

УДК 532.516.2

**ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ ЗАЗОРЕ
С ИНТЕНСИВНЫМ ВДУВОМ СО СТЕНОК**

НЕСТЕРОВ Г. Н., СПИРИДОНОВ Ф. Ф.

Автомодельные решения уравнений Навье – Стокса в зазорах с полностью проницаемыми границами при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, получены в [1, 2]. Известны также приближенные асимптотические решения уравнений Навье – Стокса для плоских и кольцевых зазоров в окрестности линии растекания потока [3, 4]. Рядом авторов [5–8] обнаружен и исследован эффект повышения устойчивости ламинарного режима течения в каналах рассматриваемого типа и существенного увеличения числа Рейнольдса перехода от ламинарного режима к турбулентному по сравнению с течением в трубе с непроницаемыми стенками.

В данной работе численно решена система уравнений Навье – Стокса для плоских или кольцевых зазоров с одной проницаемой границей в окрестности линии растекания потока на участке, где значения локального числа Рейнольдса заведомо не превосходят критических значений [5–8]. Получены обобщенные зависимости для коэффициентов трения и теплоотдачи на непроницаемой границе. Проведено сравнение полученных решений с точными решениями уравнений пограничного слоя.

1. Рассматривается стационарное течение вязкой жидкости в плоском или кольцевом канале, формирующееся вследствие вдува через одну из его стенок (например, через верхнюю стенку, фиг. 1). Течение описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{v}{y} &= 0 \\ \text{Re}_\Delta \left(w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + v \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \text{Re}_\Delta \left(w \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + v \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{v}{y^2} \\ \text{Re}_\Delta \left(w \frac{\partial \theta}{\partial z} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + v \frac{1}{y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \text{Re}_\Delta = \frac{\rho^\circ q_b^\circ \Delta^\circ}{\mu^\circ}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu^\circ c^\circ}{\lambda^\circ}, \quad \text{Pe}_\Delta = \text{Pr Re}_\Delta, \quad \theta &= \frac{T^\circ - T_w^\circ}{T_b^\circ - T_w^\circ} \end{aligned} \tag{1.1}$$

где координаты обезразмерены на Δ° (фиг. 1), компоненты вектора скорости w° и v° – на q_b° (скорость вдува), давление P° – на $\rho^\circ (q_b^\circ)^2$, индексы b и w относятся к проницаемой и непроницаемой границам соответственно, $v=0, 1$ соответствует плоскому и осесимметричному течению, индекс градус соответствует размерным величинам.

Плотность ρ° , а также коэффициенты вязкости μ° , теплопроводности λ° и теплоемкости c° считаются постоянными. Предполагается, что тепловыделение вследствие вязкой диссипации пренебрежимо мало.

Граничные условия заданы следующим образом (фиг. 1):

$$y=R_1: w=v=0, \quad \theta=0; \quad y=R_2: w=0, \quad v=-1, \quad \theta=1 \tag{1.2}$$

$$y=R_1: w=0, \quad v=1, \quad \theta=1; \quad y=R_2: w=v=0, \quad \theta=0 \tag{1.3}$$

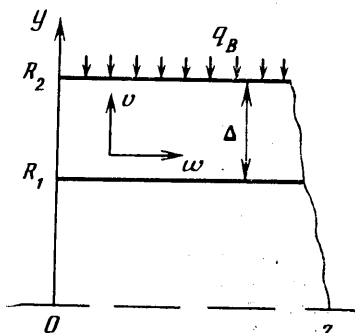
$$z=0: \quad w=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}=0 \quad (1.4)$$

Случаю, изображенному на фиг. 1, соответствуют граничные условия (1.2), (1.4), случаю вдува с нижней стенки — условия (1.3), (1.4).

На правой границе значения переменных находились экстраполяцией из потока по соотношениям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

2. Введением функции тока Ψ соотношениями $y^* w = \partial \Psi / \partial y$, $y^* v = -\partial \Psi / \partial z$ задача (1.1)–(1.4) сведена к соответствующей задаче в пере-



Фиг. 1

менных функция тока — завихренность и решалась известным методом [9] на существенно неравномерных сетках в широком диапазоне изменения параметра $\varepsilon = (R_2 - R_1) / R_2$. Сетки сгущались в окрестности непроницаемой границы таким образом, что в пограничном слое находилось 10–20 узлов. Вдоль координаты z шаг сетки был равномерным.

На фиг. 2 показаны характерные расчетные профили скорости и температуры в кольцевом зазоре со вдувом для граничных условий (1.2), (1.4) при $Pr=1$, $\varepsilon=0,125$. Кривые 1 и 2 — профили скорости при $Re_\Delta = 1000$, 100 соответственно. Штриховой линией показано решение (2.1) (см. ниже). Кривая 3 — профиль температуры при $Re_\Delta = 100$.

Точное решение уравнений Навье — Стокса для каналов с глухим торцом при числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, в случае условий (1.2), (1.4) [2]

$$v = \frac{R_1}{y} \sin \frac{\pi}{2} \sigma, \quad W = \frac{w}{w_m} = \cos \frac{\pi}{2} \sigma; \quad \sigma = \frac{R_2^2 - y^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (2.1)$$

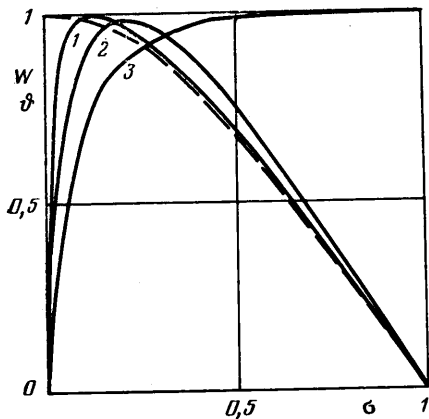
где w_m — максимальное значение осевой составляющей вектора скорости.

Анализ зависимостей, представленных на фиг. 2, показывает, что при больших числах Рейнольдса профиль скорости в ядре потока хорошо согласуется с профилем, описываемым решением (2.1).

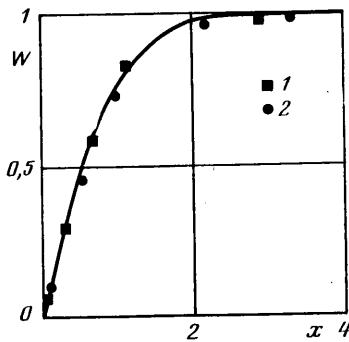
3. Поскольку при сильном вдуве ($Re_\Delta > 100$) профили близки к автомодельным и пограничный слой на непроницаемой стенке достаточно тонок, рассмотрим задачу о течении вблизи непроницаемой стенки зазора на основании анализа уравнений пограничного слоя.

Примем допущения, используемые обычно при выводе уравнений пограничного слоя [10], и введем новые переменные

$$f(\eta) = \frac{\Psi Re_\Delta^{0,5}}{w_m G}, \quad \eta = \frac{\xi Re_\Delta^{0,5}}{G}, \quad \theta(\eta) = \frac{T^\circ - T_w^\circ}{T_\infty^\circ - T_w^\circ} \quad (3.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где w_m , T_∞° — скорость и температура на внешней границе пограничного слоя соответственно, ξ — расстояние от непроницаемой стенки. Параметр G определим с помощью решения (2.1). Используя это решение, получаем

$$w_m = cz, \quad c = \frac{\pi R}{R_2^2 - R_1^2}, \quad G = \sqrt{\frac{R_2 + R_1}{\pi R}} \quad (3.2)$$

где $R=R_2$ или R_1 для (1.2) или (1.3) соответственно.

Система уравнений и граничных условий, описывающих течение в пограничном слое в переменных (3.1) при числе Прандтля равном единице, имеет вид

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0 \quad (3.3)$$

$$\theta'' + f\theta' = 0 \quad (3.4)$$

$$\eta=0: f=f'=0; \quad \eta \rightarrow \infty: f'=1 \quad (3.5)$$

$$\eta=0: \theta=0; \quad \eta \rightarrow \infty: \theta=1 \quad (3.6)$$

Задача (3.3)–(3.5) соответствует задаче о течении в окрестности критической точки на плоскости. Решение ее [10] показано сплошной линией на фиг. 3. Для сравнения здесь же приведены результаты численного решения задачи (1.1)–(1.2) при числах Рейнольдса $Re_\Delta=100$ (обозначение 1) и 400 (обозначение 2). Зависимость, определяющая координату x , имеет вид $x = \sqrt{w_m Re_\Delta / z \xi}$.

Решение уравнения температурного пограничного слоя для задачи (3.4), (3.6) имеет вид [6]

$$Nu_\Delta = K Re_\Delta^{0,5}; \quad Nu_\Delta = \frac{\alpha^\circ z^\circ}{\lambda^\circ}, \quad Re_\Delta = \frac{\rho^\circ w_m^\circ z^\circ}{\mu^\circ}, \quad K=0,57$$

Используя формулу (3.2), последнюю зависимость можно представить в виде

$$Nu_\Delta = 0,57 \left(\frac{\pi R Re_\Delta}{R_1 + R_2} \right)^{0,5}; \quad Nu_\Delta = \frac{\alpha^\circ \Delta^\circ}{\lambda^\circ} \quad (3.7)$$

В то же время в результате численного решения задачи (1.1)–(1.3) получена аппроксимирующая зависимость

$$Nu_\Delta = 0,880 Re_\Delta^{0,5} Pr^{0,7} \quad (\varepsilon=0,01-0,5)$$

Зависимость (3.7) дает, например, при $R=R_1=7$ $Nu_\Delta=0,690 Re_\Delta^{0,5}$.

При R_1 , стремящемся к бесконечности, коэффициент пропорциональности в (3.7) равен 0,714.

Представляет интерес рассмотрение зависимости между коэффициентами трения и теплоотдачи на непроницаемой стенке.

Используя решение [10] ($f''(0) = 1,233$) и [6], получим

$$St = \frac{KC_f}{2f''(0)} = 0,235C_f; \quad St = \frac{Nu_z}{Re_z} \quad (3.8)$$

где St — число Стантона, C_f — коэффициент трения. Выражение для аналогии Рейнольдса, полученное численно, имеет вид

$$St = 0,240Re_{\Delta}^{0,05} C_f \quad (3.9)$$

Зависимости (3.8) и (3.9) практически совпадают и отличаются от стандартной зависимости $St = 1/2 C_f$, справедливой для безградиентного обтекания пластин.

Таким образом, для рассматриваемой задачи (1.1)–(1.4) решения, полученные численным методом, близки к решениям уравнений градиентного пограничного слоя. Различие решений объясняется, очевидно, допущениями, принятыми при анализе уравнений пограничного слоя, а также погрешностями численного метода.

Отметим, что зависимость (3.8) справедлива как при $R=R_1$, так и при $R=R_2$, т. е. не меняется при изменении границы, через которую осуществляется вдув. В то же время зависимость для коэффициента теплоотдачи (3.7) не инвариантна относительно изменения R : при одном и том же значении Re_{Δ} коэффициент теплоотдачи выше в случае $R=R_2$, т. е. при вдуве с внешней границы зазора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berman A.* Laminar flow in an annulus with porous walls.— J. Appl. Phys., 1958, v. 29, № 1, p. 71–75.
2. *Terrill R. M.* Flow through a porous annulus.— Appl. Sci. Res., 1967, v. 17, № 3, p. 204–222.
3. *Данилин Г. А.* Асимптотическое решение уравнений Навье – Стокса для течения сжимаемой жидкости в плоском канале при интенсивном вдуве со стенок.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6, с. 76–82.
4. *Зинченко В. И., Федоров О. П.* Расчет течения в кольцевом канале при наличии интенсивного вдува со стенок.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 3, с. 135–139.
5. *Варапаев В. Н., Ягодкин В. И.* Об устойчивости течения в канале с проницаемыми стенками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5, с. 91–95.
6. *Варапаев В. Н., Ягодкин В. И.* Об устойчивости некоторых непараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в канале.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 4, с. 125–129.
7. *Свириденков А. А., Ягодкин В. И.* О течениях в начальных участках каналов с проницаемыми стенками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 43–48.
8. *Ерошенко В. М., Зайчик Л. И., Рабовский В. Б.* Расчет устойчивости течения в круглой трубе со вдувом.— ПМТФ, 1984, № 3, с. 82–86.
9. *Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К. и др.* Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972. 324 с.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Бийск

Поступила в редакцию
25.II.1985