma p_0^2 + (1-Q)]} \frac{dQ}{dt} \quad (3.2)$$

$$v_1 = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2} \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{t=0} \exp\left(-\frac{1+\gamma}{\varepsilon} t\right)$$

Здесь для удобства переопределен характерный масштаб задачи $r_* = L/\sqrt{3}$, а значит, уменьшено в 3 раза значение ε и увеличены втрое p_1 и v_1 .

Пусть газовая залежь эксплуатируется с постоянным во времени отбором, т. е. $Q=t$. На фигуре показаны характерные зависимости давления в залежи от добытого количества газа для $\gamma=0,5$ (кривая 1) и $\gamma=2$ (кривая 3) при значении малого параметра $\varepsilon=0,2$, рассчитанные по формулам (3.2). Вблизи $Q=0$ на графиках пунктиром нанесена регулярная часть разложения (3.1). Учет пограничных функций дает сходимость кривой p вблизи $Q=0$ к начальному значению $p=1$. Для сравнения здесь же показаны кривые 2 и 4, соответствующие одновременному истощению газовой залежи и водоносного бассейна ($\varepsilon=0$), а также прямая 5 для чисто газового режима залежи ($\gamma=0$).

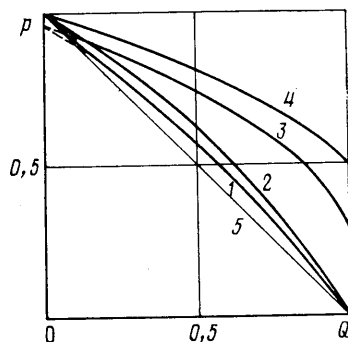
Как следует из анализа полученных формул, при $0 < \gamma < 1$ кривая $p(Q)$ к концу истощения залежи стремится к прямой газового режима, т. е. $p(1)=0$. Для второго множества решений ($1 < \gamma < \infty$) имеем $p(1) = (\gamma-1)/\gamma-\varepsilon$.

Случай $\gamma=1$ является особенным. При $Q=1$ производная dp_0/dt , входящая в определение поправок давления первого и высших порядков, обращается в бесконечность. Поэтому вблизи $Q=1$ разложениями (3.1), (3.2) пользоваться нельзя. Расчеты показывают, что формулы (3.2) остаются практически точными вплоть до $Q=0,85$. И так как полное обводнение залежей с такими параметрами наступает при меньших отборах газа, то приведенные приближенные формулы остаются справедливыми и в случае $\gamma=1$.

При радиальной симметрии залежи и водоносного бассейна ($\nu=1$) построение ряда (2.1) производится аналогично случаю плоскопараллельной симметрии. Как следует из физических соображений, приближение нулевого порядка $p_0(t)$ не зависит от геометрии системы. Зависимость от координаты r членов высших порядков более громоздкая, чем при плоскопараллельной фильтрации, и включает логарифмические члены. Давление газа в залежи с точностью до членов первого порядка по ε имеет вид (3.1), (3.2), если характерный масштаб задачи принять равным

$$r_*^2 = \frac{1}{2} \frac{R_2^4}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{8} (3R_2^2 - R_1^2)$$

Приведем результаты сравнения приближенного решения (3.2) и численного решения задачи (1.1) — (1.5) конечно-разностным методом, описанным в [1]. В третьей и пятой колонках таблицы показаны давления газа в залежи для значений малого параметра $\varepsilon=0,2$, а во второй и четвертой — соответствующие им конечно-разностные решения (при численном решении в точке $t=1$ имеет место неустойчивость счета). Геометрия системы радиально-симметричная. В случае параметра $\gamma=0,5$ безразмерные радиусы залежи R_1 и водоносного пласта R_2 соответственно равны 0,221 и 1,342 ($\xi_1=0,2523$), в то время как при $\gamma=2$ эти радиусы приняты рав-



ными 0,089 и 1,067 ($\xi_1=0,1570$). Этим двум вариантам соответствуют следующие размерные параметры водоносного пласта: первому — $\kappa=2,60 \text{ м}^2/\text{с}$; $kh/\mu=7,79 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $r_*=18,1 \text{ км}$, второму — $\kappa=16,1 \text{ м}^2/\text{с}$; $kh/\mu=48,3 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3/(\text{МПа} \cdot \text{с})$; $r_*=45,05 \text{ км}$. Запасы газа в залежи составляют 10 млрд·м³, начальное давление 10 МПа, пластовая температура 313 К. Время разработки залежи 20 лет.

Из таблицы следует, что точность приближенного решения достаточно хорошая и его можно использовать для прогнозных расчетов истоще-

t	$\gamma=0,5$		$\gamma=2$	
	2	3	4	5
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,10	0,910	0,907	0,932	0,929
0,25	0,788	0,783	0,864	0,860
0,50	0,578	0,569	0,747	0,744
0,75	0,330	0,317	0,596	0,592
0,90	0,147	0,133	0,455	0,455
1,0	—	0,0	—	0,300

ния залежи. Кроме того, аналитический вид решения (3.2) дает непосредственную связь между давлением, добытым количеством газа и параметрами системы γ и ε . Это обстоятельство значительно облегчает решение обратной задачи — определение параметров модели по истории разработки залежи. В [2], например, приведены результаты решения обратной задачи в нулевом приближении ($\varepsilon=0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Закиров С. Н., Васильев В. И., Гутников А. И. и др. Прогнозирование и регулирование разработки газовых месторождений. М.: Недра, 1984. 295 с.
2. Гутников А. И. Исследование водонапорного режима некоторых типов газовых залежей // Нефть и газовая пром-сть. 1984. № 4. С. 41—43.
3. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

Харьков

Поступила в редакцию
23.I.1986