

УДК 532.527-2

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПЛОСКИХ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

АБРАШКИН А. А.

Два точечных вихря интенсивности κ_1 и κ_2 вращаются по круговой траектории вокруг общего центра завихренности с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = (\kappa_1 + \kappa_2) / 2\pi L^2$, где L — расстояние между вихрями. Учет неточечности вихрей значительно усложняет исследование их взаимодействия. Такое взаимодействие аналитически изучено [2] только для пары идентичных вихрей с одинаковыми и противоположными по знаку интенсивностями, когда размеры вихрей много меньше расстояния между ними. В этом случае движение жидкости в системе отсчета, движущейся с парой вихрей, является стационарным. Было показано, что границей вихрей служат эллипсы, они обращены друг к другу малыми полуосями и равномерно движутся в направлении, совпадающем с направлением больших полуосей.

В настоящей работе в приближении малости размеров вихрей по сравнению с расстоянием между ними рассмотрено нестационарное взаимодействие двух эллиптических в начальный момент вихрей с произвольными интенсивностями. Показано, что центры вихревых областей движутся как точечные вихри той же интенсивности, что и распределенные, а сами области завихренности, оставаясь эллиптическими по форме, периодически деформируются и неравномерно вращаются вокруг своих центров. Динамика этих движений изучена с помощью плоскости.

1. Рассмотрим движение двух однородно завихренных областей, характерные размеры которых L_1, L_2 много меньше расстояния между ними L . Последнее обстоятельство дает возможность вместо изучения самосогласованного движения двух вихрей исследовать динамику одиночного распределенного вихря в заданном внешнем нестационарном поле, создаваемом другим вихрем. Покажем это.

Динамику движения двух вихрей удастся полностью исследовать в предположении их точечности, когда завихренность сконцентрирована в отдельных точках. Поэтому при рассмотрении движения вихрей в следующем приближении по малому параметру отношения размера вихря к расстоянию между ними естественно считать, что центры завихренности распределенных вихрей W_1, W_2 ($W = X + iY$ — комплексная координата) движутся как точечные той же интенсивности, что и распределенные: равномерно вращаются с постоянной угловой скоростью ω_0 (заметим, что для однородно завихренных областей координаты центров завихренности и центров инерции совпадают).

Потенциальное поле скорости вблизи одного из вихрей, например, первого, можно записать в виде

$$\bar{V}(W, t) = \bar{V}_1(W, t) + \frac{\Omega_2}{2\pi i} \iint_{D_2} \frac{d\sigma(W', \bar{W}')}{W - W_2 - W'} \quad (1.1)$$

Здесь $\bar{V}_1(W, t)$ — поле скорости, создаваемое первым вихрем (черта — знак комплексного сопряжения), $d\sigma(W', \bar{W}')$ — элемент площади второго вихря, завихренность Ω_2 внутри которого предполагается постоянной, а W' — «текущая» координата, отсчитываемая от его центра.

Если перейти в систему отсчета, где центр первого вихря покоится (в выражении (1.1) следует провести замену $W \rightarrow W + W_1$), и, кроме того, разложить подынтегральную функцию в ряд по параметру $(W - W')$ /

$/(W_2 - W_1)$, ограничившись линейными по W и W' членами, то поле скорости вблизи первого вихря запишется в виде

$$\bar{V}(W, t) = \bar{V}_1(W, t) - \frac{\kappa_2}{2\pi i} \frac{W}{L^2} e^{-2i\omega_0 t} \quad (1.2)$$

Здесь для простоты полагалось, что в начальный момент центры вихрей лежат на действительной прямой и, следовательно, $W_2 - W_1 = L e^{i\omega_0 t}$. В рассматриваемом приближении распределение скоростей, создаваемое вторым вихрем вблизи первого, не зависит от формы второго вихря, поскольку из определения центра следует, что интеграл W' по области D_2 равен нулю.

Итак, влияние одного из вихрей на динамику другого в принятом приближении эквивалентно действию вблизи него линейного по комплексной координате и гармонического по времени деформационного поля.

Для целей исследования удобно рассмотреть отдельно задачу о поведении одиночного (находящегося в безграничной жидкости) вихря в указанном деформационном поле. При этом выражение для поля скорости (1.2) будет справедливо уже во всей области вне вихря, а не только вблизи его границы. Заметим, что скорость потенциального течения вне вихря вблизи бесконечно удаленной точки равно второму слагаемому в правой части (1.2). Применительно к проблеме взаимодействия двух вихрей решение такой задачи будет иметь смысл только внутри вихря и вблизи его границы.

2. Для рассмотрения динамики одиночного вихря в однородном деформационном поле воспользуемся комплексными лагранжевыми координатами. Система уравнений двумерной гидродинамики идеальной жидкости эквивалентна следующей системе уравнений [3]:

$$(W_\eta(\bar{W})_\eta - W_{\bar{\eta}}(\bar{W})_\eta)_t = 0, \quad (W_{t\eta}(\bar{W})_\eta - W_{t\bar{\eta}}(\bar{W})_\eta)_t = 0$$

где $W = X + iY$, $\eta = a + ib$ (здесь X , Y — координаты траектории жидких частиц, a , b — их лагранжевы координаты), t — время. Эти уравнения выражают соответственно условия несжимаемости жидкости и сохранения завихренности вдоль траекторий.

Будем искать их решение в виде $W = \eta g(t) + \bar{\eta} f(t)$, из уравнения непрерывности и движения следует, что

$$|g|^2 - |f|^2 = C = \text{const}, \quad \dot{g}\bar{g} - \dot{f}\bar{f} = \frac{1}{2} i \Omega C \quad (2.1)$$

где Ω — постоянная завихренность. Вид правой части последнего уравнения станет очевиден, если найти выражение для завихренности в лагранжевых координатах. Решая (2.1), получим вид искомого решения

$$W = \eta |g| e^{i\varphi} + \bar{\eta} \sqrt{|g|^2 - C} e^{i\psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{2\dot{\varphi}|g|^2 - \Omega C}{2(|g|^2 - C)} \quad (2.2)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — фазы функций g и f . Выражения (2.2) описывают некоторый класс нестационарных течений с постоянной завихренностью.

В дальнейшем будем предполагать, что эти соотношения описывают движение внутри вихря. При этом примем, что в плоскости лагранжевой переменной η области вихревого течения соответствует внутренность единичного круга. Вопрос о сшивке таких вихревых течений с внешними потоками будет рассмотрен ниже. Из вида решения (2.2) можно заключить, что граница вихря ($|\eta| = 1$) будет всегда эллипсом. Вследствие этого введем в (2.2) новые функции $A(t)$, $B(t)$, имеющие смысл полуосей эллипса

$$AB = C, \quad |g|^2 = \frac{1}{4}(A+B)^2 \quad (2.3)$$

$$W = \frac{1}{2} \eta (A+B) e^{i\varphi} + \frac{1}{2} \bar{\eta} (A-B) e^{i\psi}, \quad A \geq B \quad (2.4)$$

Помимо деформации (A и B — функции времени; постоянство же их

произведения отражает тот факт, что площадь вихря постоянна) вихрь вращается вокруг собственного центра инерции с мгновенной угловой скоростью

$$\omega(t) = \frac{1}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = \frac{\dot{\varphi}(A^2 + B^2) - \Omega AB}{(A - B)^2} \quad (2.5)$$

Таким образом, решение (2.4) описывает тот случай движения вихря (A, B, ω — произвольные функции времени), при котором он остается эллипсом. Вид функций A, B, ω определяется течением снаружи вихря.

В частности, если считать A и B не зависящими от времени и положить $\dot{\varphi} = \lambda = \text{const}, \dot{\psi} = 0$, то (2.4) будет описывать вихрь Кирхгофа [4] — область эллиптической формы, равномерно вращающуюся в окружающем потенциальном течении с угловой скоростью $\omega = \frac{1}{2}\lambda = \Omega AB(A+B)^{-2}$. Жидкие частицы в вихре при этом движутся равномерно по окружности с угловой скоростью λ . Если теперь принять, что $\dot{\psi} = \mu = \text{const}$, то (2.4) будет описывать семейство эллиптических вихрей, вращающихся без изменения формы с угловой скоростью $\omega = [\lambda(A^2 + B^2) - \Omega AB](A - B)^{-2}$. Частным случаем этого семейства (при $\lambda = -\mu$) является стационарный вихрь работы [2].

Решение (2.4) описывает также нестационарные эллиптические вихри, находящиеся в сдвиговом потоке [5] и потоке, задаваемом соотношением [6] $\bar{V} = \delta W - i\gamma \bar{W}$, где δ, γ — действительные постоянные.

3. Исследуем теперь вопрос о сшивке вихревого течения (2.4) с внешним потенциальным, имеющим на бесконечности асимптотику $\bar{V}_\infty = -i\kappa_2(2\pi)^{-1}WL^{-2} \exp(-2i\omega_0 t)$.

Согласно предположению, вихревому движению жидкости на плоскости η соответствует внутренность единичного круга. Скорость внутри вихря определяется выражением

$$V = \frac{1}{2}\eta[A + B + i\dot{\varphi}(A + B)]e^{i\varphi} + \frac{1}{2}\bar{\eta}[A - B + i\dot{\psi}(A - B)]e^{i\psi}, \quad |\eta| \leq 1.$$

Для потенциального течения комплексно-сопряженная скорость $\bar{V}$ является функцией комплексной координаты W . Имея в виду это обстоятельство, нетрудно убедиться, что соотношения

$$W = \frac{1}{2}\eta(A + B)e^{i\varphi} + \frac{1}{2}\frac{1}{\eta}(A - B)e^{i\psi} \quad (3.1)$$

$$\bar{V} = \frac{1}{2}\frac{1}{\eta}[A + B - i\dot{\varphi}(A + B)]e^{-i\varphi} + \frac{1}{2}\eta[A - B - i\dot{\psi}(A - B)]e^{-i\psi}$$

где η — служит параметром и совпадает с лагранжевой координатой только на границе вихря, решают проблему потенциального продолжения вихревого движения (2.4) с непрерывной скоростью на границе. Действительно, выражения (3.1) есть параметрическое представление поля скорости $\bar{V}(W, t)$, причем это представление однозначно, поскольку производная функции W по параметру η нигде не обращается в нуль вне вихря.

Вблизи бесконечно удаленной точки поле скорости записывается в виде

$$\bar{V}_\infty = \frac{A - B - i\dot{\psi}(A - B)}{A + B} W e^{-i(\varphi + \psi)} \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что соотношения (2.4), (3.1) решают задачу о поведении одиночного вихря в произвольном нестационарном однородном деформационном поле.

Воспользуемся полученным решением для рассмотрения взаимодействия двух вихрей, когда, как показано в разд. 1, деформационное поле гармонически зависит от времени. Сравнивая выражения (1.2) и (3.2), а также используя (2.2), (2.3), нетрудно записать условия на выбор пара-

метров эллиптического вихря

$$\frac{A-B-i\psi(A-B)}{A+B} e^{-i(\varphi+\psi)} = \frac{i\kappa_2}{2\pi L^2} e^{-2i\omega_0 t} \quad (3.3)$$

$$(A-B)^2 \dot{\psi} = (A+B)^2 \dot{\varphi} - 2\Omega_1 AB, \quad AB = C \quad (3.4)$$

Вид этих уравнений можно упростить, введя новые переменные θ, σ : $\theta = A/B, \sigma = \varphi + \psi - 2\omega_0 t$

$$\dot{\theta} = -2\Gamma_2 \theta \sin \sigma, \quad \Gamma_2 = \frac{\kappa_2}{2\pi L^2} \quad (3.5)$$

$$\dot{\sigma} = -2\omega_0 - \frac{2\Gamma_2(\theta^2+1)}{\theta^2-1} \cos \sigma + \frac{2\Omega_1 \theta}{(\theta+1)^2} \quad (3.6)$$

Таким образом, динамика одиночного вихря в поле, создаваемом другим вихрем, описывается системой двух автономных уравнений первого порядка.

Система (3.5), (3.6) имеет первый интеграл вида

$$2\Gamma_2 \cos \sigma = \frac{\theta}{\theta^2-1} \left[2\Omega_1 \ln \frac{(\theta+1)^2}{\theta} - 2\omega_0 \frac{\theta^2+1}{\theta} + C_0 \right]$$

с помощью которого нетрудно получить неявное представление функции $\theta(t)$

$$t-t_0 = -\frac{1}{2\Gamma_2} \int_{\theta(t_0)}^{\theta} \left[1 - \frac{\theta^2}{2\Gamma_2^2(\theta-1)^2} \left(2\Omega_1 \ln \frac{(\theta+1)^2}{\theta} - 2\omega_0 \frac{\theta^2+1}{\theta} + C_0 \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{d\theta}{\theta}$$

Здесь C_0 — постоянная определяемая начальными условиями. Полученное решение довольно громоздко. Свойства решений системы (3.5), (3.6) поэтому удобнее исследовать с помощью фазовой плоскости.

Исследуем вначале стационарные решения этой системы ($\dot{\theta}=0, \dot{\sigma}=0$). Для состояния равновесия, которому отвечает значение $\sigma=0$, величина отношения полуосей определяется из кубического уравнения

$$\kappa_1(\theta+1)^2(\theta-1) - 2\pi L^2 \Omega_1 \theta(\theta-1) + 2\kappa_2 \theta^2(\theta+1) = 0 \quad (3.7)$$

Запишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{(\theta+1)[\theta^2(1+2\kappa_2/\kappa_1)-1]}{\theta(\theta-1)} = \frac{2\pi L^2 \Omega_1}{\kappa_1} = \varepsilon \quad (3.8)$$

Поскольку циркуляция равна произведению завихренности на площадь вихря S , то для постоянной ε справедлива оценка $\varepsilon = 2\pi L^2/S \sim (L/L_1)^2 \gg 1$. Исследуя расположение корней уравнения (3.8) с помощью графического метода, нетрудно показать, что для интенсивностей вихрей одного знака ($\kappa_1 \kappa_2 > 0$) и разных знаков справедливы следующие соотношения:

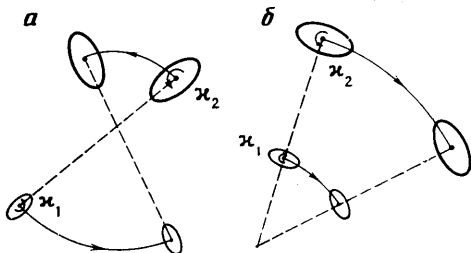
$$0 < \theta_1^+ \ll 1, \quad \theta_2^+ \gtrsim 1, \quad \theta_3^+ \gg 1 \quad (\kappa_1 \kappa_2 > 0)$$

$$0 < \theta_1^- \ll 1, \quad \theta_2^- \lesssim 1, \quad \theta_3^- \gg 1 \quad (\kappa_1 \kappa_2 < 0)$$

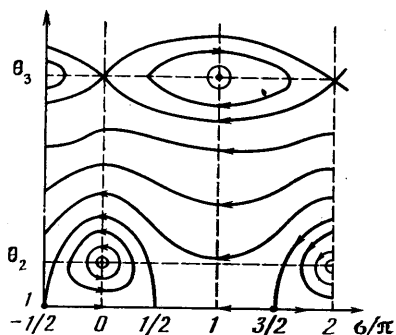
Исследование положения равновесия, соответствующего $\sigma=\pi$, легко свести к только что рассмотренному случаю, поскольку вид системы (3.5), (3.6) инвариантен к замене $\theta \rightarrow \theta^{-1}, \sigma \rightarrow \sigma + \pi$. Вследствие этого значению $\sigma=\pi$ отвечают состояния равновесия $(\theta_1^\pm)^{-1}, (\theta_2^\pm)^{-1}, (\theta_3^\pm)^{-1}$.

В силу выбора вида решения величина θ должна превышать единицу (см. (2.4)). Для «стационарных» значений θ , существенно превышающих единицу, нарушается принятое предположение о малости размеров вихрей по сравнению с расстоянием между ними. В самом деле, из уравнения (3.8) для $\theta \gg 1$ имеем $\theta = A/B \sim 2\pi L^2/S \gg 1$; поскольку же $AB \sim S$, то получаем, что одна из полуосей эллипса A порядка L .

Таким образом, стационарными решениями системы (3.5), (3.6), удовлетворяющими условиям рассматриваемой задачи, являются в случае $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ значения $\sigma=0, \theta=\theta_2^+$, а в случае $\kappa_1 \kappa_2 < 0$ — значения $\sigma=\pi, \theta=$



Фиг. 1



Фиг. 2

$= (\theta_2^-)^{-1}$. В обоих случаях величина отношения полуосей несколько превышает единицу, близость ее к единице означает, что стационарные вихри мало отличаются от круговых (нестационарные вихри, естественно, могут быть существенно эллиптическими при выполнении условия малости полуосей по сравнению с L).

Величина угловой скорости вращения вихря вокруг собственного центра инерции для стационарного решения, как следует из (2.5), (3.6), равна ω_0 , поэтому вихрь не меняет своей ориентации относительно прямой, соединяющей центры вихрей (напомним, что центры вихрей движутся как точечные вихри той же интенсивности, что и рассматриваемые распределенные). Ориентацию эллипса относительно этой линии можно определить, рассмотрев его положение в начальный момент времени, когда координаты центров вихрей действительны. Поскольку в случае вихрей с одинаковой по знаку интенсивностью $\theta_2^+ > 1$ при $\sigma = 0$, то большая ось эллипса лежит на прямой, соединяющей центры вихрей. В случае вихрей с разной по знаку интенсивностью значению $(\theta_2^-)^{-1} > 1$ соответствует $\sigma = \pi$ и, следовательно, на указанной прямой лежит малая ось эллипса.

Точно такое же рассмотрение можно провести и для второго вихря (во всех соотношениях индексы 1 и 2 поменяются местами). Таким образом, в первом приближении по параметру, равному отношению характерного размера вихрей к расстоянию между ними, стационарным состоянием является такое, в котором эллипсы неизменных размеров вращаются вокруг центра завихренности с неизменной ориентацией относительно линии, соединяющей их центры (фиг. 1).

В том случае, если ориентация вихревых областей эллиптической формы не совпадает с ориентацией вихрей, соответствующей стационарному состоянию, эллипсы будут неравномерно вращаться и деформироваться. Для качественного анализа этих движений удобно воспользоваться фазовой плоскостью.

Определим вначале типы состояний равновесия. После линейризации система (3.5), (3.6) примет вид

$$\dot{\theta}' = -2\Gamma_2\theta_0\sigma' \cos \sigma_0 \quad (3.9)$$

$$\dot{\sigma}' = \left[\frac{8\theta_0\Gamma_2}{(\theta_0^2 - 1)^2} \cos \sigma_0 - \frac{2\Omega_1(\theta_0 - 1)}{(\theta_0 + 1)^2} \right] \theta' \quad (3.10)$$

Здесь θ_0 , σ_0 — значения величины в состоянии равновесия, а θ' , σ' — отклонения от них. Находя корни характеристического уравнения для этой системы, нетрудно заключить, что состояния равновесия, соответствующие близким к единице значениям θ , являются центрами; состояния равновесия, соответствующие существенно превышающим единицу значениям отношения полуосей, являются седлом для $\sigma_0 = 0$ и центром в случае $\sigma_0 = \pi$ ($x_1 x_2 > 0$).

Исследуем физический смысл особенности при $\theta = 1$ в правой части уравнения (3.6). Для этого запишем уравнение (3.3) в виде системы

уравнений

$$(A-B) \cos \sigma - \psi (A-B) \sin \sigma = 0; \quad (A-B) \sin \sigma + \psi (A-B) \cos \sigma = 0$$

Из первого уравнения этой системы следует, что если $\sigma \neq \pi/2 + \pi k$, k — целое, то в тот момент, когда вихрь становится круговым, т. е. $\theta=1$ или $A=B$, выражение $A-B$ обращается в нуль. Это означает, что самосогласованно выбираемое решением (3.1) линейное по W деформационное поле в этот момент времени становится равным нулю и, следовательно, нельзя пренебрегать квадратичным по W членом в выражении для деформационного поля. В точках $\sigma = \pi/2 + \pi k$ решение с линейным по W деформационным полем существует, т. е. через указанные точки проходят фазовые траектории, отличные от траектории $\theta=1$.

На фиг. 2 изображена фазовая плоскость для случая $\kappa_1 \kappa_2 > 0$, $\kappa_2 < 0$. Ориентация эллипса относительно прямой, соединяющей центры вихрей, определяется величиной σ . Действительно, (2.4) можно переписать

$$W = \frac{1}{2} [\eta (A+B) e^{1/2 i(\varphi-\psi)} + \bar{\eta} (A-B) e^{1/2 i(\psi-\varphi)}] e^{1/2 i(\varphi+\psi)}$$

Выражение в квадратных скобках описывает эллипс, у которого большая ось лежит на горизонтальной прямой. Экспоненциальный же множитель описывает вращение эллипса вокруг своего центра. Угол поворота большой полуоси относительно горизонтали равен $1/2(\varphi+\psi) = \sigma/2 + \omega_0 t$. Линейный по времени член в этом равенстве отвечает равномерному вращению эллипса, при котором его ориентация относительно прямой, соединяющей центры вихрей, не изменяется, поскольку центры вихрей вращаются с той же угловой скоростью относительно центра завихренности. Следовательно, слагаемое $\sigma/2$ определяет поворот эллипса относительно прямой, соединяющей центры вихрей.

Следовательно если в начальный момент вихрь повернут на угол, меньший $\pi/4$ по отношению к своему «стационарному» положению, то он колеблется относительно этого положения (замкнутые траектории на фазовой плоскости). В случае малых отклонений от состояния равновесия (см. (3.9), (3.10)) собственная частота колебаний вихря $\omega' = 4\theta_0 \Gamma_2 / (\theta_0 - 1)$, что существенно превышает частоту вращения вихрей вокруг центра завихренности, поскольку

$$\frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{4\theta_0 \kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\theta_0 - 1)}, \quad \theta_0 \gg 1$$

В случае большего отклонения от стационарного положения (превышающего угол $\pi/4$), например когда вихри с одинаковой по знаку интенсивностью в начальный момент обращены друг к другу малыми осями, вихри стремятся повернуться так, чтобы «смотреть» друг на друга большими полуосями (таким движениям на фазовой плоскости соответствуют незамкнутые траектории).

Для вихрей с отношением полуосей, очень близким к единице (фазовые траектории близко подходят к прямой $\theta=1$), решение (3.1) становится несправедливым. При этом вихрь уже не будет оставаться эллипсом, а будет деформироваться более сложным образом. В этих областях фазовой плоскости результаты могут быть справедливы только качественно. Справедливость решения (3.1) нарушается с того момента, как временной множитель перед W в выражении для деформационного поля по порядку величины станет меньше L_1/L .

Если в начальный момент вихрь круговой, то, как следует из фиг. 2, он будет вытягиваться в направлении прямой, соединяющей центры вихрей. Этот вывод согласуется с результатами численного эксперимента [7].

Для вихрей с разными по знаку интенсивностями фазовая плоскость имеет такой же вид, но вся картина должна быть сдвинута на π по оси σ .

С учетом этого замечания легко переформулировать приведенные выше результаты о движении вихрей. В частности, первоначально круговой вихрь будет вытягиваться поперек прямой, соединяющей центры вихрей; колебательный режим движения вихрей относительно их «стационарного» положения будет осуществляться, если их отклонение в начальный момент от этого положения меньше угла $\pi/4$, и т. д.

При исследовании взаимодействия конечного набора вихрей воздействие на некоторый выделенный вихрь, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до остальных вихрей, эквивалентно действию нестационарного однородного деформационного поля (доказательство этого факта аналогично доказательству, приведенному в разд. 1 для случая взаимодействия двух вихрей). Вид этого поля определяется из решения задачи о движении точечных вихрей той же интенсивности, что и распределенные. Таким образом, решение (2.4), (3.1) позволяет рассчитывать в первом приближении влияние распределенности вихрей на характер их взаимодействия. Динамика движения распределенных вихрей, очевидно, определяется при этом решением нулевого приближения, когда вихри предполагаются точечными.

Автор благодарит Е. И. Якубовича за полезные обсуждения и ценные замечания при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. Moore D. W., Saffman P. G. The density of organized vortices in a turbulent mixing layer.— J. Fluid Mech., 1975, v. 69, № 3, p. 465–473.
3. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. О плоских вихревых течениях идеальной жидкости.— Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 1, с. 76–78.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. Чаплыгин С. А. О пульсирующем цилиндрическом вихре.— Собр. соч. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 138–154.
6. Kida S. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow.— J. Phys. Soc. Jap., 1981, v. 50, № 10, p. 3517–3520.
7. Дим Г., Забускин Н. Стационарные V-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение.— В сб.: Солитоны в действии. М.: Мир, 1981, с. 289–304.

Горький

Поступила в редакцию
28.XII.1985