

УДК 532.517.4:537.3

ВЫРОЖДЕНИЕ ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ПУЛЬСАЦИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ВАТАЖИН А. Б., ЛЕВИТАН Ю. С.

Указаны условия, при которых возможно существование изотропного поля электрических пульсаций в электрически заряженной среде при учете в законе Ома конвекции и диффузии заряженных частиц и их дрейфа в электрическом поле. Для изотропных случайных полей найдены распределения средних параметров и получены уравнения для корреляционных моментов, содержащих электрические пульсации. Проанализированы уравнения относительно двухточечных корреляций между пульсациями плотностей электрического заряда (осуществлен предельный переход к одноточечным корреляциям, получены инвариантные соотношения, построены частные решения). Найдены законы вырождения изотропных полей электрических параметров в результате диффузионных и дрейфовых процессов. Изучено вырождение полей, обусловленное только дрейфовым движением частиц, при произвольных начальных условиях. Такое вырождение полей при отсутствии диффузионного механизма является принципиальной особенностью турбулентных электрогидродинамических движений.

1. Уравнения для турбулентных электрогидродинамических течений.

Изотропные случайные поля электрических параметров являются наиболее простым вариантом случайных полей в электрогидродинамике, описываемых следующими уравнениями для мгновенных величин:

$$\frac{\partial q^+}{\partial t} + \operatorname{div}[q^+(\mathbf{v}+b^+\mathbf{E})-D^+\nabla q^+]=0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial q^-}{\partial t} + \operatorname{div}[q^-(\mathbf{v}-b^-\mathbf{E})-D^-\nabla q^-]=0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}=4\pi(q^++q^-), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}=0 \quad (b^+, b^-, D^+, D^-=\text{const}) \quad (1.3)$$

Здесь использована модель среды, состоящей из несущей жидкости (или газа), скорость которой равна \mathbf{v} , и двух положительно и отрицательно заряженных компонент (индексы плюс и минус соответственно). Инерция заряженных частиц и химические реакции считаются несущественными. Величины q^+ и q^- , b^+ и b^- , D^+ и D^- представляют собой плотности объемного электрического заряда, модули подвижностей и коэффициенты диффузии компонент. Соотношения (1.1) и (1.2) являются уравнениями неразрывности для компонент. Величины, стоящие в квадратных скобках в (1.1) и (1.2), соответственно равны плотностям электрического тока \mathbf{j}^+ и \mathbf{j}^- . (Таким образом, в законах Ома для компонент учтены конвективные, дрейфовые и диффузионные эффекты.) Уравнения электродинамики (1.3) служат для определения электрического поля \mathbf{E} . Параметр электрогидродинамического взаимодействия считается малой величиной, вследствие чего распределение скорости \mathbf{v} предполагается известным.

Уравнениями (1.1)–(1.3) описываются движение заряженных компонент в областях взаимодействия положительного и отрицательного коронного разрядов, процессы в слабопроводящих жидкостях вдали от зон химических реакций, движение среды с микрочастицами, инерция которых несущественна, а сопротивление определяется законом Стокса. Область

применимости соотношений (1.1)–(1.3) обсуждалась в многочисленных работах (см., например, [1, 2]).

Систему уравнений (1.1)–(1.3) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}[q\mathbf{v} + (qb^\circ + \sigma b)\mathbf{E} - D\nabla q - D^\circ\nabla\sigma] = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}[\sigma\mathbf{v} + (qb + \sigma b^\circ)\mathbf{E} - D^\circ\nabla q - D\nabla\sigma] = 0 \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi q, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad (1.6)$$

$$q = q^+ + q^-, \quad \sigma = q^+ - q^-, \quad b = \frac{1}{2}(b^+ + b^-) \quad (1.7)$$

$$b^\circ = \frac{1}{2}(b^+ - b^-), \quad D = \frac{1}{2}(D^+ + D^-), \quad D^\circ = \frac{1}{2}(D^+ - D^-)$$

В дальнейшем будем считать, что несущая жидкость несжимаема ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$) и внешнее электрическое поле равно нулю. Из последнего условия вытекает, что $\mathbf{E} = 0$, если $q = q^+ + q^- = 0$.

Рассмотрим прежде всего вопрос о возможности развития нестационарных полей q^+ и q^- , при которых среда электрически нейтральна. На основе системы уравнений (1.1)–(1.3) (или (1.4)–(1.6)) можно сделать следующие выводы.

1. Пусть при $t=0$ распределения q^+ и q^- однородны ($q^+ = q_0^+ = \text{const}$, $q^- = q_0^- = \text{const}$), а среда электрически нейтральна ($q_0 = q_0^+ + q_0^- = 0$). Тогда однородность распределений q^+ и q^- и электрическая нейтральность среды будут сохраняться и при $t > 0$. Действительно, уравнениям (1.1)–(1.3) при указанных начальных условиях удовлетворяют распределения $q^+ = q_0^+$, $q^- = q_0^-$, $\mathbf{E} = 0$.

Другие решения уравнений (1.1)–(1.3) отсутствуют в силу единственности решения задачи Коши для уравнений (1.1)–(1.2).

2. Пусть при $t=0$ распределения q^+ и q^- неоднородны, но среда электрически нейтральна ($q_0 = 0$). Тогда, если $D^+ = D^-$, электрическая нейтральность среды сохраняется и при $t > 0$. Это следует из наличия решения: $q^+ = q^+(\mathbf{R}, t)$, $q^- = -q^+(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{E} = 0$, где \mathbf{R} – радиус-вектор точки пространства. Если же $D^+ \neq D^-$, то электрическая нейтральность среды нарушается. (Заметим, что выводы этого пункта сохраняются и при $\operatorname{div}\mathbf{v} \neq 0$.)

За исключением указанных случаев, развитие нестационарных полей q^+ и q^- происходит в режиме, когда электрическая нейтральность среды отсутствует и $\mathbf{E} \neq 0$.

Представим произвольную величину η , входящую в (1.1)–(1.3), в виде суммы средней величины $\langle \eta \rangle$ и пульсационной составляющей η' . Будем считать, что средняя скорость среды $\langle \mathbf{v} \rangle$ равна нулю. Примем, что средние величины $\langle q^+ \rangle$ и $\langle q^- \rangle$ однородны и $\langle q \rangle = \langle q^+ \rangle + \langle q^- \rangle = 0$. Таким образом, в среднем среда является электрически нейтральной и $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$. Возможность существования указанных распределений для средних величин следует из разд. 1.

Согласно случаю 2, развитие пульсационных полей может происходить в режимах $\mathbf{E}' = 0$ и $\mathbf{E}' \neq 0$. Случай, когда $\mathbf{E}' = 0$, соответствует задаче об изотропном скалярном поле в обычной гидродинамике. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться ситуации, когда $\mathbf{E}' \neq 0$. Для этого в соответствии со случаем 2 достаточно, чтобы $q' \neq 0$ при $t = 0$.

Подставляя в (1.4)–(1.6) выражения $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, $q = q'$, $\sigma = \langle \sigma \rangle + \sigma'$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ ($\langle \sigma \rangle = 2\langle q^+ \rangle$), обычным путем находим уравнения для пульсационных характеристик

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \operatorname{div}[q'\mathbf{v}' + \mathbf{E}'(b^\circ q' + b(\langle \sigma \rangle + \sigma')) - D\nabla q' - D^\circ\nabla\sigma'] = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \operatorname{div}[\langle \sigma \rangle \mathbf{v}' + \sigma' \mathbf{v}' + \mathbf{E}'(bq' + b^\circ(\langle \sigma \rangle + \sigma')) - D^\circ \nabla q' - D \nabla \sigma'] = 0 \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}' = 4\pi q', \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}' = 0 \quad (1.10)$$

2. Изотропные поля. Будем рассматривать бесконечное пространство, в котором заданное пульсационное поле скорости среды \mathbf{v}' и начальные (при $t=0$) пульсационные поля q_0^+ и q_0^- являются изотропными. Тогда при сделанных выше предположениях изотропия полей q^+ и q^- (или q' и σ') сохранится и в последующие моменты времени.

Получим уравнения для корреляций

$$\langle q_A' q_B' \rangle = \omega, \quad \langle \sigma_A' \sigma_B' \rangle = \chi, \quad \langle q_A' \sigma_B' \rangle = \langle q_B' \sigma_A' \rangle = \mu \quad (2.1)$$

Умножая уравнения (1.8), записанные для произвольных точек A и B , на величины q_B' и q_A' соответственно, складывая полученные соотношения и производя осреднение, найдем выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A (\alpha_i^{(1)} + b\alpha_i^{(2)} + b^\circ\alpha_i^{(3)}) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B (\beta_i^{(1)} + b\beta_i^{(2)} + b^\circ\beta_i^{(3)}) + \\ + m\omega - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_B \right] (D\omega + D^\circ\mu) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$m = 8\pi b \langle \sigma \rangle$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(1)} &= \langle v_{iA}' q_A' q_B' \rangle, & \beta_i^{(1)} &= \langle v_{iB}' q_B' q_A' \rangle \\ \alpha_i^{(2)} &= \langle E_{iA}' \sigma_A' q_B' \rangle, & \beta_i^{(2)} &= \langle E_{iB}' \sigma_B' q_A' \rangle \\ \alpha_i^{(3)} &= \langle E_{iA}' q_A' q_B' \rangle, & \beta_i^{(3)} &= \langle E_{iB}' q_B' q_A' \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

Умножая уравнения (1.9), записанные для произвольных точек A и B , на величины σ_B' и σ_A' соответственно, складывая полученные соотношения и производя осреднение, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A (\alpha_i^{(4)} + b\alpha_i^{(5)} + b^\circ\alpha_i^{(6)}) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B (\beta_i^{(4)} + b\beta_i^{(5)} + b^\circ\beta_i^{(6)}) + \\ + m^\circ\chi - \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_B \right] (D\chi + D^\circ\mu) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$m^\circ = 8\pi b^\circ \langle \sigma \rangle$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(4)} &= \langle v_{iA}' \sigma_A' \sigma_B' \rangle, & \beta_i^{(4)} &= \langle v_{iB}' \sigma_B' \sigma_A' \rangle \\ \alpha_i^{(5)} &= \langle E_{iA}' q_A' \sigma_B' \rangle, & \beta_i^{(5)} &= \langle E_{iB}' q_B' \sigma_A' \rangle \\ \alpha_i^{(6)} &= \langle E_{iA}' \sigma_A' \sigma_B' \rangle, & \beta_i^{(6)} &= \langle E_{iB}' \sigma_B' \sigma_A' \rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

И наконец, умножая уравнение (1.8), записанное в точке B , на величину σ_A' , а уравнение (1.9), записанное в точке A , на величину q_B' , складывая полученные выражения и осредняя результирующее соотношение, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A (\alpha_i^{(7)} + b\alpha_i^{(3)} + b^\circ\alpha_i^{(2)}) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B (\beta_i^{(7)} + b\beta_i^{(6)} + b^\circ\beta_i^{(5)}) + \\ + \frac{1}{2} (m\mu + m^\circ\omega) - D \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_A + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_B \right] \mu - \\ - D^\circ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_A \omega - D^\circ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right)_B \chi = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\alpha_i^{(7)} = \langle v_{iA}' \sigma_A' q_B' \rangle, \quad \beta_i^{(7)} = \langle v_{iB}' q_B' \sigma_A' \rangle \quad (2.7)$$

В соотношениях (2.2)–(2.7) нижний индекс $i=1, 2, 3$ соответствует проекциям векторов на оси декартовой системы координат, а по индексам, встречающимся дважды, производится суммирование.

Введем переменные

$$\xi_i = (x_i)_B - (x_i)_A, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad r^2 = \xi_i \xi_i \quad (2.8).$$

Используя общее выражение для изотропного тензора первого ранга [4, 5], получим

$$\alpha_i^{(\gamma)} = \frac{K^{(\gamma)}(r, t)}{r} \xi_i \quad (\gamma=1, 2, \dots, 7) \quad (2.9)$$

Здесь r – расстояние между точками A и B , $K^{(\gamma)}$ – тройная корреляция, получающаяся заменой в $\alpha_i^{(\gamma)}$ величин v_{iA}' и E_{iA}' на величины v_{rA}' и E_{rA}' , представляющие собой проекции векторов v_A' и E_A' на направление r_{AB} . (Например, $K^{(1)} = \langle v_{rA}' q_A' q_B' \rangle$.)

С помощью (2.9) находим

$$\beta_i^{(\gamma)} = -\alpha_i^{(\gamma)} \quad (\gamma=1, 2, \dots, 6) \quad (2.10)$$

$$\beta_i^{(7)} = -\langle v_{iA}' q_A' \sigma_B' \rangle = -\frac{K^{(8)}(r, t)}{r} \xi_i$$

$$\frac{\partial \alpha_i^{(\gamma)}}{\partial \xi_i} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 K^{(\gamma)}) \quad (2.11)$$

Учитывая выражения (2.8)–(2.11), преобразуем уравнения (2.2), (2.4), (2.6) относительно $\omega(r, t)$, $\chi(r, t)$, $\mu(r, t)$ к следующему виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V_\omega + m\omega - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} (D\omega + D^\circ \mu) \right] = 0 \quad (2.12)$$

$$V_\omega = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (K^{(1)} + bK^{(2)} + b^\circ K^{(3)})]$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + V_\chi + m^\circ \mu - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} (D\chi + D^\circ \mu) \right] = 0 \quad (2.13)$$

$$V_\chi = -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (K^{(4)} + bK^{(5)} + b^\circ K^{(6)})]$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + V_\mu + \frac{1}{2} (m\mu + m^\circ \omega) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} (2D\mu + D^\circ \omega + D^\circ \chi) \right] = 0 \quad (2.14)$$

$$V_\mu = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (K^{(7)} + K^{(8)} + bK^{(3)} + bK^{(6)} + b^\circ K^{(5)} + b^\circ K^{(2)})]$$

При $b=b^\circ=0$ уравнения (2.12)–(2.14) переходят в классические уравнения для изотропных скалярных полей, описывающие динамику корреляций ω , χ и μ для пассивных примесей. Члены, пропорциональные b и b° , обусловлены дрейфом заряженных частиц в собственном электрическом поле. Указанные уравнения незамкнутые: они содержат корреляции третьего порядка $K^{(\gamma)}$, для аппроксимации которых необходимы специальные модели. На заключительной стадии вырождения корреляциями $K^{(\gamma)}$ можно пренебречь и выражения (2.12)–(2.14) образуют систему параболических уравнений относительно ω , χ и μ .

Величины m и m° представляют собой характерные обратные времена вырождения скалярных полей вследствие дрейфа частиц в собственном электрическом поле. Приведем характерные значения этих величин при $b^+ \sim b^-$ для двух ситуаций, соответствующих среде с ионными зарядами (взаимодействие положительного и отрицательного коронарных разря-

дов) и среде с микрочастицами. Для первой ситуации величины m и m° равны 10^3-10^4 с⁻¹. Для второго случая при размере частиц 0,2 мкм, их концентрации 10^5 см⁻³, заряде, составляющем около $\pm 10^3$ элементарных зарядов, и стоксовом законе сопротивления частиц эти величины имеют порядок 1–10 с⁻¹.

3. Корреляции, содержащие пульсации электрического поля. Получим выражение для изотропных тензоров первого и второго рангов $\langle E_{iA}'q_{B}' \rangle$ и $\langle E_{iA}'E_{jB}' \rangle$ с помощью уравнений (1.6). Записывая первое уравнение (1.6) в точках A и B , умножая полученные выражения соответственно на q_{B}' и q_{A}' , складывая их и осредняя результирующее соотношение, найдем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \langle E_{iA}'q_{B}' \rangle + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_B \langle E_{iB}'q_{A}' \rangle = 8\pi\omega \quad (3.1)$$

В изотропном случае имеем

$$\langle E_{iA}'q_{B}' \rangle = -\langle E_{iB}'q_{A}' \rangle = -\frac{S(r, t)}{r} \xi_i \quad (3.2)$$

где S – нечетная функция r .

Преобразуя (3.1) с использованием (2.8), (3.2) и формул, аналогичных (2.9), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 S = -4\pi\omega r^2 \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3) с учетом ограниченности S при $r=0$, находим

$$S(r, t) = -\frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \omega r^2 dr \quad (3.4)$$

В случае достаточно быстрого убывания ω при $r \rightarrow \infty$ интеграл в (3.4) является сходящимся. Таким образом, величина S также стремится к нулю при больших r .

Изотропный тензор второго ранга представляется в следующем виде [4, 5]:

$$\mu_{ij} = \langle E_{iA}'E_{jB}' \rangle = C_1(r^2, t) \xi_i \xi_j + C_2(r^2, t) \delta_{ij} \quad (3.5)$$

где δ_{ij} – тензор Кронекера.

Используя первое уравнение (1.6), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \langle E_{iA}'E_{jB}' \rangle = 4\pi \langle q_{A}'E_{jB}' \rangle = -\frac{4\pi}{r} S(r, t) \xi_j = -\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \xi_i} \quad (3.6)$$

Вторым соотношением для определения C_1 и C_2 является выражение

$$\text{rot}_A \langle E_{iA}'E_{jB}' \rangle = 0 \quad (3.7)$$

которое следует из второго уравнения (1.6). Произведя необходимые преобразования в (3.6) и (3.7), найдем уравнения

$$2r^2 \frac{\partial C_1}{\partial r^2} + 4C_1 + 2 \frac{\partial C_2}{\partial r^2} = \frac{4\pi}{r} S(r, t), \quad C_1 - 2 \frac{\partial C_2}{\partial r^2} = 0 \quad (3.8)$$

Решая эти уравнения при условиях ограниченности C_1 и C_2 при $r=0$ и их обращения в нуль при $r=\infty$, получаем

$$C_1 = -\frac{16\pi^2}{r^5} \int_0^r r \left(\int_0^r \omega r^2 dr \right) dr, \quad C_2 = [Q(\infty, t) - Q(r, t)]$$

$$Q(r, t) = 16\pi^2 \int_0^r \left[\int_0^r r \left(\int_0^r \omega r^2 dr \right) dr \right] \frac{dr}{r^4} \quad (3.9)$$

$$Q(\infty, t) = E^{\text{os}} = \langle \frac{1}{3} E'^2 \rangle = \frac{16}{3} \pi^2 \chi_1(\infty, t)$$

$$\chi_1(\infty, t) = \int_0^\infty \omega r dr$$

Тензор μ_{ij} можно также представить в следующем виде:

$$\mu_{ij} = E^{02} \left[(F(r, t) - G(r, t)) \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} + G(r, t) \delta_{ij} \right] \quad (3.10)$$

$$F(r, t) = 1 + \frac{\kappa_4(r, t)}{r^3 \kappa_1(\infty, t)} - \frac{\kappa_1(r, t)}{\kappa_1(\infty, t)} \quad (3.11)$$

$$G(r, t) = 1 - \frac{\kappa_4(r, t)}{2r^3 \kappa_1(\infty, t)} + \frac{3\kappa_2(r, t)}{2r \kappa_1(\infty, t)} - \frac{\kappa_1(r, t)}{\kappa_1(\infty, t)} \quad (3.12)$$

$$\kappa_k(r, t) = \int_0^r r^k \omega(r, t) dr, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Вследствие быстрого стремления к нулю функции ω при $r \rightarrow \infty$ величины $\kappa_k(\infty, t)$ ограничены.

В формулах (3.10) величины F и G являются четными функциями r и представляют собой коэффициенты продольной и поперечной корреляции для тензора μ_{ij} . Выражения (3.11), (3.12) получены из (3.9) интегрированием по частям. Согласно (3.9)–(3.12), величины μ_{ij} явным образом выражаются через корреляцию ω .

Вычислим макромасштабы λ_F и λ_G для функций F и G , связанные с коэффициентами при квадратичных членах в разложениях указанных функций по степеням r следующим образом:

$$F = 1 - \left(\frac{r}{\lambda_F} \right)^2 + O(r^4), \quad G = 1 - \left(\frac{r}{\lambda_G} \right)^2 + O(r^4) \quad (3.13)$$

Пусть разложение функции ω по r начинается с члена $\omega_0(t)$. (Функция ω является четной функцией от r .) Тогда из (3.11)–(3.12) находим

$$\lambda_F^2 = \frac{10\kappa_1(\infty, t)}{3\omega_0(t)}, \quad \lambda_G^2 = 3\lambda_F^2 \quad (3.14)$$

Макромасштабы L_F и L_G , определяемые как интегралы от F и G по r в пределах от нуля до бесконечности, на основании (3.10), (3.11) представляются в виде

$$L_F = \frac{3\kappa_2(\infty, t)}{\kappa_1(\infty, t)} \quad (3.15)$$

$$L_G = \frac{3\kappa_2(\infty, t)}{2\kappa_1(\infty, t)} \lim_{r \rightarrow \infty} \ln r + \frac{3\kappa_2(\infty, t)}{4\kappa_1(\infty, t)} - \int_0^{\infty} r^2 \omega \ln r dr \quad (3.16)$$

Из (3.15) и (3.16) следует, что масштабы L_F и L_G соответственно являются ограниченной и неограниченной величинами. Первый член в правой части (3.16) определяет порядок возрастания L_G при увеличении верхнего предела r интегрирования функции G .

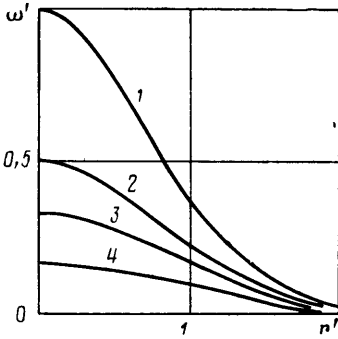
4. Общие свойства уравнения (2.12). В случае незаряженной пассивной примеси ($b=b^0=0$) уравнение (2.12) имеет инвариант, представляющий собой условие независимости от времени интеграла от величины $r^2 \omega$ в пределах от $r=0$ до $r=\infty$. Получим обобщенные инвариантные соотношения при $b \neq 0$, $b^0 \neq 0$. Для этого умножим (2.12)–(2.14) на r^2 и проинтегрируем по r от $r=0$ до $r=\infty$. В предположении, что функции ω , χ и μ достаточно быстро стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$, получаем систему уравнений

$$d\Omega + m\Omega = 0, \quad \frac{dH}{dt} + m^0 L = 0, \quad \frac{dL}{dt} + \frac{1}{2} (mL + m^0 \Omega) = 0 \quad (4.1)$$

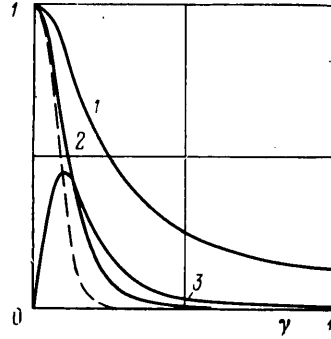
$$\Omega(t) = \int_0^{\infty} \omega r^2 dr, \quad H(t) = \int_0^{\infty} \chi r^2 dr, \quad L(t) = \int_0^{\infty} \mu r^2 dr \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1) интегрируются элементарно. Для величины Ω имеет место следующее обобщенное инвариантное соотношение: $\Omega = \Omega_0 \exp(-mt)$.

Получим предельную форму уравнений (2.12)–(2.14) при $r \rightarrow 0$. Пред-



Фиг. 1



Фиг. 2

ставим функции ω , χ и μ при малых r в виде

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \frac{r^2}{\lambda_\eta^2} \right) + O(r^4), \quad \eta = \omega, \chi, \mu \quad (4.3)$$

где $\lambda_\eta = \lambda_\eta(t)$ — микромасштаб для функции $\eta(r, t)$.

В классической теории изотропной турбулентности с помощью условия $\text{div } v' = 0$ показывается, что член в уравнении (2.12), содержащий величину $K^{(1)}$, при $r=0$ обращается в нуль [4, 5]. Аналогичный вывод можно сделать относительно члена в (2.13), содержащего величину $K^{(4)}$, и члена в (2.14), содержащего сумму $K^{(7)} + K^{(8)}$. Определим асимптотику при $r \rightarrow 0$ других членов, входящих в функции V_ω , V_χ , V_μ . Рассмотрим, например, величину

$$\left(\frac{\partial K^{(3)}}{\partial r} \right)_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \langle E_{rA}' q_A' q_B' \rangle = \lim_{r \rightarrow 0} \left\langle E_{rA}' q_A' \frac{\partial q_B'}{\partial r} \right\rangle \quad (4.4)$$

представляющую собой коэффициент при первом члене разложения нечетной функции $K^{(3)}(r, t)$ по степеням r .

Привлечем вспомогательное соотношение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \langle E_{iA}' q_B'^2 \rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_A \frac{\xi_i N}{r} = - \frac{\partial \xi_i N}{\partial \xi_i r} \\ &= - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 N}{\partial r} = 4\pi \langle q_A' q_B'^2 \rangle, \quad N = N(r, t) = \langle E_{rA}' q_B'^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

При получении (4.5) использовались соотношения (2.8), (2.9) и первое уравнение (1.6). Интегрируя найденное дифференциальное уравнение относительно величины N с условием ее ограниченности, получаем

$$N = - \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r r'^2 \langle q_A' q_B'^2 \rangle dr' \quad (4.6)$$

Из (4.4) и продифференцированного по r второго соотношения (4.5) найдем

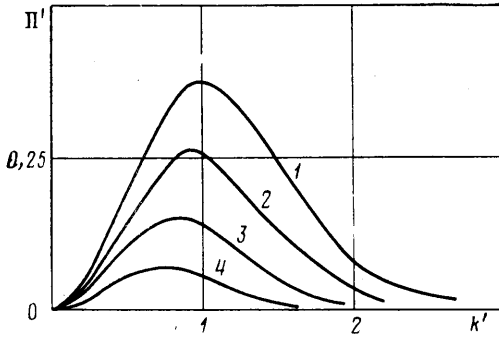
$$\left(\frac{\partial K^{(3)}}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial N}{\partial r} \quad (4.7)$$

Корреляция $\langle q_A' q_B'^2 \rangle$ в случае изотропных полей при малых r представляется в виде

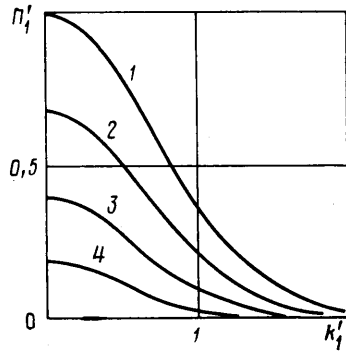
$$\langle q_A' q_B'^2 \rangle = \langle q_A'^3 \rangle + O(r^2) \quad (4.8)$$

Из соотношений (4.6) — (4.8) следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 K^{(3)} = -4\pi \langle q'^3 \rangle \quad (4.9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Проведя аналогичные преобразования других членов, входящих в V_ω , V_x и V_μ , и совершив предельный переход $r \rightarrow 0$ в уравнениях (2.12)–(2.14) с учетом выражений (4.3), находим

$$\frac{d\langle q'^2 \rangle}{dt} + 4\pi b^\circ \langle q'^2 \rangle - 6b \left(\frac{\partial K^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=0} = -\varepsilon_\omega \quad (4.10)$$

$$\frac{d\langle \sigma'^2 \rangle}{dt} + 4\pi b^\circ \langle q' \sigma'^2 \rangle + 8\pi b \langle q'^2 \sigma' \rangle + 6b \left(\frac{\partial K^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=0} = -\varepsilon_x \quad (4.11)$$

$$\frac{d\langle q' \sigma' \rangle}{dt} + 2\pi b (\langle q'^2 \rangle + \langle q' \sigma'^2 \rangle) + 4\pi b^\circ \langle q'^2 \sigma' \rangle = -\varepsilon_\mu \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_\omega = m \langle q'^2 \rangle + \frac{12D \langle q'^2 \rangle}{\lambda_\omega^2} + \frac{12D^\circ \langle q' \sigma' \rangle}{\lambda_\mu^2}$$

$$\varepsilon_x = m^\circ \langle q' \sigma' \rangle + \frac{12D^\circ \langle q' \sigma' \rangle}{\lambda_\mu^2} + \frac{12D \langle \sigma'^2 \rangle}{\lambda_x^2} \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{2} (m \langle q' \sigma' \rangle + m^\circ \langle q'^2 \rangle) + \frac{12D \langle q' \sigma' \rangle}{\lambda_\mu^2} + 6D^\circ \left(\frac{\langle q'^2 \rangle}{\lambda_\omega^2} + \frac{\langle \sigma'^2 \rangle}{\lambda_x^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial K^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=0} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \langle E_{rA} \sigma_A q_B \rangle \right)_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\langle E_{rA} \sigma_A \frac{\partial q_B}{\partial r} \right\rangle$$

Все корреляции, входящие в (4.10)–(4.13), одноточечные. На заключительной стадии вырождения тройные корреляции оказываются несущественными и диссипация величин $\langle q'^2 \rangle$, $\langle \sigma'^2 \rangle$ и $\langle q' \sigma' \rangle$ определяется членами ε_ω , ε_x и ε_μ соответственно, которые по сравнению с классическим гидродинамическим вариантом содержат дополнительные электродинамические составляющие, пропорциональные m и m° .

5. Вырождение полей при $b^+ = b^-$, $D^+ = D^-$. Пусть коэффициенты диффузии и модули подвижностей положительно и отрицательно заряженных частиц одинаковы ($D^\circ = 0$, $b^\circ = 0$). Для заключительной стадии вырождения полей (когда гидродинамическое и электрическое числа Пекле для пульсационных полей малы) уравнения (2.12) и (2.13) упрощаются и становятся независимыми

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + m\omega - 2D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, \quad \omega(r, 0) = \omega^{(0)}(r) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - 2D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0, \quad \chi(r, 0) = \chi^{(0)}(r) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{1}{2} m\mu - 2D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0, \quad \mu(r, 0) = \mu^{(0)}(r) \quad (D^+ = D^- = D) \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) совпадает с классическим уравнением для вырождающегося скалярного поля, а уравнения (5.1) и (5.3) описывают вырождение полей при учете дрейфа заряженных частиц в электрическом поле.

При $D=0$ получаем соотношения

$$\omega = \omega^{(0)}(r) \exp(-mt), \quad \chi = \chi^{(0)}(r), \quad \mu = \mu^{(0)}(r) \exp(-1/2mt)$$

которыми описывается вырождение полей вследствие только одних дрейфовых процессов.

Уравнение (5.1) с помощью перехода к новой зависимой переменной $X(r, t)$ по формуле $\omega = Xr^{-1} \exp(-mt)$ сводится к классическому одномерному нестационарному уравнению теплопроводности, решение которого известно. Опуская выкладки, получаем

$$\omega(r, t) = \frac{e^{-mt}}{r\sqrt{8\pi Dt}} \int_0^{\infty} [e^{-(r-w)^2/8Dt} - e^{-(r+w)^2/8Dt}] w \omega^{(0)}(w) dw \quad (5.4)$$

Решения уравнений (5.2) и (5.3) находятся из (5.4) путем замен $\omega \rightarrow \chi$, $m=0$ и $\omega \rightarrow \mu$, $m \rightarrow 0,5m$ соответственно.

Рассмотрим в качестве примера следующее начальное распределение функции ω :

$$\omega^{(0)} = \Gamma \exp(-cr^2), \quad \Gamma, c = \text{const} \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в соотношение (5.4), находим

$$\omega = q^{02} \exp(-\gamma^2), \quad q^{02} = \frac{\Gamma \exp(-mt)}{(cs)^{3/2}}, \quad \gamma^2 = \frac{r^2}{s} \quad (5.6)$$

$$s = s(t) = c^{-1}(1 + 8Dtc)$$

Микромасштаб λ_ω и макромасштаб L_ω определяются формулами

$$\lambda_\omega^2 = s(t), \quad L_\omega^2 = (\pi/4)s(t) \quad (5.7)$$

Корреляции, содержащие пульсации электрического поля, и соответствующие масштабы находятся с помощью выражений (3.4), (3.10) – (3.15) и представляются в виде

$$S = q^0 E^0 \rho(\gamma), \quad E^{02} = 8/3\pi^2 q^{02} s, \quad \rho(\gamma) = -\sqrt{6}\gamma^{-2} \alpha_2(\gamma)$$

$$F = \exp(-\gamma^2) + 2\gamma^{-3} \alpha_4(\gamma), \quad G = \exp(-\gamma^2) + 3\gamma^{-1} \alpha_2(\gamma) - \gamma^{-3} \alpha_4(\gamma) \quad (5.8)$$

$$\alpha_n(\gamma) = \int_0^\gamma \gamma^n \exp(-\gamma^2) d\gamma, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_F^2 = 5/3 s(t), \quad \lambda_G^2 = 5s(t), \quad L_F = 6\alpha_2(\infty) \sqrt{s(t)}$$

$$Pe = \frac{bE^0 \lambda_\omega}{D} = \frac{\pi b \sqrt{8/3} \Gamma \exp(-1/2mt)}{Dc^{3/4} [s(t)]^{3/4}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow 8Dt$$

Формулы (5.6)–(5.8) представляют собой законы вырождения случайных изотропных полей при начальном условии (5.5) для функции ω . Последнее соотношение (5.8) определяет скорость убывания электрического числа Пекле. При больших t масштабы для коэффициентов корреляций, как и в классической гидродинамике, возрастают пропорционально \sqrt{t} , но среднеквадратичные значения параметров характеризуются экспоненциальным убыванием.

Согласно (5.6), величина $\omega' = \omega/\Gamma$ может быть представлена как функция безразмерных переменных $t' = mt$, $r' = r\sqrt{m/8D}$, которая содержит параметр $D' = 8Dc/m$, являющийся отношением характерных времен вырождения скалярного поля вследствие дрейфового и диффузионного движения

заряженных частиц. На фиг. 1 показаны зависимости ω' от r' при $D'=1$ и $t'=0; 0,2; 0,5; 1,0$ (кривые 1-4).

Функции $\rho(\gamma)$, $F(\gamma)$ и $G(\gamma)$, соответственно представляющие собой коэффициенты корреляции $\langle E_{rA}'q_B' \rangle$, продольной корреляции $\langle E_{rA}'E_{rB}' \rangle$ и поперечной корреляции $\langle E_{yA}'E_{yB}' \rangle$ (где y — направление, перпендикулярное к прямой, соединяющей точки A и B), показаны на фиг. 2 (кривая 1 — G , 2 — F , 3 — $(-\rho)$). Штриховая линия является коэффициентом корреляции $\langle q_A'q_B' \rangle$.

Заметим, что заключительная стадия вырождения полей при $b^\circ \neq 0$, $D^\circ \neq 0$ описывается линейной системой уравнений, которая соответствует уравнениям (2.12) — (2.14) при $V_\omega = V_x = V_y = 0$. Она может быть решена с помощью преобразования Фурье (перехода в спектральное пространство). Для изображений Фурье (как функции времени) получается система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

6. Некоторые спектральные функции. Вычислим спектральную функцию $\Pi(k, t)$, определяемую формулой [4]

$$\Pi(k, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty kr \sin kr \omega(r, t) dr, \quad q^{oz} = \langle q'^z \rangle = \int_0^\infty \Pi(k, t) dk \quad (6.1)$$

для заключительной стадии вырождения поля ω при условиях $b^\circ = 0$, $D^\circ = 0$. Подставляя выражение (5.6) в (6.1), находим

$$\Pi' = \frac{\Pi}{\Gamma^*} = k'^z \exp \left[-t' - k'^z \left(t' + \frac{1}{D'} \right) \right], \quad \Gamma^* = \frac{2\Gamma}{D'} \sqrt{\frac{\pi}{c}} \quad (6.2)$$

$$t' = mt; \quad D' = 8Dc/m, \quad k' = k\sqrt{2D/m}$$

Одномерная спектральная функция, определяемая формулой (6.3), при тех же условиях представляется в виде (6.4)

$$\Pi_1(k_1, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega(x_1, t) \cos k_1 x_1 dx_1 \quad (6.3)$$

$$\Pi_1' = \frac{\Pi_1}{\Gamma} = \frac{1}{1 + D't'} \exp \left[-t' - k_1'^z \left(t' + \frac{1}{D'} \right) \right], \quad k_1' = k_1 \sqrt{\frac{2D}{m}} \quad (6.4)$$

Зависимости Π' от k' и Π_1' от k_1' при $D'=1$ и $t'=0; 0,2; 0,5; 1,0$ (кривые 1-4) показаны на фиг. 3 и 4 соответственно.

Авторы благодарят В. Р. Кузнецова за полезное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Электрогидродинамика: Задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения. — В кн.: Механика жидкости и газа. Т. 10. Итоги науки и техники ВИНТИ. М., 1976, с. 5-85.
2. Вагажин А. Б., Грабовский В. И., Лихтер В. А., Шульгин В. И. Электрогазодинамические течения. М.: Недра, 1983. 344 с.
3. Вагажин А. Б., Лихтер В. А., Рушайло А. М., Шульгин В. И. Электрические пульсации в турбулентных электрогазодинамических потоках. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 2, с. 148-159.
4. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
5. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.II.1986