

УДК 532.517:536.25

## КОНВЕКЦИЯ И ТЕПЛООБМЕН В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ИЗЛУЧЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ СТЕНОК

ВАРАПАЕВ В. Н.

Во многих работах (например, [1–5]) рассматриваются движение и теплообмен в замкнутых вертикальных полостях с заданными различными температурами боковых границ. В большинстве работ изучается случай конвекции, однако в последнее время появились работы (например, [4]), в которых учитывается совместный радиационно-конвективный теплообмен.

В данной работе изучается движение и теплообмен в прямоугольной полости, разделяющей две среды с заданными различными температурами. В отличие от [4] температура боковых границ определяется из условия взаимодействия с окружающей средой, а воздух в полости считается прозрачным для теплового излучения стенок. Рассматриваемая задача является математической моделью теплопередачи через окна и необходима для анализа способов улучшения теплозащиты зданий.

Рассматривается расположенный в поле силы тяжести плоский вертикальный слой высоты  $H$  и ширины  $h$ , разделяющий две среды с заданными температурами  $t_v$  и  $t_n$  ( $t_v > t_n$ ). Границами слоя являются вертикальные перегородки 1 и 2 и торцевые поверхности 3 и 4 (фиг. 1). Перепад температур  $t_v - t_n$  вызывает тепловой поток через слой, обусловленный конвекцией и теплопроводностью через воздушную прослойку и тепловым излучением между граничными поверхностями слоя. Для решения задачи используются следующие упрощения: перегородки 1 и 2 термически тонкие и распределение температур в них описывается одномерным уравнением теплопроводности (по  $y$ ); воздух в слое прозрачен для теплового излучения стенок; движение воздуха описывается системой уравнений Буссинеска; поверхности 1, 2, 3 и 4 серые неизотермические со степенью черноты  $\epsilon$ ; испускаемое и падающее излучение для каждого элемента поверхностей диффузное; вместо интегрального уравнения для плотности результирующего излучения замкнутой системы поверхностей 1–4 используется алгебраическое приближение [6]; тепловое взаимодействие перегородок 1 и 2 с окружающей средой характеризуется коэффициентами теплообмена  $\alpha_v$  и  $\alpha_n$ . Последнее предположение позволяет косвенно учесть влияние разнообразных аэродинамических и тепловых воздействий со стороны помещения и наружного воздуха на движение и теплообмен в воздушных прослойках окон.

При сделанных предположениях стационарная теплопередача через слой описывается системой уравнений Буссинеска в слое, одномерными уравнениями теплопроводности для вертикальных перегородок 1 и 2 и системой линейных уравнений для локальных плотностей результирующего теплового излучения

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + Gr \frac{\partial\theta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \theta_1}{dy^2} + M_v(1 - \theta_1) + M \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_1 - M q_{r1} = 0 \quad (4)$$

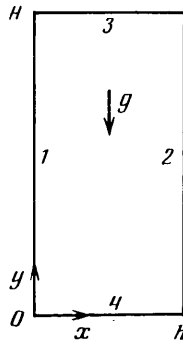
$$\frac{d^2 \theta_2}{dy^2} - M_n \theta_2 - M \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_2 - M q_{r2} = 0 \quad (5)$$

$$q_{rm} - \sum_{j=1}^N (1 - \varepsilon) q_{rj} \varphi_{mj} = \frac{\varepsilon c_0 h}{\lambda} \sum_{j=1}^N b_{mj} \varphi_{mj} (\theta_m - \theta_j) \quad (6)$$

$$\theta = \frac{t - t_n}{t_v - t_n}, \quad M_v = \frac{\alpha_v h^2}{\lambda_T \delta}, \quad M_n = \frac{\alpha_n h^2}{\lambda_T \delta}, \quad M = \frac{\lambda h}{\lambda_T \delta}$$

$$Gr = \frac{\beta g h^3 (t_v - t_n)}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad b_{mj} = 10^{-8} \frac{(T_m^4 - T_j^4)}{(T_m - T_j)}$$

Здесь все уравнения записаны в безразмерном виде, где в качестве масштабов длины, скорости, температуры и теплового потока приняты величины  $h$ ,  $\nu/h$ ,  $t_v - t_n$ ,  $\lambda(t_v - t_n)/h$  и введены следующие обозначения:  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  — проекции скорости на оси  $x$  и  $y$ , вихрь скорости, функция тока и температура;  $\theta_1(y)$ ,  $\theta_2(y)$  — распределение температуры вдоль перегородок 1 и 2;  $\lambda_T$ ,  $\lambda$  — коэффициенты теплопроводности перегородок и

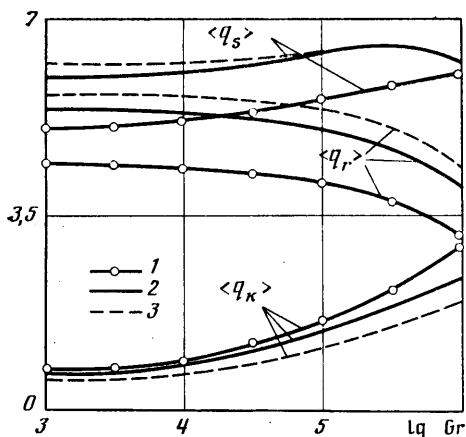


Фиг. 1

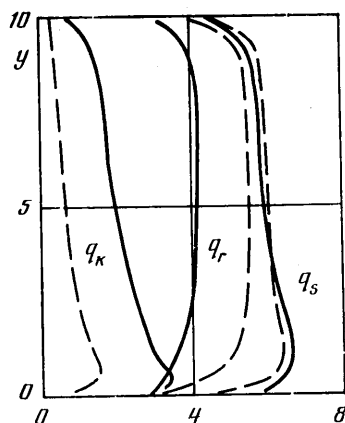
воздуха,  $\delta$  — ширина перегородок;  $Gr$  — число Грасгофа,  $Pr$  — число Прандтля,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$  — коэффициенты объемного расширения, вязкости и температуропроводности воздуха;  $q_{r1}(y)$ ,  $q_{r2}(y)$  — плотность результирующего теплового излучения поверхностей 1 и 2;  $q_{rm}$  — плотность результирующего теплового излучения  $m$ -го участка поверхности ( $m=1, 2, \dots, N$ ), где  $N$  — общее количество изотермических участков, на которые разбиваются неизотермические поверхности 1–4 в алгебраическом приближении учета излучения между ними;  $\varphi_{mj}$  — коэффициент облученности  $j$ -го участка со стороны  $m$ -го;  $c_0 = 10^8 \sigma$ , где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $b_{mj}$  — температурный фактор, где  $T_m$  — размерная абсолютная температура соответствующего участка поверхности.

В уравнениях (4), (5) все члены, кроме первого, являются источниками членами в одномерном уравнении теплопроводности. Например, для (4) физический смысл этих членов: подвод тепла к перегородке от окружающего пространства; передача тепла от перегородки к воздушной прослойке конвекцией и теплопроводностью; тепловое излучение от перегородки к другим граничным поверхностям.

Уравнения (1)–(6) образуют взаимосвязанную систему уравнений. Уравнения (4), (5) определяют граничные значения температур для



Фиг. 2



Фиг. 3

уравнения (2), а их решения в свою очередь зависят от тепловых потоков на границе, определяемых из (2). Система уравнений (6) описывает распределение плотности результирующего излучения на границах слоя и, в частности, величин  $q_{r1}(y)$ ,  $q_{r2}(y)$ , входящих в уравнения (4), (5), решения которых в свою очередь входят в правые части системы (6). Получаемая сопряженная задача решается численно. Граничные условия на твердых границах для  $\psi$  и  $\omega$  задаются обычным образом. На торцах 3 и 4 граничные условия для (2) задаются в виде

$$\theta(x, 0) = \theta_1(0) - [\theta_1(0) - \theta_2(0)]x, \quad \theta(x, a) = \theta_1(a) - [\theta_1(a) - \theta_2(a)]x \quad (7)$$

Здесь  $a = H/h$  — относительное удлинение слоя. Наряду с (7) в отдельных расчетах использовались и условия теплоизоляции торцов

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(x, a)}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

Для уравнений (4), (5) используются граничные условия

$$\theta_1'(0) = \theta_1'(a) = \theta_2'(0) = \theta_2'(a) = 0 \quad (9)$$

Уравнения (1)–(3) решаются гибридной конечно-разностной схемой, в которой в зависимости от локального сеточного числа Рейнольдса (или Пекле) вычисление конвективных членов проводится либо по схеме с центральными разностями, либо с помощью односторонней аппроксимации [7]. Для решения краевой задачи (4), (5), (9) используется схема второго порядка точности. Решение системы конечно-разностных уравнений для (1)–(5) и системы (6) включается в единый итерационный процесс, являющийся аналогом метода Зейделя. Похожие подходы использовались для задач смешанной конвекции в [8].

Легко показать, что скорость сходимости метода Зейделя для (6) значительно превосходит скорость сходимости итерационного процесса для (1)–(5) к стационарному решению. Это позволяет выполнять итерации для (6) значительно реже, чем для (1)–(5). Другим возможным подходом является использование обратной матрицы для (6), так как вычислять ее можно один раз и далее использовать для получения решения (6) при различных значениях температур в правой части системы, получающихся в процессе итераций.

Расчеты проводились на сетках  $28 \times 50$  и  $28 \times 100$  в зависимости от величин  $a$  и  $Gr$ . Сетка по  $y$  была постоянной, а по  $x$  — неравномерной, со сгущением около вертикальных границ. В качестве изотермических участков, на которые разбиваются поверхности 1–4 в системе (6), брались отрезки длины  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ , характеризующие размер сеточной области в слое.

Расчеты проводились в следующем диапазоне параметров, характерном для многих реальных ситуаций теплопередачи окон:  $1 \leq a \leq 25$ ;  $10^3 \leq Gr \leq 10^5$ ;  $1 \leq M_v \leq 9$ ;  $3 \leq M_n \leq 20$ ;  $0,1 \leq M \leq 0,5$ ;  $Pr = 0,71$ ;  $\epsilon = 0,93$ . Безразмерные параметры выбирались таким образом, что это соответствовало

случаю постоянного значения  $t_v=20$  С и различных значений  $t_n$  и  $h$  в диапазоне  $-30$  С  $\leq t_n \leq 20$  С;  $0,02$  м  $\leq h \leq 0,05$  м. В этом диапазоне температур величина  $b_{mj}$ , входящая в безразмерный комплекс  $P=\epsilon c_0 h b_{mj} / \lambda$ , с точностью до 1–2% аппроксимируется известным в теплофизике соотношением

$$b_{mj}=0,81+0,00445(t_m+t_j)$$

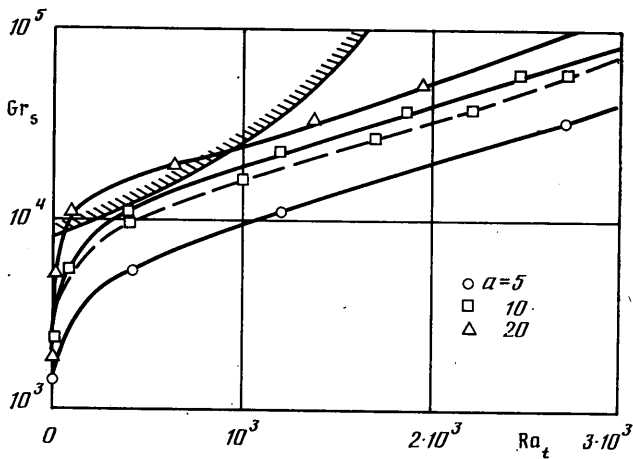
Для оценки влияния излучения проводились расчеты как с учетом теплового излучения стенок, так и при  $\epsilon=0$ , когда оно отсутствует и рассматривается конвекция в вертикальном слое с неизотермическими стенками.

Результаты расчетов показывают, что в рассмотренном диапазоне чисел Грасгофа ( $Gr \leq 10^6$ ) тепловое излучение границ при  $\epsilon=0,93$  всюду превосходит тепловой поток за счет конвекции, причем их отношение быстро растет при уменьшении числа Грасгофа. На фиг. 2 приведены зависимости безразмерных плотностей среднего теплового потока на границе 1 слоя от числа Грасгофа для различных значений относительного удлинения  $a=1, 5, 20$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Представлены как суммарные значения средней плотности теплового потока  $\langle q_s \rangle$ , так и его составляющие — плотность теплового потока за счет излучения стенок  $\langle q_r \rangle$  и за счет конвекции и теплопроводности  $\langle q_k \rangle$ . Приведенные на фиг. 2 результаты соответствуют случаю  $M_v=6,89$ ;  $M_n=18,4$ ;  $\epsilon=0,93$ ;  $M=0,368$ . Простые оценки показывают, что при увеличении числа Грасгофа свыше значения  $Gr=10^6$ , до которого проводились расчеты, начиная с некоторых значений числа Грасгофа конвективная составляющая  $\langle q_k \rangle$  станет больше радиационной составляющей  $\langle q_r \rangle$ , так как  $\langle q_r \rangle$  убывает с уменьшением величины  $t_n$ .

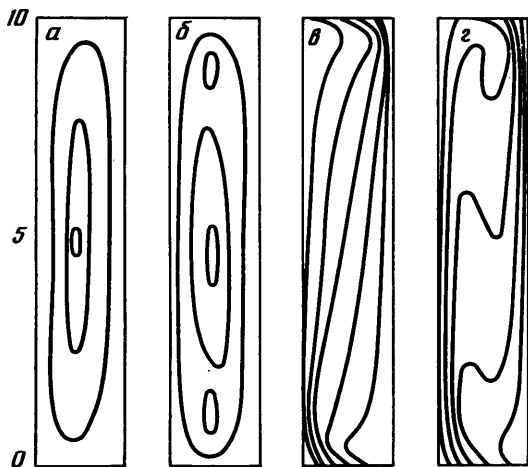
С целью проверки неаддитивности механизмов передачи тепла через слой за счет конвекции и излучения стенок были проведены расчеты как без конвекции, когда тепло через воздушную прослойку передавалось только за счет излучения стенок, так и без излучения ( $\epsilon=0$ ) при наличии только конвекции и теплопроводности. Сравнение этих результатов с результатами полной задачи при совместном действии конвекции и излучения показывает, что в последнем случае суммарный тепловой поток может быть на 20–30% меньше, чем сумма тепловых потоков при раздельном действии конвекции и излучения, что обусловлено нелинейностью полной задачи.

На фиг. 3 приведены безразмерные локальные тепловые потоки  $q_s$ ,  $q_r$ ,  $q_k$  на вертикальной перегородке 1 при  $a=10$  для двух значений числа Грасгофа:  $10^4$  (штрих) и  $1,09 \cdot 10^6$  (сплошная линия). Конвективная составляющая  $q_k$  качественно ведет себя так же, как в случае вертикального слоя с постоянными различными температурами боковых стенок. Интересно отметить, что на большей части перегородки ( $2 \leq y \leq 8$ ), исключая приторцевые области, величина  $q_r$  практически не изменяется. Это позволяет в воздушных прослойках большого удлинения использовать более простые способы учета излучения вертикальных неизотермических границ. Для оценки точности более простых моделей были проведены отдельные расчеты, в которых вместо решения системы (1.6) учет излучения проводился интегрально: поверхности 1–4 считались изотермическими, температура их полагалась равной средней температуре каждой из поверхностей. Тепловые потоки  $\langle q_{ri} \rangle$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) определялись из решения системы четырех уравнений типа (6) и использовались затем в (4), (5). Результаты показали, что при таком учете излучения значения  $\langle q_r \rangle$  оказываются завышенными на 10–15%, а значения  $\langle q_k \rangle$ , наоборот, заниженными.

Характерной особенностью рассматриваемых задач является неизотермичность границ слоя. Анализ величин  $\theta_1(y)$  и  $\theta_2(y)$  показывает, что всюду, кроме приторцевых областей, температура почти линейно растет



Фиг. 4



Фиг. 5

по высоте перегородок, причем градиент температуры растет с ростом числа Грасгофа. Перепады температур по высоте перегородки значительно больше в случае, когда излучение отсутствует, и могут достигать вдоль границы 1 до 30% от  $t_v - t_n$ . Учет излучения приводит к некоторому выравниванию температур на границе. При  $\epsilon = 0,93$  перепад температур на границе 1 в рассмотренном диапазоне параметров не превышает 12% от  $t_v - t_n$ .

Известно, что при конвекции в вертикальных слоях большого удлинения потеря устойчивости на границе встречных потоков приводит при  $a > 12,5$  и определенном числе Грасгофа к появлению многовихревой структуры вдоль оси слоя [3, 5]. Однако при дальнейшем увеличении числа Грасгофа растущий температурный градиент вдоль оси слоя приводит к стабилизации течения [9] и появлению одновихревой структуры. Для оценки этого эффекта в рассматриваемой задаче на фиг. 4 приведены зависимости числа Рэлея, построенного по вертикальному градиенту температуры в центре слоя  $Ra_t = \beta g h^4 (\partial t / \partial y) / (\nu \kappa)$  от числа Грасгофа  $Gr_s = \beta g h^3 (t_{s1} - t_{s2}) / \nu^2$ , построенного по средним температурам  $t_{s1}$  и  $t_{s2}$  границ 1 и 2. Сплошной чертой показаны результаты расчетов сопряженной задачи с учетом излучения стенок при  $a = 5; 10; 20$  (величины  $M, M_v, M_n$  такие же, как на фиг. 2), а штриховой — результаты для конвекции в слое с заданными температурами границ без учета излучения при  $a = 10$ . На

фиг. 4 по оси  $y$  взят логарифмический масштаб. Заштрихованная область на фиг. 4 — область неустойчивости, построенная по результатам [9]. Многовихревая структура не возникает при  $a=5$  и 10, но появляется при  $a=20$  в диапазоне  $8000 < Gr_s < 27\,000$ . Расчеты при  $a=15$  также показали наличие области неустойчивости, но в несколько меньшем диапазоне чисел  $Gr_s$ . Подчеркнем, что получаемый таким образом диапазон чисел  $Gr_s$  для существования многовихревых структур приближенный, так как основан на анализе устойчивости модельной задачи для бесконечного слоя с постоянным температурным градиентом по  $y$  [9]. Тем не менее прямые численные расчеты и экспериментальные данные, полученные многими авторами для конвекции в вертикальных слоях [3–5, 10] показывают, что качественные эффекты и отчасти количественные результаты предсказываются таким образом верно. Сравнение полученных результатов с данными для конвекции [3–5] показывает, что многовихревые структуры образуются примерно в том же диапазоне чисел  $Gr$  и  $a$ , если использовать при сравнении одинаковые величины  $Gr_s$ .

При достаточно больших числах Грасгофа ( $Gr > 6 \cdot 10^5$ ) течение в слое имеет ярко выраженный погранслоиный характер, а внутри слоя образуется сильно вытянутый центральный вихрь и два приторцевых вихря. Механизм образования такой структуры определяется влиянием торцов и не связан с потерей устойчивости, описанной выше, так как получаемые здесь значения величин  $Ra$ , значительно превосходят те их значения, при которых наступает полная стабилизация относительно возмущений на границе встречных потоков.

На фиг. 5 приведены линии тока ( $a, б$ ) и изотермы ( $в, г$ ) для  $Gr = 2 \cdot 10^4$  ( $a, в$ ) и  $Gr = 6,4 \cdot 10^5$  ( $б, г$ ) при  $a=10$  (остальные значения параметров такие же, как на фиг. 2). При дальнейшем увеличении числа Грасгофа при некоторых значениях параметров не удавалось получить полной сходимости итерационного процесса. По-видимому, при этих значениях параметров начинается нестационарный режим конвекции, вызываемый неустойчивостью волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое у вертикальных стенок. Аналогичные явления были описаны в [5] для конвекции в вертикальных слоях большого удлинения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полежаев В. И. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое.— Тепло- и массоперенос. Т. 1. М.: Энергия, 1968, с. 631.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5, с. 130–136.
3. Korpela S. A., Lee Y., Drummond J. E. Heat transfer through a double pane window.— Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1982, v. 104, № 3, p. 539–544.
4. Lauriat G. Combined radiation – convection in gray fluids enclosed in vertical cavities.— Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1982, v. 104, № 4, p. 609–615.
5. Грязнов В. Л. Исследование тепловой и термоконцентрационной конвекции при больших числах Рэлея: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т пробл. мех. АН СССР, 1984.
6. Sparrow E. M., Cess R. D. Radiation heat transfer. Belmont, Cal. Brooks Cole, 1966. 322 p. (Рус. перевод: Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 294 с.).
7. Spalding D. B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives.— Int. J. Numer. Meth. in Engineering, 1972, v. 4, № 4, p. 551–559.
8. Абрамов Н. Н., Варпаев В. Н., Перекальский В. М. Конвекция вязкого несжимаемого газа в прямоугольных областях, имеющих подводящие и отводящие каналы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 126–131.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
10. Vest C. M., Arpaci V. S. Stability of natural convection in a vertical slot.— J. Fluid Mech., 1969, v. 36, № 1, p. 1–15.

Москва

Поступила в редакцию  
25.VII.1985