

УДК 532.526.3.013.4-3

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕЧЕНИИ БЛАЗИУСА

ЗАЙЦЕВ А. А., ЮРОКИН А. И.

Экспериментальные исследования процесса образования турбулентности в пограничном слое позволили к настоящему времени выделить два типа перехода, обнаруженных соответственно в [1] (субгармонический переход) и в [2]. Субгармонический тип перехода характерен для возникновения турбулентности в потоках с низким уровнем свободной турбулентности и при отсутствии достаточно интенсивных возмущений некоторой определенной частоты. При таком типе перехода основным механизмом усиления возмущений пограничного слоя являются резонансные взаимодействия плоских двумерных волн Толлмина — Шлихтинга с трехмерными волнами половинной частоты — субгармониками, образующими резонансные триады [3]. Численное моделирование развития волновых пакетов, основанное на учете таких взаимодействий, показало хорошее согласование с экспериментальными данными при субгармоническом типе перехода [4].

Однако в этой же работе отмечалась непригодность данной модели для описания клевановского типа перехода, свойственного экспериментам, в которых в слабо возмущенный поток при помощи специального вибратора вносятся достаточно интенсивные двумерные возмущения. Характерной особенностью этого типа перехода является отсутствие в потоке возмущений половинной частоты по отношению к внешним. Теоретический анализ такого типа перехода, основанный на рассмотрении квадратичных четырехволновых взаимодействий [5], указал на интенсивное нарастание как двумерных, так и трехмерных возмущений.

Однако в такой модели не полностью раскрыт механизм образования возмущений удвоенной частоты по отношению к частоте колебания вибратора, вступающих в резонансные взаимодействия с вносимыми возмущениями. Возможно, образование возмущений удвоенной частоты является следствием квадратичных взаимодействий вносимых возмущений. Основанием для такого заключения может служить хорошее совпадение стационарных вторичных течений, рассчитанных в [6], с экспериментальными данными [2]. Такое предположение приводит к необходимости рассмотрения взаимодействия внесенных возмущений с порожденными ими вторичными течениями. При этом оказывается возможным учесть наличие резонансного механизма при взаимодействии внесенных возмущений со вторичными течениями удвоенной частоты. Также такая модель позволяет одновременно учесть влияние стационарных двумерных и трехмерных вторичных течений на развитие внесенных возмущений.

В настоящей работе рассматривается модель, учитывающая взаимодействие вносимых двумерных и трехмерных возмущений одинаковой частоты со всеми формами образуемых ими вторичных течений. Была получена и численно исследована система дифференциальных уравнений, описывающая нелинейную пространственную эволюцию амплитуд вносимых в пограничный слой возмущений, имеющих вид волн Толлмина — Шлихтинга. Коэффициенты этой системы уравнений определялись из гидродинамических уравнений.

1. Постановка задачи. Изучается развитие возмущений в пограничном слое на плоской пластине. Ось X направлена от передней кромки вдоль пластины, ось Y — перпендикулярно пластине, а ось Z — вдоль передней кромки. На первом шаге для получения амплитудных уравнений исследуются зависимости между амплитудами взаимодействующих волн и их производными по продольной координате в окрестности плоскости $X=X_0$, удаленной на произвольное, но фиксированное расстояние X_0 от передней кромки. Затем, используя произвол в выборе X_0 , эти дифференциальные уравнения распространяются на всю исследуемую область течения. Невозмущенное течение рассматривается в локально-параллельном приближении и задается продольной составляющей скорости U , отнесенной к ско-

рости набегающего потока U_0 и соответствующей расстоянию X_0 от передней кромки. Зависимость основного течения от продольной координаты и перпендикулярная к пластине составляющая основного течения не учитываются.

Пусть x, y, z, t — безразмерные координаты и время. Уравнения для возмущений имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{V} + \nabla p - \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{v} = -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{V} = \{U(y), 0, 0\}; \quad \mathbf{v} = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}$$

Граничные условия получаются из требований прилипания жидкости на поверхности пластины и исчезновения возмущений вдали от нее. Рассматривается случай, когда в невозмущенное течение внесены двумерные (не зависящие от координаты z) и трехмерные (периодичные по z с заданным волновым числом) возмущения определенной частоты. Решение нелинейной задачи ищется в виде двойных рядов Фурье по переменным z и t

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left[u_{k0} + \sum_{l=1}^{\infty} (u_{kl} e^{-il\omega t} + \bar{u}_{kl} e^{il\omega t}) \right] \cos k\beta z$$

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \left[v_{k0} + \sum_{l=1}^{\infty} (v_{kl} e^{-il\omega t} + \bar{v}_{kl} e^{il\omega t}) \right] \cos k\beta z$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left[w_{k0} + \sum_{l=1}^{\infty} (w_{kl} e^{-il\omega t} + \bar{w}_{kl} e^{il\omega t}) \right] \sin k\beta z \quad (1.2)$$

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} \left[p_{k0} + \sum_{l=1}^{\infty} (p_{kl} e^{-il\omega t} + \bar{p}_{kl} e^{il\omega t}) \right] \cos k\beta z$$

$$\beta = \frac{2\pi \text{Re } v}{U_0 \lambda_z}; \quad \omega = \frac{2\pi \Omega v \text{Re}}{U_0^2}; \quad \text{Re} = \frac{U_0 L}{v}$$

где L — характерный линейный размер, связанный с X_0 ; λ_z — длина волны в направлении оси Z ; Ω — частота вносимых возмущений.

Коэффициенты Фурье для возмущений скорости и давления представляются в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε . Учитывая, что при нелинейном развитии вносимые возмущения сохраняют вид волн Толлмина — Шлихтинга, разложения для коэффициентов при первой гармонике по времени, нулевой и первой по z определяются в форме

$$\mathbf{v}_{k1} = \varepsilon A_k(x) [\mathbf{v}_{k1}^{(1)}(y) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_{k1}^{(3)}(x, y) + \dots]; \quad k=0, 1 \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{A_k} \frac{dA_k}{dx} = i\alpha_k + \varepsilon^2 \delta_k + \dots; \quad k=0, 1 \quad (1.4)$$

$$\|\mathbf{v}_{k1}^{(1)}(y) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_{k1}^{(3)} + \dots\| = 1; \quad k=0, 1 \quad (1.5)$$

где $\mathbf{v}_{k1} = \{u_{k1}, v_{k1}, w_{k1}\}$, $A_k(x)$ — амплитуды, а $\mathbf{v}_{k1}^{(n)}$ — амплитудные функции. Необходимость введения нормировочных соотношений (1.5) для однозначного определения решений задач последовательных приближений подробно обсуждалась в [7].

Пусть $\mathbf{v}_{kl}^{(n)} = \{u_{kl}^{(n)}, v_{kl}^{(n)}, w_{kl}^{(n)}\}$.

Уравнения первого приближения, до-

полненные граничными условиями прилипания при $y=0$ и затухания возмущений при $y=\infty$, приводят к известной задаче Орра — Зоммерфельда и могут быть записаны в виде

$$L(i\alpha_k, k\beta, \omega) v_{k1}^{(4)}(y) = 0; \quad k=0, 1 \quad (1.6)$$

$$M(i\alpha_1, \beta, \omega) \eta_{11}^{(4)}(y) + \beta v_{11}^{(4)}(y) U' = 0$$

$$v_{k1}^{(4)}(0) = v_{k1}^{(4)}(0) = \eta_{11}^{(4)}(0) = 0, \quad v_{k1}^{(4)}, \quad \eta_{11}^{(4)} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty)$$

$$L(i\alpha, \beta, \omega) = (i\alpha U - i\omega) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) - i\alpha U'' - \text{Re}^{-1} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right)^2 \quad (1.7)$$

$$M(i\alpha, \beta, \omega) = i\alpha U - i\omega - \text{Re}^{-1} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right)$$

Собственные значения α_k определяются из условий существования ненулевого решения. При рассчитанных α_k , $v_{k1}^{(4)}$ и $\eta_{11}^{(4)}$ функции $u_{k1}^{(4)}$ и $w_{11}^{(4)}$ определяются из соотношений

$$i\alpha_k u_{k1}^{(4)} + k\beta w_{k1}^{(4)} = -v_{k1}^{(4)'}; \quad k\beta u_{k1}^{(4)} + i\alpha_k w_{k1}^{(4)} = \eta_{11}^{(4)}, \quad k=0, 1; \quad w_{11}^{(4)} = \eta_{01}^{(4)} = 0 \quad (1.8)$$

Уравнения второго приближения, дополненные граничными условиями прилипания при $y=0$ и затухания возмущений при $y \rightarrow \infty$, позволяют с точностью до ε^2 определить коэффициенты Фурье в разложениях (1.2) при нулевой и второй гармониках по времени и при нулевой, первой и второй гармониках по координате z . Эти коэффициенты описывают вторичные течения, образуемые в пограничном слое вносимыми возмущениями. Предварительное рассмотрение коэффициентов Фурье для нелинейных членов уравнений (1.1) позволяет с точностью до ε^2 представить их как

$$[(\nabla \nabla) \mathbf{v}]_{kl} = \begin{cases} \varepsilon^2 \text{Real}[A_i A_j \mathbf{F}_{k0}^{(21)}(y) + \delta_k^\circ |A_1|^2 \mathbf{F}_{00}^{(22)}(y)], & l=0 \\ \varepsilon^2 [A_i A_j \mathbf{F}_{k2}^{(21)}(y) + \delta_k^\circ A_1^2 \mathbf{F}_{02}^{(22)}(y)], & l=2 \end{cases} \quad (1.9)$$

$k=0, 1, 2; \quad l=0, 2; \quad i, j=0, 1; \quad i \leq j; \quad i+j=k$

где δ_k° — символы Кронекера, а функции $\mathbf{F}_{kl}^{(n)}(y)$ выражаются через решения задач первого приближения.

В нелинейных взаимодействиях эффективно участвуют волнообразные возмущения с близкими частотами и составляющими волнового вектора в направлении основного течения [8]. Поэтому представляет интерес рассмотрение развития вносимых возмущений, для которых величины $\varepsilon_{ij} = \alpha_i - \bar{\alpha}_j$, $i, j=0, 1$, являются малыми. В данной работе при анализе решений задач второго и третьего приближения по ε учитывались члены нулевого порядка по ε_{ij} . Тем самым исследовалось влияние нелинейных взаимодействий на пространственное развитие возмущений, но не рассматривалось влияние волнового рассогласования и слабого пространственного развития возмущений на их нелинейные взаимодействия.

Зависимость от x правых частей (1.9) обусловлена наличием комплексных амплитуд $A_i(x)$. Однако в коэффициенты Фурье при нулевых гармониках по времени указанные амплитуды входят в виде комбинаций $A_i \bar{A}_j$, зависимостью которых от x при учете членов нулевого порядка по ε_{ij} можно пренебречь. Это позволяет коэффициенты Фурье, определяющие двумерное стационарное вторичное течение с точностью до ε^2 , искать в виде

$$\mathbf{v}_{00}(x, y) = \varepsilon^2 \left[\sum_{i=0}^1 A_i \bar{A}_i \mathbf{v}_{00}^{(21)}(y) + \mathbf{v}_{00}^{(2)}(x, y) \right] \quad (1.10)$$

Первые слагаемые (1.10) являются решением неоднородных уравнений, получающихся подстановкой (1.2), (1.9), (1.10) в (1.1) и сохранением членов при ε^2 . При выполнении условий прилипания эти слагаемые определяются в квадратурах

$$u_{00}^{(2i)}(y) = \frac{1}{1+i} \int_0^y (u_{i1}^{(1)} \bar{v}_{i1}^{(1)} + \bar{u}_{i1}^{(1)} v_{i1}^{(1)}) dy; \quad v_{00}^{(2i)}(y) = 0 \quad (1.11)$$

Анализ (1.11) при $y \rightarrow \infty$ показывает, что $u_{00}^{(2i)}$ стремятся к конечным значениям $u_{00}^{(2i)}(\infty)$. Требование исчезновения возмущений вдали от пластины приводит к тому, что последнее слагаемое в (1.10) должно быть решением однородных уравнений для коэффициентов Фурье при нулевой гармонике по времени и нулевой по координате z , получающихся подстановкой (1.2) в левую часть (1.1) и обнулением правой части (1.1). В качестве граничных условий должны выполняться

$$u_{00}^{(2)} = v_{00}^{(2)} = 0 \quad (y=0), \quad v_{00}^{(2)} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \quad (1.12)$$

$$u_{00}^{(2)} \rightarrow u_{00\infty}^{(2)} \equiv - \sum_{i=0}^1 A_i \bar{A}_i u_{00}^{(2i)}(\infty) \quad (y \rightarrow \infty)$$

При определении $v_{00}^{(2)}(x, y)$, как и при решении задачи Блазиуса для основного течения, предполагается, что зависимость от x может рассматриваться как слабая. Решение для $v_{00}^{(2)}$ строится в форме асимптотических разложений по малому параметру Re^{-1} . После введения функции тока соотношением $u_{00}^{(2)} = \partial f / \partial y$, $v_{00}^{(2)} = -\partial f / \partial x$ и замены переменной $x_1 = Re^{-1}x$, осуществляющей сжатие по продольной координате, в первом приближении по Re^{-1} для f получается уравнение

$$U \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial y^2} - \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0 \quad (1.13)$$

Решение для (1.13) может быть получено в виде

$$f = \sqrt{1 + Re^{-1}(x-x_0)} \varphi(\xi), \quad x_0 = \frac{X_0}{L}, \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{1 + Re^{-1}(x-x_0)}} \\ \varphi''' + \frac{1}{2} \left(\xi U \varphi'' - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \varphi' + \frac{\partial U}{\partial \xi} \varphi \right) = 0 \quad (1.14)$$

В (1.14) осуществлена замена переменной y на переменную ξ . Граничными условиями для (1.14), следующими из (1.12), являются

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0; \quad \varphi' \rightarrow u_{00\infty}^{(2)} \quad (y \rightarrow \infty) \quad (1.15)$$

Как и при решении задач Блазиуса [9], в первом приближении по Re^{-1} не удается удовлетворить условию исчезновения $v_{00}^{(2)}$ при удалении от пластины. Однако $v_{00}^{(2)} = O(Re^{-1})$, что позволяет с точностью до $O(1)$ положить ее равной нулю. Продольная составляющая скорости определяется соотношением $u_{00}^{(2)} = \varphi'$. В силу справедливости выражения $\xi = y + O(Re^{-1})$ в окрестности плоскости $X = X_0$ $u_{00}^{(2)}$ с точностью до Re^{-1} можно рассматривать как функцию только координаты y . Малый параметр Re^{-1} пропорционален параметру непараллельности основного течения, что позволяет рассматривать полученное решение для v_{00} в пределах локально-параллельного приближения для V.

Для коэффициентов Фурье в (1.2), определяющих нестационарные и трехмерные стационарные вторичные течения, благодаря (1.9) решение можно искать в форме

$$v_{kl} = \begin{cases} \varepsilon^2 \text{Real}[A_i \bar{A}_j v_{k0}^{(21)}(y)]; & l=0, k=1, 2 \\ \varepsilon^2 [A_i A_j v_{k2}^{(21)}(y) + \delta_k \circ A_1^2 v_{02}^{(22)}(y)]; & l=2, k=0, 1, 2 \\ i, j=0, 1; i \leq j; i+j=k \end{cases} \quad (1.16)$$

Краевые задачи для рассматриваемых коэффициентов Фурье преобразуются к виду

$$L(\lambda_{klj}, k\beta, l\omega) v_{kl}^{(2j)}(y) = \Phi_{klj}(y), \quad M(\lambda_{klj}, k\beta, l\omega) \eta_{kl}^{(2j)}(y) + \\ + k\beta v_{kl}^{(2j)}(y) U' = \Psi_{klj}(y) \\ u_{kl}^{(2j)} = \frac{k\beta \eta_{kl}^{(2j)} + \lambda_{klj} v_{kl}^{(2j)}}{k^2 \beta^2 - \lambda_{klj}^2}, \quad w_{kl}^{(2j)} = - \frac{\lambda_{klj} \eta_{kl}^{(2j)} + k\beta w_{kl}^{(2j)}}{k^2 \beta^2 - \lambda_{klj}^2} \quad (1.17) \\ u_{kl}^{(2j)}, v_{kl}^{(2j)}, w_{kl}^{(2j)}, \eta_{kl}^{(2j)} = 0, \quad y=0, y=\infty \\ \lambda_{k0j} = 0, \quad \lambda_{k21} = i(\alpha_i + \alpha_j), \quad i \leq j, \quad i+j=k$$

Здесь функции $\Phi_{klj}(y)$ и $\Psi_{klj}(y)$ выражаются через компоненты $F_{kl}^{(2j)}(y)$. В предположении, что λ_{klj} не является собственным значением оператора $L(\lambda_{klj}, k\beta, l\omega)$, задача (1.17) имеет единственное решение.

Определение значений δ_k в (1.4) связано с рассмотрением уравнений третьего приближения по ε для вносимых возмущений. С точностью до ε^3 коэффициенты Фурье нелинейных членов при первой гармонике по времени, нулевой и первой по z могут быть записаны как

$$[(v\nabla)v]_{kl} = \varepsilon^3 A_k F_{kl}^{(3)}(A_0, A_1, v^{(1)}(y), v^{(2)}(y)) \quad (1.18)$$

В (1.18) для всех компонент $v_{kl}^{(n)}$ задач первого и второго приближения использованы обозначения $v^{(1)}(y)$ и $v^{(2)}(y)$. Зависимость от x функций $F_{kl}^{(3)}$ обусловлена наличием комплексных амплитуд A_i . Однако легко убедиться, что в выражении $F_{kl}^{(3)}$ они встречаются в виде комбинаций $A_p A_q \bar{A}_s A_k^{-1}$, зависимостью которых от координаты x с точностью до ε_{ij} можно пренебречь. Это позволяет решение задачи третьего приближения искать в виде функции только переменного y , а соответствующие краевые задачи свести к неоднородным уравнениям Орра — Зоммерфельда относительно $v_{kl}^{(3)}(y)$

$$L(i\alpha_k, k\beta, \omega) v_{kl}^{(3)}(y) = \Phi_{kl}^{(3)}(y) - \delta_k L_1(i\alpha_k, k\beta, \omega) v_{kl}^{(1)}(y) \quad (1.19)$$

и уравнениям для определения $u_{kl}^{(3)}$ и $w_{kl}^{(3)}$. Здесь оператор L определяется в соответствии с (1.7), L_1 — дифференциальный оператор второго порядка, а $\Phi_{kl}^{(3)}(y)$ выражается через компоненты $F_{kl}^{(3)}(y)$. Граничные условия (1.20)

$$v_{kl}^{(3)}(0) = v_{kl}^{(3)}(\infty) = 0; \quad v_{kl}^{(3)} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty); \quad k=0, 1 \quad (1.20)$$

совпадают с граничными условиями задачи первого приближения (1.6), существование ненулевого решения которой налагает условия разрешимости (1.19), (1.20)

$$\int_0^\infty [\Phi_{kl}^{(3)}(y) - \delta_k L_1(i\alpha_k, k\beta, \omega) v_{kl}^{(1)}(y)] \varphi_{kl}(y) dy = 0 \quad (1.21)$$

где φ_{kl} — решение сопряженной к (1.6) задачи. Соотношения (1.21) позволяют определить значения δ_k . Ввиду того что в выражения $\Phi_{kl}^{(3)}$ входят комплексные амплитуды, δ_k также зависит от A_j . Как отмечалось, эти амплитуды в выражении $F_{kl}^{(3)}$, а следовательно, и $\Phi_{kl}^{(3)}$ входят в виде комбинаций $A_p A_q \bar{A}_s A_k^{-1}$, где индекс k последнего множителя совпадает с индексом коэффициента Фурье рассматриваемой группы нелинейных членов. Более того, легко можно показать, что сумма индексов $p+q+s+k$ должна быть четной. Каждый из индексов может принимать значение 0

или 1. Рассмотрение всех возможных комбинаций индексов, удовлетворяющих четности их суммы, а также переход к показательной форме представления комплексных амплитуд $A_j = |A_j| \exp(i\varphi_j)$ позволяют представить зависимости δ_k от комплексных амплитуд соотношениями

$$\delta_k = \delta_k^{(0)} |A_0|^2 + \delta_k^{(1)} |A_1|^2 + \delta_k^{(2)} |A_{1-k}|^2 \exp[2i(\varphi_{1-k} - \varphi_k)], \quad k=0, 1 \quad (1.22)$$

Величины $\delta_k^{(n)}$ уже не зависят от амплитуд и определяются только расстоянием X_0 от передней кромки. Последнее можно представить в виде зависимости $\delta_k^{(n)} = \delta_k^{(n)}(\text{Re})$. Соотношения (1.22) позволяют определить значения $\delta_k^{(n)}$, рассчитывая δ_k при разных значениях амплитуд, и использовать их в амплитудных уравнениях (1.4). Однако, так как значения α_k и $\delta_k^{(n)}$ при заданных параметрах набегающего потока и вносимых возмущений определяются расстоянием X_0 , уравнения (1.4) могут рассматриваться только в окрестности $X = X_0$. Для получения уравнений пространственной эволюции амплитуд, пригодных для больших расстояний, в уравнениях (1.4) необходимо от переменной x , связанной с выбором масштаба длины, зависящего от X_0 , перейти к другой переменной, явно зависящей от этого масштаба. В качестве такой переменной предлагается использовать число Рейнольдса, построенное по характерной длине $L = \sqrt{Xv/U_0}$.

Уравнение (1.4) с точностью до членов порядка ϵ^3 можно переписать в виде

$$\frac{1}{2\epsilon A_k} \frac{d\epsilon A_k}{d\text{Re}} = i\alpha_k(\text{Re}) + \epsilon^2 \{ \delta_k^{(0)}(\text{Re}) |A_0|^2 + \delta_k^{(1)}(\text{Re}) |A_1|^2 + \delta_k^{(2)}(\text{Re}) |A_{1-k}|^2 \exp[2i(\varphi_{1-k} - \varphi_k)] \} \quad (1.23)$$

$$A_k = |A_k| \exp(i\varphi_k), \quad k=0, 1$$

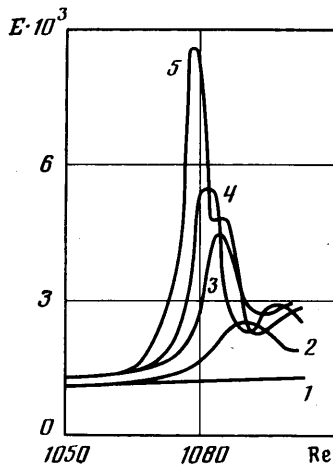
$$dx = L^{-1} dX; \quad d\text{Re} = d(U_0 L v^{-1}) = 0,5 L^{-1} dX$$

Учитывается также (1.22).

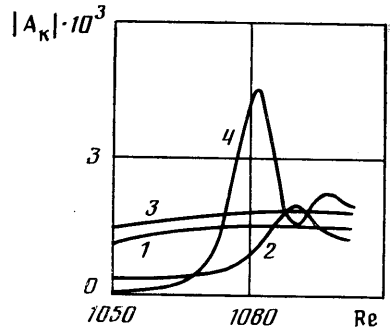
Показатель степени параметра ϵ указывает порядок малости члена, содержащего соответствующую степень ϵ множителем. Поэтому при численном решении (1.23) без ограничения общности можно положить значение ϵ равным единице.

2. Результаты расчетов. При интегрировании системы уравнений (1.23) использовалась линейная интерполяция функций $\alpha_k(\text{Re})$ и $\delta_k^{(n)}(\text{Re})$ по значениям, рассчитанным для ряда чисел Рейнольдса. В качестве параметров, задающих набегающий поток и вносимые возмущения, использовались $U_0/v = 1,02 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$, $\Omega = 145 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_z = 2,54 \text{ см}$, что соответствует условию проведения экспериментов [2]. Исследовалось влияние начальной интенсивности двумерных и трехмерных возмущений на характер эволюции их амплитуд, а также определялось местоположение области быстрого роста энергии вносимых возмущений. В качестве параметра, характеризующего суммарную интенсивность вносимых возмущений, использовался параметр $E = \sqrt{|A_0|^2 |u_{0,1}^{(1)}|^2 + |A_1|^2 |u_{1,1}^{(1)}|^2}$, рассчитанный при значениях y , соответствующих размерному расстоянию $Y = 0,23 \text{ мм}$ от поверхности пластины, что также соответствует измерениям [2]. При использованных в расчетах нормировочных соотношениях значения $|u_{k1}^{(1)}|$ в окрестности указанных значений y были близки к единице.

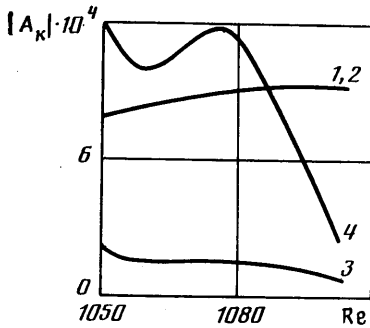
Результаты расчетов $E(\text{Re})$ представлены на фиг. 1 кривыми 1–5 для начальных значений амплитуд ($|A_0|$; $|A_1|$) соответственно: $(1,220 \cdot 10^{-3}; 2,673 \cdot 10^{-6})$; $(1,127 \cdot 10^{-3}; 2,576 \cdot 10^{-4})$; $(1,525 \cdot 10^{-3}; 2,585 \cdot 10^{-5})$; $(1,525 \cdot 10^{-3}; 1,035 \cdot 10^{-4})$. Амплитуды при $\text{Re} = 1050$ называются начальными амплитудами. Резкое увеличение интенсивности возмущающего движения наблюдается в окрестности $\text{Re} = 1070 - 1090$. Это



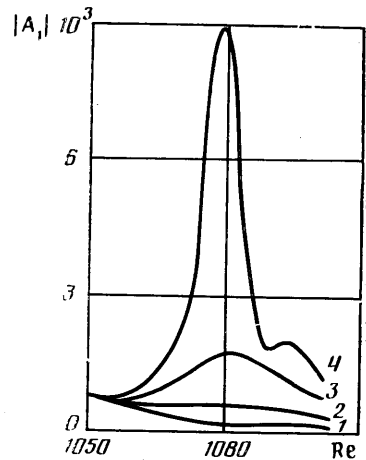
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

удовлетворительно согласуется с данными [2], где экспериментально наблюдаемый этап нелинейного развития возмущений соответствовал значениям $Re=1040-1100$. Непосредственного сравнения с экспериментальными данными по интенсивности возмущений, соответствующих началу влияния нелинейности на пространственную эволюцию возмущений осуществить не удастся ввиду того, что приведенные в [2] результаты соответствовали только двум режимам колебания вибратора.

Однако можно отметить, что в первом режиме, когда развитие возмущений было близко к предсказываемому линейной теорией, начальная интенсивность возмущений была немного ниже, чем определенная при расчетах величина критической суммарной интенсивности. При втором режиме работы вибратора, при котором заметно проявились нелинейные эффекты взаимодействия возмущений, их начальная интенсивность превосходила указанную критическую величину, что может служить подтверждением соответствия результатов расчета и эксперимента.

Фигура 2 демонстрирует изменение амплитуд двумерных, обозначенных индексами 1 и 3, а также трехмерных, обозначенных индексами 2 и 4, возмущений. Представленные данные соответствуют кривым 2 и 4 на фиг. 1 и свидетельствуют о том, что рост энергии возмущающего движения связан с быстрым увеличением амплитуд трехмерных волн.

Для выяснения роли двумерных и трехмерных возмущений в нелиней-

ных взаимодействиях осуществлялось интегрирование системы уравнений (1.23), когда изменялись начальные значения амплитуд одной из волн при постоянной начальной амплитуде другой волны. Результаты расчетов показали, что в рассмотренном диапазоне характер развития амплитуд двумерных волн слабо реагировал на увеличение интенсивности как двумерных, так и трехмерных возмущений.

Представленные на фиг. 3 зависимости амплитуд двумерных (кривые 1, 2) и трехмерных возмущений $|A_1|$ (кривые 3, 4) от числа Рейнольдса при одной начальной амплитуде двумерных возмущений и двух начальных амплитудах трехмерных возмущений $A_1=2 \cdot 10^{-4}$ и $1,2 \cdot 10^{-3}$ соответственно свидетельствуют о том, что увеличение начальной интенсивности трехмерных волн не вызывает качественного изменения в характере эволюции амплитуд. Практическое совпадение кривых 1 и 2 для амплитуд двумерных волн продемонстрировало слабую восприимчивость двумерных возмущений к интенсивности трехмерных.

Напротив, приведенные на фиг. 4 (кривые 1–4) изменения амплитуд трехмерных волн с одинаковыми начальными значениями на фоне двумерных волн с начальными амплитудами $|A_0|$ соответственно $1 \cdot 10^{-4}$, $8 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-3}$, $1,2 \cdot 10^{-3}$ показывают сильное дестабилизирующее влияние двумерных возмущений на развитие трехмерных.

Представленные результаты расчетов свидетельствуют, что в рамках рассмотренной модели двумерные возмущения, на развитие которых слабо влияет нелинейность взаимодействия, развиваются по законам линейной теории. Если же их амплитуды достигают некоторых критических значений, то вызывается интенсивное усиление трехмерных возмущений, что и характеризует начало этапа нелинейного развития. Результаты численного моделирования позволяют оценить значения критических амплитуд, например, представленные результаты дают в окрестности $Re=1050$ значение критической амплитуды двумерных возмущений около $1,2 \cdot 10^{-3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kachanov Yu. S., Levchenko V. Ya.* The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer.— *J. Fluid Mech.*, 1984, v. 138, p. 209–247.
2. *Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M.* The three-dimensional nature of boundary-layer instability.— *J. Fluid Mech.*, 1962, v. 12, № 1, p. 1–34.
3. *Craik A. D. D.* Non-linear resonant instability in boundary layers.— *J. Fluid Mech.*, 1970, v. 50, № 2, p. 393–413.
4. *Зельман М. Б., Масленникова И. И.* Об эффектах резонансных взаимодействий волновых возмущений в пограничном слое.— *Изв. АН СССР. МЖТ*, 1984, № 4, с. 23–30.
5. *Nayfeh A. H., Bozatti A. N.* Non-linear wave interactions in boundary layers. AIAA 12-th Fluid and Plasma Dyn. Conf. Williamsburg, Virginia, 1979, Pap. № 79, p. 1496.
6. *Вьонг К. К., Зайцев А. А.* К вопросу о развитии трехмерных возмущений в пограничном слое.— *Изв. АН СССР. МЖТ*, 1974, № 1, с. 29–37.
7. *Herbert T.* Non-linear stability of parallel flows by highorder amplitude expansions.— *AIAA Journal*, 1980, v. 18, № 3, p. 243–248.
8. *Зельман М. Б.* О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках.— *Изв. СО АН СССР, Сер. техн. наук*, 1974, № 13, вып. 3, с. 16–21.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

Москва
Киев

Поступила в редакцию
10.IV.1985