

УДК 532.135

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ТИКСОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ

НЕТРЕБКО Н. В., ОРЛОВА И. В., РЕГИРЕР С. А.

Получено приближенное решение задачи о безынерционном периодическом течении жидкости с переменной структурой в трубке круглого сечения. Исследовано влияние параметров, определяющих кинетику изменений структуры и колебания градиента давления, на эффективную вязкость и другие осредненные гидродинамические характеристики. Сопоставляются решения задач о течении тиксотропной и нелинейно-вязкой жидкостей. Результаты обсуждаются в связи с их применением к движению крови.

1. Тиксотропными называют жидкости, внутренняя структура которых обратимо изменяется при сдвиге, причем росту сдвиговых напряжений соответствует падение вязкости. Специфические тиксотропные свойства проявляются в таких течениях, в которых вдоль траекторий материальных объемов структура изменяется с характерным временем t_a по порядку величины не меньшим, чем характерное гидродинамическое время t_* . В противоположном случае, когда $t_a \ll t_*$, практически наблюдается нелинейно-вязкое поведение, т. е. однозначная связь вязкости со скоростью сдвига.

К числу тиксотропных жидкостей принадлежит кровь, которую можно рассматривать как смесь несжимаемой ньютоновской жидкости — плазмы и взвешенных частиц той же плотности — эритроцитов [1]. В сдвиговом течении эритроциты могут сближаться на расстояние, достаточное для слипания, и образовывать агрегаты, которые в свою очередь могут далее укрупняться при «столкновениях» или распадаться под действием гидродинамических сил.

С агрегацией эритроцитов связывают некоторые особенности движения крови в малых кровеносных сосудах. Так, сопротивление сосуда зависит от среднего размера агрегатов, которым определяются вязкость крови и толщина пристенного слоя плазмы [1]. Размер эритроцитарных агрегатов при прочих равных условиях влияет на распределение других клеток по сечению сосуда [2]. Изучение агрегации эритроцитов представляет интерес также в связи с более общей проблемой клеточных взаимодействий во взвесах.

Характерное время самых быстрых изменений агрегационной структуры крови в физиологических условиях сопоставимо с длительностью сердечного цикла [1]. Поэтому использование модели нелинейной вязкости, в частности популярного уравнения Кессона (см., например, [3]), не имеет, вообще говоря, смысла применительно к реальным нестационарным течениям крови в сосудах [4].

2. Рассмотрим движение несжимаемой равноплотной суспензии, содержащей взвешенные частицы, с объемной концентрацией H . Структуру жидкости будем характеризовать единственным параметром N — числовой концентрацией всевозможных агрегатов в расчете на единицу объема смеси. Параметр N связан с H и средним объемом w одного агрегата равенством $Nw = H$. Максимальному значению N , обозначаемому через N_* , соответствует распад всех агрегатов на одиночные «элементарные» частицы с объемом $w_0 = H/N_*$. При образовании сплошной общей сети из частиц (максимальная степень агрегации) формально $N \rightarrow 0$, $w \rightarrow \infty$.

Реологические свойства суспензии будем описывать соотношениями

$$\tau_{ij} = 2\eta(N, H) e_{ij}, \quad \frac{dN}{dt} = F(N, H, I); \quad I = (2e_{ij}e^{ij})^{1/2}. \quad (2.1)$$

где e_{ij} , τ_{ij} — компоненты, тензора скоростей деформации и тензора вязких

напряжений, η — коэффициент вязкости. Функцию F постулируем в виде

$$F = -\alpha^+ N_* z^{1-\gamma^+} I + \alpha^- N_* z^{1-\gamma^-} I \Phi \left(\frac{\eta I}{\sigma} \right) \left[\psi \left(\frac{\eta I}{\sigma} \right) - z \right] \chi(\psi - z)$$

$$z = \frac{N}{N_*}, \quad \gamma^+ < 1, \quad \gamma^- \geq \gamma^+; \quad \psi(\infty) = 1, \quad \Phi(0) = 0 \quad (2.2)$$

Здесь α^\pm , σ — неотрицательные постоянные, σ имеет смысл характерного разрушающего напряжения для агрегатов, функции ψ , Φ — непрерывные, монотонные и неубывающие, χ — единичная функция Хевисайда. Функция ψ определяет минимальный размер w_m агрегатов, которые могут быть разрушены при данной интенсивности сдвиговых напряжений $I_r = \eta I$: $w > w_m = H/N_* \psi$. Конкретный вид модельной функции ψ не имеет существенного значения; при расчетах для определенности положим далее $\psi = 1$. Заданное в виде (2.2) представление F обобщает многие ранее предлагавшиеся (см., например, [5–7]) и качественно согласуется с результатами экспериментов для различных суспензий с агрегирующимися частицами.

Относительно зависимости вязкости η от N , H предположим, что

$$\eta = \eta_0 \exp \{ \beta H [1 + \varphi(z)] \}, \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi(0) \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

где η_0 , β — постоянные, φ — монотонно убывающая функция. При конкретных расчетах будем принимать $\varphi = \varphi_0(1-z)$, $\varphi_0 \gg 1$.

Для стационарных состояний малого материального объема ($dN/dt = 0$) и, в частности, для стационарных вискозиметрических течений из (2.1), (2.2) следует $F = 0$. Этим устанавливается равновесная связь между $N = N_\infty$ и I , а (2.3) тогда выражает вязкость $\eta = \eta_\infty$ как функцию I . Принятый вид функции F обеспечивает существование монотонно убывающей функции $\eta_\infty(I)$, причем $N_\infty \ll N_*$, $\eta_\infty(I) \gg \eta_0$ или даже $N_\infty \rightarrow 0$, $\eta_\infty \rightarrow \infty$ при $I \rightarrow 0$. Тем самым зависимость касательных напряжений от скорости сдвига в стационарном течении соответствует псевдопластическому ($\gamma^- > \gamma^+$) или вязкопластическому ($\gamma^- = \gamma^+$) поведению среды. Заметим, что для моделирования последнего в (2.1), (2.2) не требуется явно вводить гипотезу о существовании предельного напряжения сдвига.

При построении моделей тиксотропных сред установление соотношений, описывающих кинетику агрегации и связь вязкости с агрегационными переменными, играет ключевую роль. В настоящее время для концентрированной суспензии нет возможности создать единую детальную теорию такого рода, но даже при ее наличии сопоставление расчетов с опытными данными было бы затруднено из-за недостаточности последних. Поэтому целесообразно пользоваться сравнительно грубыми подходами, оперируя параметрами N , H , т. е. первыми двумя моментами функции распределения агрегатов по размерам, и привлекая для построения функций F , η физические соображения, феноменологическую теорию, теорию размерностей [5] и т. п. Формулы (2.2), (2.3) сконструированы именно таким образом, причем (2.3) соответствует эмпирически установленной связи вязкости и концентрации для концентрированных суспензий типа крови с введением поправки, учитывающей увеличение кажущейся концентрации при образовании агрегатов. Исходным для (2.2) является предположение о том, что образование и распад агрегатов — независимые процессы. Положим

$$F = -F^+ + F^-, \quad F^+ = F^+(H, N, N_*, I), \quad F^- = F^-(H, N, N_*, I, \eta_0, \sigma)$$

где η_0 — вязкость несущей жидкости. Если считать, что H , η_0 входят в F^- только через напряжение сдвига, то из соображений размерности получим

$$F^+ = A^+(H, z) I N_*, \quad F^- = A^-(z, I_r/\sigma) I N$$

В уравнении для N опущены диффузионные члены, а объемная концентрация агрегатов H считается постоянной. Пределы допустимости этих упрощений требуют специального анализа (см. [5]); здесь они введены с целью рассмотреть собственно тиксотропные эффекты в чистом виде. Поэтому зависимость параметров α^+ от H не имеет значения.

3. Пусть жидкость, свойства которой описаны выше, движется по трубке радиуса R и длиной $l \gg R$ под действием градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -p_*[1 + qf(\omega t)], \quad |f| \leq 1$$

где p_* , q , ω — постоянные, f — непрерывная периодическая функция. Для малых значений параметра $\omega R^2 \rho / \eta_0$, где ρ — плотность, инерцией жидкости можно пренебречь, и в области, удаленной от концов трубки, положить (ср. с [7])

$$1 + qf(t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \eta = \eta(z) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\kappa^+ z^{1-\tau} I + \kappa^- z^{1-\tau} I \Phi(\gamma \eta I) [\psi(\gamma \eta I) - z] \chi(\psi - z)$$

$$I = \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|, \quad \kappa^\pm = \frac{\alpha^\pm u_*}{R \omega}, \quad \gamma = \frac{u_* \eta_*}{R \sigma} \quad (3.2)$$

Здесь u — скорость, а безразмерные переменные введены при помощи масштабов $1/\omega$, R , $u_* = p_* R^2 / \eta_*$, p_* , η_* для времени, координаты, скорости, давления и вязкости; η_* — вязкость полностью дезагрегированной ($z=1$) смеси. Требуется найти периодическое по t решение системы (3.1), (3.2), удовлетворяющее условиям прилипания и симметрии:

$$u(t, 1) = 0, \quad (\partial u / \partial r)_0 = 0.$$

С учетом этих условий из (3.1) находим последовательно

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r}{2\eta} P, \quad u = \frac{P}{2} \int_r^1 \frac{r dr}{\eta} \quad (3.3)$$

$$Q = \frac{P}{2} \int_0^1 \frac{r^3 dr}{\eta}, \quad \langle Q \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 \left\langle \frac{P}{\eta} \right\rangle dr, \quad P = 1 + qf$$

Здесь Q — безразмерный расход; масштабом для расхода является величина $\mu R^2 u_*$; угловые скобки обозначают осреднение за период. Величину $1/8 \langle Q \rangle$ будем называть эффективной вязкостью

$$\eta_e = \left[4 \int_0^1 r^3 \left\langle \frac{P}{\eta} \right\rangle dr \right]^{-1} \quad (3.4)$$

После подстановки $\partial u / \partial r$ из (3.3) в (3.2) получим для z уравнение, содержащее r в качестве параметра

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{r|P|}{2\eta(z)} \left\{ -\kappa^+ z^{1-\tau} + \kappa^- z^{1-\tau} \Phi \left(\frac{\gamma r}{2} |P| \right) \left[\psi \left(\frac{\gamma r}{2} |P| \right) - z \right] \chi(\psi - z) \right\} \quad (3.5)$$

В отдельных частных случаях решение (3.5) сводится к квадратуре, однако практического интереса эти случаи не представляют.

Уравнение (3.5) имеет тривиальное периодическое решение $z=0$ при

всех r, t . В окрестности $z=0$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = z^{1-\gamma} \eta^{-1}(z) A(t) \quad (3.6)$$

$$A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \kappa^{-r} |P| \Phi \psi, & \gamma^+ < \gamma^- \\ \frac{1}{2} \kappa^{-r} |P| \left(\Phi \psi - \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \right), & \gamma^+ = \gamma^- \end{cases}$$

Из (3.6) следует, что тривиальное решение может поддерживаться для всех t лишь при $\gamma^+ = \gamma^-$ и притом только в области значений r , определяемой условием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |P| \left(\Phi \psi - \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \right) dt = -\infty \quad (3.7)$$

Если же одно из этих требований нарушено, то состояние, соответствующее тривиальному решению, не может реализоваться как неустойчивое. Из (3.6) вытекает также, что нетривиальное решение (3.5) может достигнуть нуля за конечное время только тогда, когда сходится интеграл

$J = \int_0^z \eta(z) z^{\gamma-1} dz$. При расходимости этого интеграла нетривиальное решение всегда положительно, а периодическое решение (3.5) единственно в силу теоремы Осгуда. Сходимость J может нарушать единственность периодических решений, принимающих нулевые значения.

Таким образом, при $\gamma^- = \gamma^+$ в потоке существует постоянное квазитвердое ядро — область $r \leq r_{cm}$, где $z=0$ для всех t . Если интеграл J расходится, то z при $r > r_{cm}$ никогда не обращается в нуль, т. е. радиус r_c области с $z=0$ не зависит от времени и совпадает с r_{cm} . Если же $J < \infty$ и единственность решения не имеет места, то $z=0$ при $r=r_c(t)$, где r_c — периодическая функция времени, причем $r_{cm} = \min r_c$. В общем случае функция $r_c(t)$ ограничена сверху величиной r_{cm} , так что к стенке трубки примыкает область, в которой $z > 0$ почти для всех t .

Замечая, что при $r > r_{cm}$ либо $z > 0$, либо $J < \infty$, $z \geq 0$, можем разделить (3.5) на $z^{1-\gamma}/\eta(z)$ и проинтегрировать уравнение по периоду. Тогда получим

$$\kappa^+ \langle |P| \rangle = \kappa^- \left\langle |P| \Phi \left(\frac{\gamma r}{2} |P| \right) \left[\psi \left(\frac{\gamma r}{2} |P| \right) - z \right] \chi(\psi - z) \right\rangle$$

Отсюда, полагая $r \rightarrow r_{cm}$, $z \rightarrow 0$, получаем соотношение для вычисления r_{cm} . Например, в случае $\psi=1$, $\Phi(a) = a^k$ находим

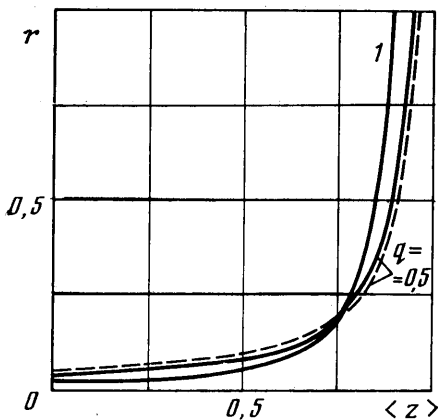
$$r_{cm} = \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\kappa^+}{\kappa^-} \right)^{1/k} \left[\frac{\langle |P| \rangle}{\langle |P| \rangle^{k+1}} \right]^{1/k} \quad (3.8)$$

К (3.8) можно прийти и из анализа соотношения (3.7). Равенство (3.8) может также служить для проверки численного счета.

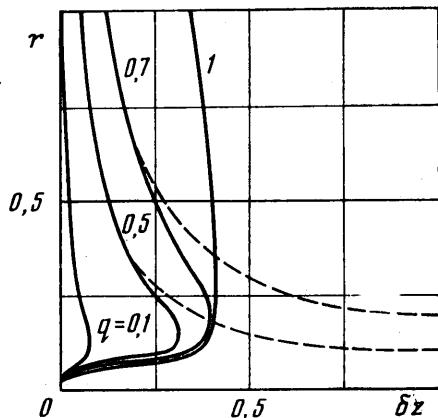
4. Численное исследование периодических решений уравнения (3.5) проводилось с использованием метода Кутты — Мерсона четвертого порядка с целью установления зависимости характеристик течения от следующих размерных параметров: частоты и амплитуды колебаний градиента давления, прочности агрегатов, характерной скорости сдвига, констант γ^\pm и показателя степени k в функции Φ .

Ниже в качестве примера приводятся некоторые результаты расчетов для случая $\gamma^\pm = 0$, когда, согласно п. 3, в потоке имеется область $r \leq r_c = \text{const}$, где $z=0$, а вне этой области $z > 0$.

Предполагалось, что распаду подвержены все неединичные агрегаты,



Фиг. 1



Фиг. 2

т. е. $\psi=1$ [8], и что в колебаниях градиента давления преобладает одна гармоника, т. е. $f=\sin t$. Значения параметров выбирались в соответствии с данными о свойствах крови [1]. Характерное значение вязкости принято равным 5 сП — кажущейся вязкости нормальной крови в вискозиметрических экспериментах [1], значения констант α^\pm оценивались приближенно по характерным временам распада агрегатов в полностью агрегированной крови и агрегации в полностью дезагрегированной крови ($\alpha^+=1$, $\alpha^-=0,12$); также полагалось $R=0,002$ см; $\eta(z)=10^{3(1-z)}$.

В каждом варианте расчета изменялся только один параметр. В основном варианте, с которым сравнивались остальные, принималось: $\omega=2\pi$ с $^{-1}$, $q=1$, $u_*=1,6$ см·с $^{-1}$, $\sigma=0,1$ дин·см $^{-2}$, $k=1$.

Как видно из фиг. 1, $\langle z \rangle$ как функция радиуса монотонно возрастает от нуля при $r=r_c$ до своего максимального значения на стенке. Зависимость же $\delta z = \Delta z / \langle z \rangle$ от r , где Δz — разность между максимальным и минимальным по времени значениями z , немонотонная: $\Delta z / \langle z \rangle \rightarrow 0$ при $r \rightarrow r_c$ и достигает максимального значения на небольшом расстоянии от оси (фиг. 2).

Интересно рассмотреть отличие полученного решения от квазистационарного (в смысле кинетики структурообразования) решения z_∞ . При $\gamma^\pm=0$, $q<1$

$$z_\infty = 1 - \left(\frac{2}{\gamma r} \right)^k \frac{\kappa^+}{\kappa^-} |P|^{-k}$$

В случае, когда $f=\sin t$, $k=1$, $2\kappa^+/\gamma(1-q)\kappa^- < 1$, имеем

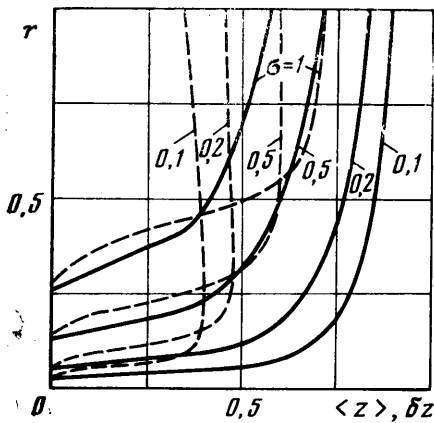
$$z_\infty = 1 - \frac{2}{\gamma r} \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \frac{1}{|P|}$$

$$\langle z_\infty \rangle = 1 - \frac{2}{\gamma r} \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad P=1+qf$$

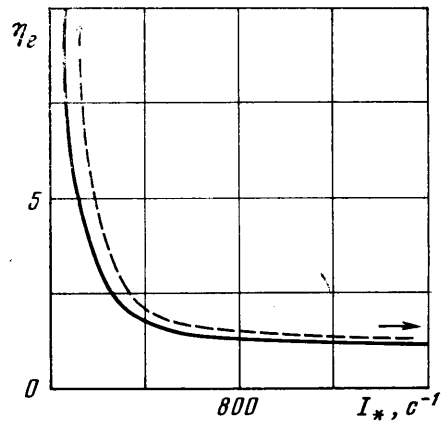
Квазистационарное решение наиболее заметно отличается от полученного численно при небольших r , когда все слагаемые в (3.5) сравнимы по величине. Эти отличия иллюстрируют профили на фиг. 1, 2 (штриховые линии). Видно также, что с ростом амплитуды q убывает размер квазитвердого ядра. Оно меньше, чем следует из квазистационарной теории. Наиболее чувствительна к q амплитуда колебаний z .

Сильное влияние на решение оказывает входящий в γ параметр σ — прочность агрегатов. При увеличении σ в 10 раз (от 0,1 до 1,0 дин/см 2) значение $\langle z_\infty \rangle$ на стенке уменьшается в 1,5 раза, а δz увеличивается примерно в 2 раза.

На фиг. 3 сплошная линия соответствует $\langle z_\infty \rangle$, штриховая — δz .



Фиг. 3



Фиг. 4

Толщина ядра возрастает прямо пропорционально σ , как и следовало ожидать (см. (3.8)). Средний расход, вычисляемый по (3.3), уменьшается с ростом σ , причем эффективная вязкость увеличивается примерно в 10 раз.

Уменьшение характерной скорости сдвига $I_* = u_*/R$ в 10 раз влечет за собой уменьшение $\langle z \rangle$ примерно в 1,8 раза. Эффективная безразмерная вязкость, а вместе с ней и сопротивление, резко падают с увеличением характерной скорости сдвига, как видно из фиг. 4. На том же графике штриховой линией отмечены значения эффективной вязкости $\eta_{e\infty}$, соответствующие стационарному течению с тем же средним градиентом давления. Видно, что оценка $\eta_e \approx \eta_{e\infty}$ становится крайне неточной при $I_* < 200 \text{ c}^{-1}$. Оно дает завышенные значения η_e , поскольку неявно предполагает возможность полного восстановления структуры за период колебаний. Существенным образом I_* влияет и на локальные значения отношения $\Delta\eta/\eta_{\max}$.

От частоты колебаний градиента давления ω , входящей в κ^\pm , средняя агрегация $\langle z \rangle$ зависит слабо; что касается отношения $\Delta z/\langle z \rangle$, то оно уменьшается с ростом ω ; особенно существенно различие вблизи ядра.

Степень агрегации z и отношение $\Delta z/\langle z \rangle$ существенно зависят от показателя k в функции Φ : $\langle z \rangle$ при $k=2$ больше, чем при $k=1$, примерно в 1,5–2 раза; эффективная вязкость при $k=2$ на порядок меньше, чем при $k=1$.

5. Из представленных выше результатов следует, что при определенных типах кинетики агрегации жидкость, проявляющая в стационарных течениях вязкопластические свойства, на самом деле не обладает предельным напряжением сдвига $\tau_0 = \text{const}$ в обычном смысле. Действительно, в вязкопластичной среде касательное напряжение $\tau_c = |\tau_{rz}|$ на границе ядра (при $r=r_c$) должно быть равно τ_0 , так что, согласно (3.1), $r_c(t)|1+qf| = \text{const}$. В тиксотропной жидкости с $\gamma^\pm=0$ рассмотренного класса, напротив, $r_c = \text{const}$ и потому $|\tau_c(r_c)|$ меняется во времени пропорционально $|P|$. При $\gamma^+ = \gamma^- \neq 0$, когда ядро может быть подвижным, величина $|\tau_c(r_c)|$ в общем случае также непостоянна. Сказанное верно для любых нестационарных или квазистационарных течений (не обязательно периодических).

Формулы, приведенные в п. 3, явно показывают, что величины z, η зависят от предистории изменений градиента давления, а не от его мгновенного значения, как было бы для нелинейно-вязкой жидкости. Поэтому для периодических течений связь между Q и $P=1+qf$ имеет гистерезисный характер. Аналогичный вывод для кузтовского течения был сделан в работе [4].

Заметим в заключение, что как общие рассуждения, так и примеры численных расчетов заставляют с осторожностью относиться к приводимым в литературе оценкам вклада неньютоновских свойств крови в расходные характеристики малых кровеносных сосудов и трубок визкозиметрических приборов. Эти оценки в большинстве своем основываются на предположениях о нелинейно-вязких свойствах крови и о том, что характер течения полностью определяется средним значением пристенной скорости сдвига $I_w = 6I_*$, которая для малых артериальных сосудов довольно велика. Однако более тщательный анализ показывает, что даже при самых больших ($\sim 10^3 \text{ c}^{-1}$) значениях I_w параметр I_* принадлежит области, где различия между

квазистационарной и нестационарной агрегацией следует принимать во внимание. Это безусловно справедливо для капиллярных вискозиметров с большой длиной рабочей части, но остается пока открытым вопрос о том, в какой мере данные соображения приложимы к тем сосудам, где пролетное время близко к периоду пульсаций и, следовательно, имеет место перестройка агрегационной структуры вдоль сосуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левтов В. А., Регурер С. А., Шадрина Н. Х.* Реология крови. М.: Медицина, 1982, 270 с.
2. *Goldsmith H. L., Spain S.* Margination of leukocytes in blood flow through small tubes.— *Microvasc. Res.*, 1984, v. 27, № 2, p. 204–222.
3. *Aroesty J., Gross J. F.* Pulsatile flow in small blood vessels. 1. Casson theory.— *Biorheology*, 1972, v. 9, № 1, p. 33–43.
4. *Шадрина Н. Х.* О сдвиговых течениях тиксотропной жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1978, № 3, с. 3–12.
5. *Регурер С. А., Шадрина Н. Х.* О моделях тиксотропных жидкостей.— *ПММ*, 1978, т. 42, № 5, с. 856–865.
6. *Gregory J.* Particle interactions in flowing suspensions.— *Adv. Colloid and Interface Sci.*, 1982, v. 17, p. 149–160.
7. *Мусеева И. Н.* Эффекты агрегации частиц в пульсирующем потоке суспензии.— В кн.: Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. по проблемам биомеханики, Рига, 1979, Т. 2, с. 17–19.
8. *Linnemans W. A. M., Wiersma P. N., Spies F., Elbers P. F.* A kinetics model for cell agglutination.— *Exp. Cell Res.*, 1976, v. 101, № 1, p. 184–190.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1985