

УДК 532.517.4

**О ПРОЦЕССАХ ОБРАЗОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ ВИХРЕВЫХ
СТРУКТУР В СДВИГОВЫХ СЛОЯХ**

ВЕРЕТЕНЦЕВ А. Н., РУДЯК В. Я.

Классические эксперименты по изучению эволюции слоя смещения [1] стимулировали появление в последнее десятилетие большого числа теоретических и экспериментальных работ, в которых исследуется динамика крупномасштабных вихревых структур в сдвиговом слое или слое смещения. Особое внимание в этих работах уделялось изучению образования таких структур, их взаимодействия и влияния на эволюцию всего течения в целом. Тем не менее до сих пор ни одной теории не удается последовательно описать развитие неустойчивости в сдвиговом слое, его распад на дискретные вихревые структуры и дальнейшую эволюцию этих структур. Неясно, как эти процессы зависят от начальных условий и можно ли ими управлять путем введения контролируемых возмущений. Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо выяснить, как влияют начальные возмущения на образование и последующую эволюцию вихревых структур.

В настоящей работе обобщенным методом дискретных вихревых частиц [2-4] исследуется эволюция возмущенного сдвигового слоя и процессы образования в нем вихревых структур. Показано, что развитие вторичной неустойчивости и дальнейшая эволюция сдвигового слоя определяются субгармоническими возмущениями. При этом механизм укрупнения вихревых структур существенно зависит от начальных условий задачи, в частности от величины амплитуды и фазы накладываемых возмущений. Рассчитаны профиль средней скорости течения и толщина потери импульса. По этим параметрам проведено сравнение расчетных и экспериментальных данных.

1. Рассмотрим двумерное течение несжимаемой невязкой жидкости с профилем невозмущенной скорости $U(y) = -U_0 \operatorname{th}(2y/\delta)$, где δ — характерная толщина сдвигового слоя. Это течение будем моделировать дискретным набором N вихревых частиц. Функции формы вихревых частиц будем предполагать гауссовскими. Поле завихренности ω в этом случае аппроксимируется функцией [4]

$$\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{\beta=1}^N \frac{\Gamma_{\beta}}{\sigma_{\beta}^2} \exp\left(-\frac{r_{\alpha\beta}^2}{\sigma_{\beta}^2}\right)$$

причем циркуляции Γ_{β} и дисперсии σ_{β}^2 вихревых частиц определяются по завихренности невозмущенного течения.

Здесь $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}_{\alpha\beta}| = |\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|$, $\mathbf{r}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha})$ — радиус-вектор центра вихревой частицы α на плоскости (x, y) , \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к плоскости (x, y) .

Уравнения движения системы дискретных вихревых частиц с гауссовской функцией формы имеют вид [3, 4]

$$\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_{\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{r_{\alpha\beta}^2}{\sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2}\right) \right] \frac{(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \times \mathbf{n}}{r_{\alpha\beta}^2} \quad (1.1)$$

В начальный момент времени на это течение накладываются гармоническое с длиной волны λ и субгармонические с длиной волны $m\lambda$ (m — целое число) возмущения, относительно которых предполагается, что они вводятся посредством смещения частиц жидкости в поперечном направ-

лении (по оси y). В экспериментальных условиях это соответствует введению возмущений с помощью гибкой пластинки, колеблющейся с заданной частотой [5]. В результате в начальный момент времени координаты вихревых частиц $x_\alpha^\circ, y_\alpha^\circ$ задаются формулами

$$x_\alpha^\circ = X_\alpha, \quad y_\alpha^\circ = Y_\alpha + \sum_m A_m \sin\left(\frac{k}{m} X_\alpha + \varphi_m\right) \quad (1.2)$$

где X_α, Y_α — невозмущенные координаты вихревых частиц; A_m и φ_m — соответственно амплитуда и фаза вводимых возмущений, $k=2\pi/\lambda$. Решение задачи сводится к решению системы уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2).

Система уравнений (1.1) решалась методом Рунге — Кутты второго порядка точности. При этом предполагалось, что течение является периодическим по x с периодом $l=m\lambda$, где m — целое число, зависящее от того, какие именно субгармонические возмущения накладываются. В результате решения системы уравнений (1.1) определялись законы движения вихревых частиц и мгновенные поля завихренности и скорости. С помощью этих данных вычислялись затем профиль средней скорости, толщина потери импульса и другие характеристики течения. Поле средней скорости вычислялось по полю средней завихренности ω , которое определялось следующим образом:

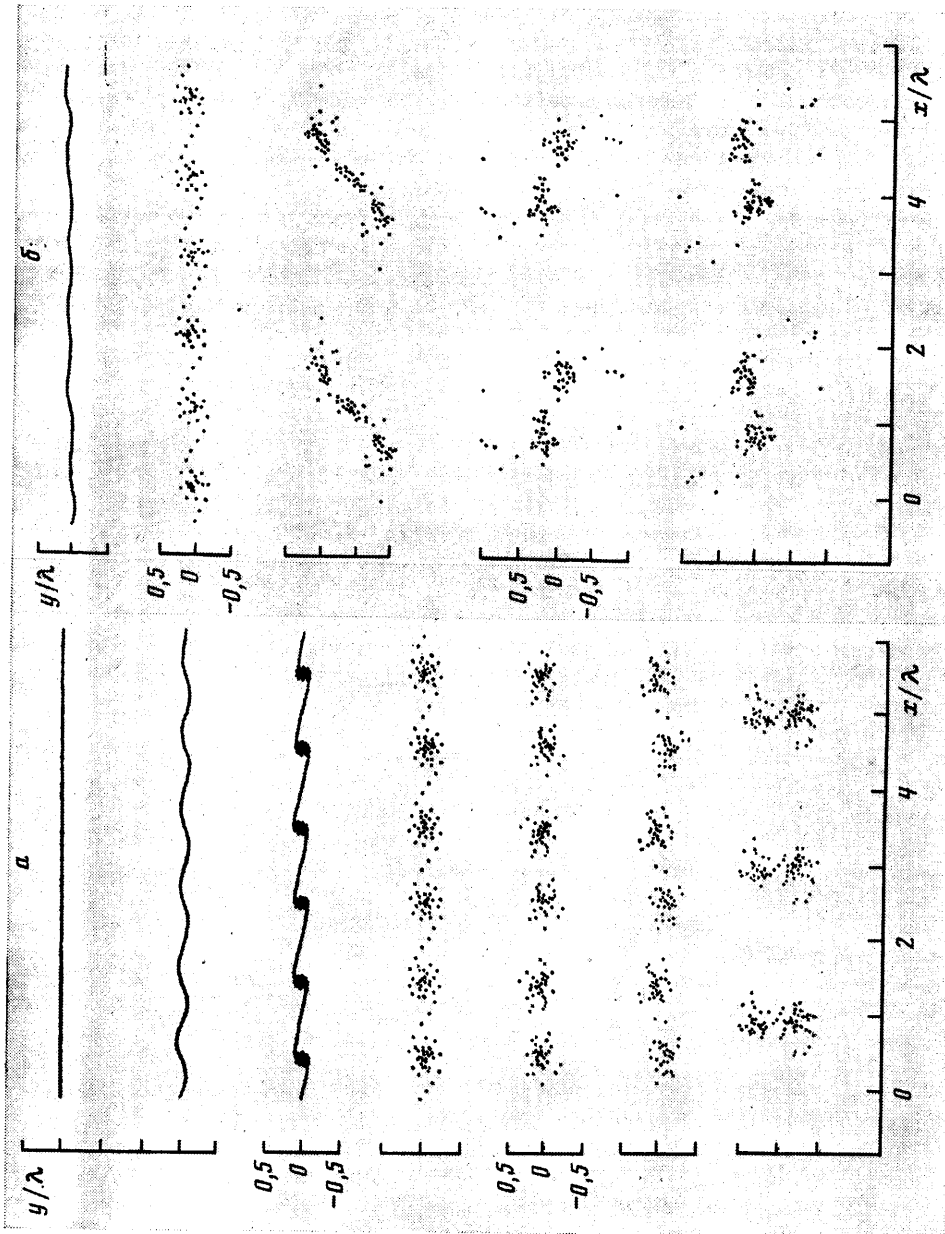
$$\langle \omega \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nl} \int_{-nl/2}^{nl/2} \omega(\mathbf{r}, t) dx = \frac{1}{l\sqrt{\pi}} \sum_{\beta=1}^{N_l} \frac{\Gamma_\beta}{\sigma_\beta^2} \exp\left[-\frac{(y-y_\beta(t))^2}{\sigma_\beta^2}\right]$$

где N_l — число вихревых частиц на одном периоде.

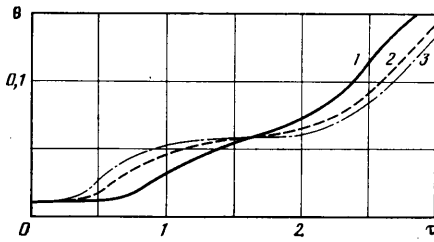
Типичный расчет развития неустойчивости в сдвиговом слое под действием возмущений с амплитудами $A_1=8,34 \cdot 10^{-4}$, $A_2=A_1$ и $A_n=0$ при $n>2$ для сдвигового слоя толщиной $\delta=0,3/k$ представлен на фиг. 1, а. Здесь гистограмма 1 соответствует моменту времени $\tau=0$; 2 — 0,75; 3 — 1; 4 — 1,75; 5 — 2,5; 6 — 2,75; 7 — 4,25 ($\tau=tv_0/\lambda$). Фаза гармонического возмущения выбиралась равной нулю, а фаза субгармонического возмущения — $\pi/2$.

На первом этапе $\tau=0-0,4$ имеет место линейная стадия развития гармонического и субгармонического возмущений: возмущения нарастают экспоненциально без изменения формы. Когда максимальные возмущения поперечной компоненты скорости достигали величины порядка $0,02U_0$, начинали проявляться нелинейные эффекты. В результате форма сдвигового слоя становилась пилообразной и далее наблюдалось его сворачивание и образование первичных вихревых структур (фиг. 1, $\tau=1,0$). Эти структуры имеют вид круговых вихрей, диаметры которых растут за счет захвата окружающей жидкости. При этом одновременно происходит смещение этих структур в поперечном направлении вследствие роста субгармонического возмущения. Когда расстояние между структурами становится порядка $1,7d$, где d — диаметр вихревой структуры, наблюдается их спаривание. «Организация» спаривания происходит на длине волны субгармоники.

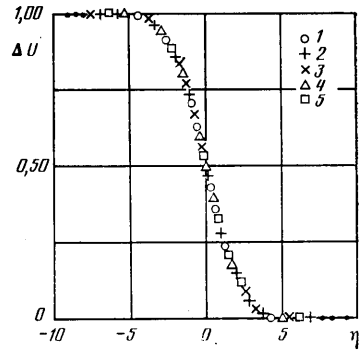
На первой стадии развития неустойчивости, вплоть до образования первичных вихревых структур, субгармоника нарастает значительно медленнее гармоники и практически не оказывает влияния на процесс развития неустойчивости. Напротив, на второй стадии, когда амплитуда основной гармоники приближается к равновесию, имеет место вторичная неустойчивость. На этой стадии амплитуда субгармонического возмущения возрастает очень быстро — быстрее, чем это предсказывается линейной теорией. Последнее можно объяснить резонансом, наблюдающимся при взаимодействии основной моды с субгармонической [6]. Ранее этот эффект наблюдался в расчетах [7]. При этом, так же как и в [7], амплитуда субгармоники может превышать амплитуду основной моды в несколько раз (в настоящем расчете при $\tau=3,0$ — более чем в 2 раза).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

С ростом амплитуды субгармонического возмущения увеличивается смещение каждой пары первичных вихревых структур относительно друг друга, что приводит затем к их взаимному вращению (фиг. 1, $\tau=2,5$). На этой стадии взаимодействие пары вихревых структур практически не зависит от окружения. Две изолированные круговые вихревые структуры сливаются и образуют единую структуру лишь в том случае, когда расстояние между ними меньше критического $r_* \approx 1,7$ [8]. Именно этой качественной картине и соответствует процесс образования вторичных структур.

Эволюция сдвигового слоя существенным образом зависит от начальных значений амплитуд возмущений и фазы субгармоники. При этом амплитуда основной гармоники определяет характер эволюции сдвигового слоя на начальной стадии развития неустойчивости, а амплитуда и фаза субгармоники — на стадии вторичной неустойчивости.

На фиг. 2 показано изменение толщины сдвигового слоя в зависимости от амплитуды основной гармоники. По оси ординат здесь отложена обезразмеренная на λ толщина потери импульса $\theta = \theta/\lambda$.

$$\theta = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\langle u \rangle - U_1)(\langle u \rangle - U_2)}{(U_2 - U_1)^2} dy$$

где $\langle u \rangle$ — продольная компонента средней скорости течения, а U_1, U_2 — невозмущенные скорости смешивающихся потоков. Кривые 1–3 соответствуют амплитудам $A_1 = 8,34 \cdot 10^{-4}$; $4,17 \cdot 10^{-3}$; $8,34 \cdot 10^{-3}$. Во всех случаях амплитуда и фаза субгармоники были одинаковыми и равными соответственно $4,17 \cdot 10^{-3}$ и $\pi/2$.

Начальный прямолинейный участок на этих кривых означает, что здесь имеет место линейная стадия развития неустойчивости. Из фиг. 2 видно, что увеличение амплитуды основной гармоники приводит к более быстрому развитию неустойчивости сдвигового слоя. Напротив, уменьшение амплитуды затягивает начальную линейную стадию развития неустойчивости. Если отношение $A_2/A_1 \leq 1$, то толщина сдвигового слоя к моменту начала развития вторичной неустойчивости практически не зависит от величины амплитуды основной гармоники. После развития первичной неустойчивости имеет место участок замедленного развития сдвигового слоя, где толщина слоя может даже несколько уменьшаться. Немонотонный рост толщины слоя смещения наблюдался экспериментально (см., например, [5, 9]) и был получен в численных расчетах [10]. Длина области замедленного развития при фиксированной фазе определяется амплитудой субгармоники и уменьшается с увеличением отношения A_2/A_1 .

Варьируя фазу субгармоники при фиксированных значениях амплитуд, можно затягивать переход ко вторичной неустойчивости и замедлять процесс спаривания вихревых структур. Наиболее интенсивно процесс

спаривания происходит при $\varphi_2 = \pi/2$, когда максимальное значение субгармонического возмущения синхронизовано с центрами вихревых структур. С уменьшением (увеличением) фазы субгармоники развитие вторичной неустойчивости затягивается.

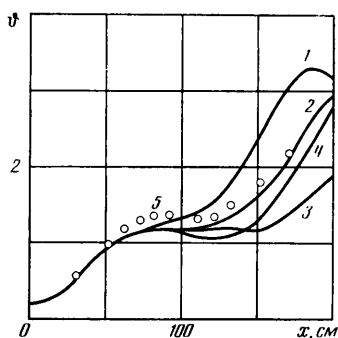
2. Сдвиговой слой представляет определенную идеализацию слоя смешения, когда от изучения развития возмущений в пространстве переходят к изучению их эволюции во времени. При определенных условиях такой переход обоснован. Это позволяет, в частности, провести сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными. В настоящей работе такое сравнение выполнено для экспериментов по искусственному возбуждению слоя смешения [5]. В этом эксперименте гармонические возмущения вводились в начале слоя смешения колеблющимся с заданной амплитудой A_e и частотой f тонким щитком, которым оканчивалась разделительная пластина. При таком способе введения возмущений амплитуду и частоту колебаний щитка легко связать с длиной волны и амплитудой гармонических возмущений, используемых в расчете. В частности, можно показать, что $A_1 = A_e$, $\lambda = (U_1 + U_2)/2f$. Кроме того, эксперименты были выполнены при больших числах Рейнольдса (порядка 10^4), когда только и применимо невязкое приближение.

При сопоставлении с экспериментальными данными предполагалось, что продольная компонента скорости в слое смешения связана с соответствующей компонентой скорости в сдвиговом слое преобразованием Галилея. Сравнение с экспериментальными данными выполнялось для профиля средней скорости и толщины потери импульса.

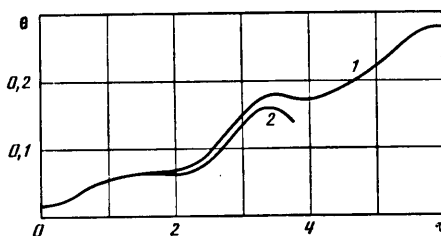
На фиг. 3 представлены расчетные и экспериментальные профили скорости как функции параметра подобия $\eta = (y - y_0)/\theta$ (y_0 — изотаха, соответствующая значению средней скорости $\langle u \rangle = (U_1 + U_2)/2$) для случая, когда $A_e = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, $f = 30$ Гц, $U_1 = 8,1$ м/с, $U_2 = 13,5$ м/с, $\Delta U = (\langle u \rangle - U_1)/(U_2 - U_1)$. Цифры 1–3 соответствуют значениям профиля скорости, вычисленным соответственно в моменты времени $\tau = 0,5; 1,0; 1,5$. Пользуясь правилом Рэлея [11], можно показать, что в слое смешения этим моментам времени будут соответствовать расстояния $x = 0,72; 1,44$ и $2,16$ м. В экспериментах измерения проводились в диапазоне $x = 0,3–1,7$ м. Экспериментальные данные на фиг. 3 относятся к расстояниям $x = 0,7$ и $1,4$ м и отмечены соответственно цифрами 4 и 5. Экспериментальные и расчетные данные хорошо согласуются между собой и иллюстрируют известный факт подобия профилей средней скорости в слое смешения для различных расстояний x вниз по потоку.

В эксперименте так же, как в приводимых расчетах, наблюдались три характерные области развития слоя смешения. В первой происходило образование крупномасштабных вихревых структур в результате развития неустойчивости на длине волны наложенного внешнего возмущения. Во второй образовавшиеся вихревые структуры слабо взаимодействовали между собой, а толщина слоя смешения оставалась приблизительно постоянной. В третьей области наблюдалось развитие вторичной неустойчивости и спаривание первичных вихревых структур, толщина слоя смешения при этом возрастала. На фиг. 4 приведены экспериментальные данные [5] по нарастанию толщины потери импульса (данные 5) для $A_e = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, $f = 50$ Гц, $U_1/U_2 = 0,5$ и $U_2 = 13,5$ м/с. Здесь же сплошными линиями показаны результаты расчетов. Кривые 1–3 соответствуют фиксированной фазе $\varphi_2 = \pi/2$ и амплитудам субгармоники, равным A_e , $A_e/2$ и $A_e/4$. Кривая 4 иллюстрирует расчет толщины потери импульса при амплитуде субгармоники $A_2 = A_e/2$ и фазе $\varphi_2 = \pi/4$.

Наилучшее согласие с экспериментальными данными достигается при амплитуде субгармоники $A_2 = A_e/2$ и фазе $\varphi_2 = \pi/2$. В связи с этим следует заметить, что в экспериментах искусственно возбуждались лишь возмущения на основной частоте. Субгармоническое возмущение генерировалось в процессе эволюции течения. Однако на расстоянии вниз по потоку,



Фиг. 4



Фиг. 5

равном $0,5$ м при $A_e = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, $f = 50$ Гц, субгармоническая мода уже регистрировалась, при этом соответствующее ей значение энергии пульсаций скорости было на два порядка ниже энергии основной моды [5]. Именно такое соотношение между пульсациями скорости на основной частоте и частоте субгармоники наблюдается в расчетах, если в начальный момент времени $A_2 = A_1/2$. Тем не менее определенное количественное расхождение между рассчитанными и экспериментальными значениями толщины потери импульса наблюдается и в этом случае. Это расхождение, по-видимому, объясняется тем, что в расчетах не учитывалось влияние мелких вихрей, образующихся в слое смещения в результате развития начальной неустойчивости на частоте $f_i \gg f$.

3. Спектры пульсаций скорости [5] свидетельствуют о генерации в начале слоя смещения также и второй субгармоники с частотой $f/4$. Поэтому рассматривался случай, когда не только амплитуды A_1 , A_2 , но и амплитуда A_4 были отличными от нуля. Наиболее важным здесь было то, что после спаривания первичных структур, рост толщины сдвигового слоя не прекращался, наблюдалось спаривание вторичных структур и образование вихревых структур следующего поколения.

На фиг. 5 (кривая 1) показано изменение толщины потери импульса при $A_1 = 8,34 \cdot 10^{-3}$, $A_2 = A_1/2$, $A_4 = 2A_1$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_4 = \pi/4$. Для сравнения здесь же показано изменение θ при $A_4 = 0$ (кривая 2). Видно, что при наличии второй субгармоники имеются уже две области замедленного развития сдвигового слоя. Длина первой определяется отношением амплитуд A_2/A_1 , а длина второй отношением A_4/A_2 . Дальнейший рост толщины сдвигового слоя и образование вихревых структур нового поколения можно получить, добавляя следующую по порядку субгармонику с длиной волны $\lambda/8$.

Таким образом, развитие сдвигового слоя возможно через попарные слияния образующихся вихревых структур, что вполне соответствует сложившимся современным представлениям. Для этого необходимо, чтобы в спектре начальных возмущений доминировали субгармоники с частотами $f/2^n$ ($n=1, 2, \dots$). Если эти условия не выполняются, то возможны иные механизмы образования вихревых структур и, как следствие, другая картина развития сдвигового слоя.

Рассмотрим, например, случай, когда в течении наряду с основной частотой возбуждается частота $f/3$. Пусть $A_1 = A_3 = 10^{-2}$ и $\varphi_3 = 0$. Эволюция такого сдвигового слоя представлена на фиг. 1, б. Здесь гистограмма 1 соответствует моменту времени $\tau = 0$; 2 — 1; 3 — 3,5; 4 — 5; 5 — 55.

Из сравнения фиг. 1, а и 1, б видно, что оба течения развиваются подобным образом на этапе развития первичной неустойчивости, в результате которой образуются первичные вихревые структуры. Однако этапы развития вторичной неустойчивости в этих течениях радикальным образом различаются. В течении, возбуждаемом частотами f и $f/3$, вторичные вихревые структуры образуются в результате страивания первичных структур, а не спаривания, как это было раньше. Если в течении возбуж-

даются частоты f и $f/4$, то образование вторичных вихревых структур происходит путем счетверения первичных структур и т. д. Следует заметить, что в экспериментах [1] страивание структур также наблюдалось, хотя и происходило значительно реже спаривания.

Образовавшиеся в результате страивания или счетверения вторичные вихревые структуры сильно неравновесны. К моменту времени $\tau=5,0$ (см. фиг. 1, б) центральный вихрь разрывается крайними и дальше вторичная структура эволюционирует как двухвихревая. Подобный процесс имеет место и в структуре, образовавшейся в результате счетверения вихревых структур. Здесь, однако, четырехвихревая структура превращается сначала в трех-, а затем уже в двухвихревую. Процессы взаимодействия оказываются еще более сложными, если симметрия вихрей внутри вторичной структуры по каким-либо причинам нарушена. При страивании вихрей такого нарушения симметрии внутри вторичной вихревой структуры можно добиться, если возбудить еще субгармонику с амплитудой $A_2 < A_3$.

В случае возбуждения в течении одновременно нескольких субгармоник процесс вторичной неустойчивости сильно усложняется и обуславливается их нелинейным взаимодействием. При этом образование вторичных структур может протекать по различным «каналам». Выбор канала целиком будет определяться начальными условиями: величиной амплитуд и фаз субгармоник. Варьируя эти условия, можно управлять развитием слоя смешения.

Авторы выражают свою глубокую признательность Г. И. Петрову и участникам руководимого им семинара за плодотворное обсуждение этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown G. L., Roshko A.* On density effects and large structure in turbulent mixing layers.— *J. Fluid Mech.*, 1974, v. 64, № 4, p. 775–816.
2. *Веретенцев А. Н., Рудяк В. Я., Яненко Н. Н.* Вариационный метод построения дискретных моделей. Препринт № 29. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. мех. СО АН СССР, 1982.
3. *Yanenko N. N., Rudyak V. Ya., Veretentsev A. N.* The study of shear layer stability by the method of vortex particles.— In: *Laminar-turbulent transition*. Springer-Verlag, 1985, p. 367–374.
4. *Веретенцев А. Н., Рудяк В. Я., Яненко Н. Н.* О построении дискретных вихревых моделей течений идеальной несжимаемой жидкости.— *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, 1986, т. 26, № 1, с. 103–113.
5. *Oster D., Wygnanski I.* The forced mixing layer between parallel streams.— *J. Fluid Mech.*, 1982, v. 123, p. 91–130.
6. *Kelly R. E.* On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time.— *J. Fluid Mech.*, 1967, v. 27, № 4, p. 657–689.
7. *Герценштейн С. Я., Сухоруков А. Н.* О нелинейной эволюции двумерных и трехмерных волн в слоях смешения.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1985, № 1, с. 10–18.
8. *Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions.— *J. Comput. Phys.*, 1979, v. 30, № 1, p. 96–106.
9. *Miksad R. W.* Experiments on nonlinear interactions in the transition of a free shear layer.— *J. Fluid Mech.*, 1973, v. 59, № 1, p. 1–21.
10. *Герценштейн С. Я., Масеев М. М., Никитин Н. В. и др.* Неустойчивость градиентных и стратифицированных течений.— *Отчет Ин-та мех. МГУ*, 1983, № 2866. 145 с.
11. *Биркгоф Г.* Неустойчивость Гельмгольца и Тэйлора.— В кн.: *Гидродинамическая неустойчивость*. М.: Мир, 1964, с. 68–94.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.X.1985