

УДК 532.546

## К ЗАДАЧЕ О ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ ОРОСИТЕЛЯ ИРРИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

БЕРЕСЛАВСКИЙ Э. Н.

Задача о плоской установившейся фильтрации (по закону Дарси) в однородном изотропном грунте из оросителя бороздового типа при наличии капиллярности грунта впервые исследовалась в [1]. При этом рассматривалась так называемая фильтрация без подбора, при которой скорость на бесконечности равна коэффициенту фильтрации, что соответствует тому случаю, когда на большой глубине (теоретически бесконечной) имеется дренирующий пласт, поглощающий воду. При таком же предположении, но с учетом испарения со свободной поверхности эта задача была решена в [2]. Следует отметить, что применение функций, введенных в [2], возможно лишь в тех случаях, когда водопроницаемые участки, входящие в состав границ областей фильтрации, вертикальные.

В настоящей работе решается задача о фильтрации из оросителя бороздового типа при конечной глубине залегания дренирующего слоя, представляющая обобщение [1, 2]. Рассматриваемый случай встречается в практике весьма часто, так как нередко оросители действуют в суглинках, подстилаемых крупнозернистыми песками или гравием [3]. Излагается основанный на решении алгоритм вычислений основных фильтрационных характеристик, осуществляемых в прямой постановке. Исследован характер зависимости фильтрационного расхода из оросителя и радиуса капиллярного растекания воды в стороны от оросителя от мощности слоя, диаметра оросителя, интенсивности испарения и капиллярности грунта.

**1. Постановка задачи.** На фиг. 1 схематично представлена область движения из оросителя через слой однородного грунта толщиной  $T$  в подстилающий его грунт значительно большей водопроницаемости, не содержащий напорных грунтовых вод. Ввиду симметрии достаточно ограничиться правой половиной области движения  $M_0M_2M_3M_4$ .

При первоначальном рассмотрении ороситель заменим точечным источником, расположенным в точке  $M_0$ . Далее, примем одну из линий равных напоров, скажем,  $M_1M_3$ , за полукруглое поперечное сечение оросителя с диаметром  $D$  и положим на этой линии  $\varphi = -h_k$ , где  $\omega = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал фильтрации, отнесенный к коэффициенту фильтрации грунта,  $h_k$  — высота капиллярного поднятия.

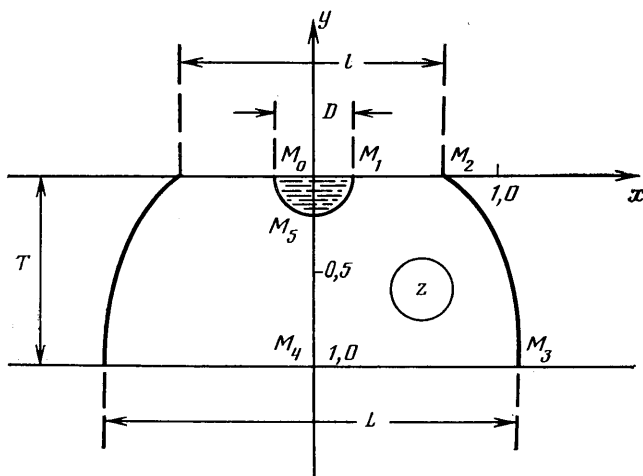
Вдоль участков границы области  $z$  выполняются следующие условия:

$$M_0M_2: y=0, \psi = 1/2Q; M_0M_4: x=0, \psi=0; \quad (1.1)$$

$$M_2M_3: \varphi = -y, \psi = -\varepsilon(x-r) + 1/2Q; M_3M_4: y = -T, \varphi = T$$

где  $z = x + iy$  — комплексная координата точек области фильтрации,  $\varepsilon$  — интенсивность испарения, отнесенная к коэффициенту фильтрации грунта,  $r = 1/2l$ ,  $Q$  — искомый фильтрационный расход из оросителя, также отнесенный к коэффициенту фильтрации. При решении задачи кроме расхода  $Q$  большой практический интерес представляет величина радиуса капиллярного растекания воды в стороны от оросителя  $r$ .

**2. Построение решения.** Рассматриваемая схема течения не позволяет прибегнуть ни к известным способам решения задачи посредством конформных отображений [4], ни к способу, изложенному в [2]. Используем



Фиг. 1

метод, основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [4].

Вводятся: вспомогательная комплексная переменная  $t$  (фиг. 2, а), функции  $z(t)$  и  $\omega(t)$ , конформно отображающие верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t \geq 0$  на области  $z = x + iy$  и  $\omega = \varphi + i\psi$ , а также функции

$$Z = \frac{dz}{dt}, \quad \Omega = \frac{d\omega}{dt} \quad (2.1)$$

Определяя показатели функций (2.1) около особых точек, найдем, что функции  $Z$  и  $\Omega$  представляют линейные комбинации двух ветвей функции Римана [4]

$$\begin{aligned} P \begin{Bmatrix} 0 & a & 1 & \infty \\ -1 & -1/2 & 0 & 2 + 1/2\alpha \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 - 1/2\alpha \end{Bmatrix} &= \\ = \frac{1}{\sqrt{t(a-t)}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1 + 1/2\alpha \\ -1/2 & -1/2 & 1 - 1/2\alpha \end{Bmatrix} &= \\ = \frac{y}{\sqrt{t(a-t)}}, \quad \alpha = \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\varepsilon}. & \quad (2.2) \end{aligned}$$

Функция  $y$  является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса

$$y'' + \frac{3/2 - 3t}{t(1-t)} y' - \frac{1 - 1/4\alpha^2}{t(1-t)} y = 0 \quad (2.3)$$

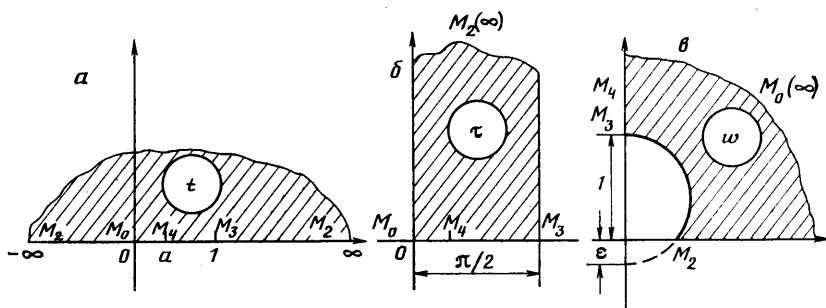
Следующая замена переменных переводит верхнюю полуплоскость в полуполосу  $\tau$  (рис. 2, б), а (2.3) преобразуется в уравнение с постоянными коэффициентами

$$t = \sin^2 \tau, \quad y = v / \sin 2\tau \quad (2.4)$$

$$v'' + \alpha^2 v = 0 \quad (2.5)$$

Функция, конформно отображающая полуполосу  $\tau$  на область комплексной скорости, соответствующую краевым условиям (1.1) (фиг. 2, в), имеет вид

$$w = \frac{d\omega}{dz} = \frac{\Omega}{Z} = i\sqrt{\varepsilon} \operatorname{ctg} \alpha\tau \quad (2.6)$$



Фиг. 2

Принимая во внимание (2.6) и учитывая (2.2) и (2.4), найдем решение задачи в следующем параметрическом виде:

$$\Omega = \frac{Q \cos \alpha \tau}{\pi \sin \tau \sqrt{a - \sin^2 \tau}} \quad (2.7)$$

$$Z = - \frac{Qi \sin \alpha \tau}{\pi \sin \tau \sqrt{\varepsilon (a - \sin^2 \tau)}} \quad (2.8)$$

Запись представления (2.8) для различных участков границы области  $\tau$  с последующим интегрированием приводит к параметрическим уравнениям соответствующих граничных участков схемы.

Отметим предельные и частные случаи.

1.  $\varepsilon=0$  (отсутствие испарения). Решение для этого случая очевидным образом следует из (2.7) и (2.8), если совершить предельный переход  $\varepsilon \rightarrow 0$  и раскрыть по правилу Лопиталья возникающую при этом неопределенность.

2.  $T=\infty$ . Точки  $M_3$  и  $M_4$  на плоскости  $\tau$  сливаются, при этом  $a=1$ . Из (2.8) приходим к выражениям

$$l = \frac{Q}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}, \quad L = \frac{Q}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \quad (2.9)$$

определяющим минимальную и максимальную ширину орошаемой полосы грунта, которые совпадают соответственно с формулами (2.3) и (2.7) работы [2]. При  $\varepsilon=0$  из (2.7) получаем  $h_k = Q/\pi \ln \operatorname{cth} \mu$  ( $\mu$  — аффикс точки  $M_1$  в плоскости  $\tau$ ), что совпадает с формулой (15) работы [1]. При этом из (2.9) вытекает хорошо известный результат [1]  $Q=2l$ , из которого, в частности, следует, что в бесконечности ширина фильтрационного потока из оросителя равна удвоенной ширине зоны капиллярного насыщения на поверхности грунта. При  $h_k=0$  решение [1] приводится к фильтрации без учета действия капиллярных сил, причем расход на фильтрацию  $Q=2D$  совпадает с результатом [3] для фильтрации из канала, имеющего максимальную глубину, равную  $1/2 D$ .

**3. Схема вычислений и анализ численных результатов.** В прямой физической постановке параметры  $a$ ,  $\mu$  и расход  $Q$  являются искомыми. Для их определения служат глубина залегания дренирующего слоя  $T$  и радиус оросителя  $1/2D$ , которые получаются в результате интегрирования (2.8) от точки  $M_0$  до точек  $M_4$  и  $M_1$  соответственно, а также высота вакуума, обусловленного капиллярными силами в грунте  $h_k$ , находящаяся интегрированием (2.7) от точки  $M_1$  до точки  $M_2$ . В результате после устранения особенностей на концах в некоторых интегралах, подобно тому как это сделано в [5, с. 131–132], приходим к следующей системе уравнений

$(1/(1-\alpha)=\kappa):$

$$f_1(a, \mu, Q) = \frac{2Q}{\pi(1-\alpha)} \int_0^{e^{-(1-\alpha)\mu}} \frac{t^\kappa (1+t^{2\kappa}) dt}{(1-t^{2\kappa}) \sqrt{1+(4a-2)t^{2\kappa}+t^{4\kappa}}} = h_k \quad (3.1)$$

$$f_2[a, \mu, Q(a, \mu)] = \frac{Q}{\pi \sqrt{\varepsilon}} \int_0^\mu \frac{\text{sh } \alpha t dt}{\text{sh } t \sqrt{a + \text{sh}^2 t}} = 1/2 D \quad (3.2)$$

$$f_3[a, \mu(a)] = \frac{Q}{\pi \sqrt{\varepsilon a}} \int_0^{1/2\pi} \frac{\sin[\alpha \arcsin(\sqrt{a} \sin t)] dt}{\sin t \sqrt{1-a \sin^2 t}} = T \quad (3.3)$$

Левая часть уравнения (3.3), представляющая собой сложную функцию параметра  $a$ , содержит параметр  $\mu(a)$ , который в свою очередь определяется из уравнения (3.2). При этом неизвестная  $Q(a, \mu)$  предварительно исключается посредством уравнения (3.1). Согласно расчетам, при фиксировании параметра  $a \in (0, 1)$  функция  $f_2(a, \mu)$  монотонно возрастает по параметру  $\mu$ , функция  $f_3(a)$  оказывается при этом также монотонно возрастающей по параметру  $a$ . Таким образом, параметры  $a$  и  $\mu$  однозначно определяются уравнениями (3.2) и (3.3), которые решаются методом половинного деления. После нахождения параметров  $a, \mu$  и расхода  $Q$  определению подлежат величины  $r, R=1/2L, r_*=r|_{T=\infty}, R_*=R|_{T=\infty}, Q_*=Q|_{T=\infty}$ , а также координаты точек кривой депрессии. На фиг. 1 изображены кривые депрессии, рассчитанные при  $T=1,0; \varepsilon=0,01; h_k=1,0$  и  $D=0,4$ .

В таблице сведены результаты расчетов фильтрационных характеристик схемы по выяснению влияния  $\varepsilon, D$  и  $h_k$  на работу оросителя. Табли-

$h_k = 1,0; D = 0,4$				$\varepsilon = 0,01; h_k = 1,0$				$\varepsilon = 0,01; D = 0,4$			
$\varepsilon$	$r$	$R$	$Q$	$D$	$r$	$R$	$Q$	$h_k$	$r$	$R$	$Q$
0	0,6899	1,0844	3,0870	0,01	0,2194	0,4281	0,8702	0,05	0,2565	0,4933	1,0304
0,01	0,6889	1,0817	3,0879	0,1	0,4075	0,7272	1,6945	0,1	0,2957	0,5584	1,1904
0,1	0,6799	1,0588	3,0957	0,2	0,5206	0,8786	2,1869	0,5	0,5072	0,8615	2,1220
0,2	0,6708	1,0357	3,1045	0,4	0,6889	1,0817	3,0879	1,0	0,6889	1,0817	3,0879
0,3	0,6623	1,0146	3,1132	0,6	0,8271	1,2369	3,9832	1,5	0,8290	1,2390	3,9968
0,4	0,6544	0,9954	3,1223	0,8	0,9513	1,3709	4,9460	2,0	0,9437	1,3628	4,8818

ца состоит из трех разделов, в каждом из которых изменению подвергается один из указанных параметров, а остальные фиксируются при значениях  $\varepsilon=0,01; T=1,0; h_k=1,0$  и  $D=0,4$ .

Из таблицы видно, что интенсивность испарения оказывает относительно малое влияние, так как приводит к весьма незначительным изменениям расхода, а также радиуса капиллярного растекания воды в стороны от оросителя; при изменении диаметра оросителя в 80 раз радиус капиллярного растекания и расход изменяются всего лишь в 4,3 и 5,6 раза соответственно; почти к таким же изменениям приводит 40-кратное увеличение  $h_k$ , что говорит о большем влиянии капиллярности грунта. Обращает на себя внимание то, что при уменьшении  $h_k$  от 0,5 до 0,05 радиус  $r$  изменяется от 0,5072 до 0,2565, так что величина  $r/h_k$  увеличивается от 1,01 до 5,13, т. е. более чем в 5 раз.

Таким образом, радиус капиллярного растекания воды  $r$  может значительно превышать высоту капиллярного вакуума  $h_k$ , при этом величина  $r/h_k$  тем больше, чем меньше абсолютная величина  $h_k$ . Это обстоятельство

указывает на существенное значение горизонтального капиллярного всасывания воды даже для слабокапиллярных грунтов [1].

Из всего сказанного следует, что наиболее существенное влияние на расход оросителя и ширину орошаемой полосы грунта оказывает капиллярность грунта, которая повышает эффективность оросителя [1, 2].

Результаты расчетов влияния глубины залегания дренирующего слоя  $T$  при  $\epsilon=0,01$ ;  $h_k=1,0$  и  $D=0,3$  представлены ниже.

$T$	0,8	1,4	2,0	2,6	3,2	3,8	$\infty$
$r$	0,5948	0,6246	0,6305	0,6318	0,6321	0,6322	0,6322
$R$	0,9152	0,0930	1,1795	1,2219	1,2419	1,2518	1,2612
$Q$	2,7377	2,5717	2,5427	2,5367	2,5353	2,5351	2,5349

Присутствие безнапорного сильнопроницаемого пласта практически сказывается на величинах  $r$  и  $Q$  при  $T < 2,0$ . При больших значениях  $T$  отклонения этих величин от значений  $r_*$  и  $Q_*$  не превышают 1%.

В заключение приведем для сравнения результаты приближенного решения при  $T = \infty$  (см. [6, пример 35]);  $r_* = 0,6$ ;  $R_* = 1,2$ ;  $Q_* = 2,44$ .

Автор благодарит В. Н. Эмиха за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. Фильтрация воды из оросителя ирригационной системы.— Докл. АН СССР, 1949, т. 66, № 4, с. 589—592.
2. Нумеров С. Н. Об одном способе решения фильтрационных задач.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 4, с. 133—139.
3. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.— Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
5. Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969. 414 с.
6. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Л.— М.: Госстройиздат, 1955. 292 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
14.III.1986