

Критическая амплитуда волны $\Delta r/\lambda$, при которой ее рост прекращался и происходил нелинейный распад, для резонансов (1, 1, 5) и (1, 2, 9) равнялась $0,05 \pm 0,01$ (Δr — максимум смещения оси окрашенного столба, λ — длина волны).

В заключение отметим, что исследование влияния вязкости на время жизни генерируемой моды показало, что существует критическое число Рейнольдса Re_* , при превышении которого вязкость становится несущественной. В проведенных опытах $Re_* \approx 3 \cdot 10^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 304 с.
2. Брезовских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
3. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. О свойствах упругости закрученных потоков. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 3, с. 565—568.
4. Maxworthy T., Hopfinger E. J., Redekopp L. G. Wave motions on vortex cores. — J. Fluid Mech., 1985, v. 151, p. 141—165.
5. Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex. — Phil. Mag., 1980, v. 10, p. 155—168.
6. Poincare H. Sur la precession des corps deformables. — Bull. Astronomique, 1910, v. 27, p. 321—356.
7. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 1, с. 3—50.
8. Fultz D. A note on overstability and the elastoid-inertia oscillations of Kelvin, Solberg and Bjerknæs. — J. Meteorol. 1959, v. 16, № 2, p. 199—208.
9. McEwan A. D. A laboratory demonstration of angular momentum mixing. — Geophys. Fluid Dyn., 1973, v. 5, № 3, p. 283—311.
10. McEwan A. D. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. — J. Fluid Mech., 1970, v. 40, № 3, p. 603—640.
11. McEwan A. D., Thompson R. O. R. Y., Plumb R. A. Mean flows driven by weak eddies in rotating systems. — J. Fluid Mech., 1980, v. 99, № 3, p. 655—672.
12. Chow C.-Y. Swirling flow in tubes of non-uniform cross-sections. — J. Fluid Mech., 1969, v. 38, № 4, p. 843—854.

Новосибирск

Поступила в редакцию
29.1.1986

УДК 533.6.011.8

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

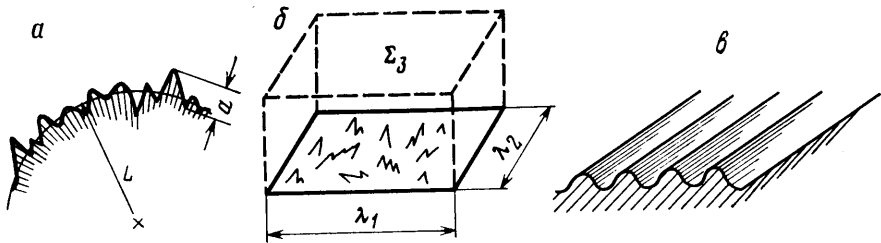
ВОЛКОВ И. В., ФРИДЛЕНДЕР О. Г.

Исследуется явление газодинамического скольжения при течении одноатомного слабо разреженного газа около шероховатой поверхности. Предполагается, что характерные размеры шероховатости сравнимы с длиной свободного пробега молекулы. Указывается, что при наличии анизотропии формы поверхности связь между скоростью скольжения и вектором напряжения трения приобретает тензорный характер. При этом почти для любой ориентации газодинамического течения имеет место эффект, названный поперечным скольжением. Доказывается симметрия матрицы коэффициентов скольжения при достаточно общих предположениях о типе шероховатости, законе отражения молекул от поверхности и законе их взаимодействия друг с другом. Вариационным методом рассчитываются компоненты матрицы коэффициентов скольжения для модели шероховатости типа бороздок.

1. При движении вязкого газа около твердой непроницаемой поверхности ($u_n=0$) обычно используется условие прилипания: $u_\tau=0$. Однако еще Максвелл на основе элементарной кинетической теории показал, что касательная составляющая скорости у поверхности не равна нулю, а пропорциональна l ($\partial u_\tau / \partial n$), где l — длина свободного пробега молекулы, n — нормаль к поверхности. Позднее была развита асимптотическая теория газодинамических граничных условий. Было показано, что для получения решений уравнений Навье — Стокса, отличающихся от точных решений уравнения Больцмана при числе Кнудсена (Kn), стремящемся к нулю, лишь на малую величину $O(Kn^2)$, необходимо ставить граничные условия скольжения [1, 2]

$$u_\tau = l\alpha_* \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \alpha p_{n\tau}, \quad \alpha_* \sim 1 \quad (1.1)$$

Для того чтобы определить числовое значение коэффициента скольжения α_* (или α), необходимо рассмотреть течение в тонком слое газа у поверхности тела, на-



Фиг. 1

зывается слоем Кнудсена, характерная толщина которого порядка l . Здесь существуют возмущения функции распределения, возникающие при столкновении молекул газа с поверхностью. В слое Кнудсена неприменимы подходы Гильберта или Чепмена — Энскога и замкнутое описание возможно лишь на кинетическом уровне.

К настоящему времени получена обширная информация о числовых значениях коэффициента скольжения для различных законов взаимодействия молекул с поверхностью и между собой. Однако во всех работах рассматривалось только движение газа около гладких поверхностей с изотропными законами отражения, когда линейризация приводит к одномерной задаче у плоской стенки. Именно при этих предположениях существует скалярная связь (1.1) между вектором скорости скольжения u_i и вектором вязких касательных напряжений p_{nj} .

Здесь будет рассмотрено течение одноатомного газа около шероховатой поверхности, когда характерные размеры шероховатости сравнимы с длиной свободного пробега (Фиг. 1, а). В этом случае движение в кнудсеновском слое становится трехмерным и при наличии анизотропии условие скольжения имеет вид

$$u_{\tau i} = l \alpha_{*ij} \frac{\partial u_{\tau j}}{\partial n} = \alpha_{ij} p_{nj}, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.2)$$

где α_{*ij} (или α_{ij}) — матрица коэффициентов скольжения. Тензорный характер связи вектора скорости скольжения и вектора напряжения трения означает, что кроме обычного (продольного) может возникнуть и скольжение в направлении, перпендикулярном плоскости основного сдвигового потока. Назовем этот эффект поперечным скольжением.

2. Аналогично оценкам, приведенным в [1], можно показать, что в главном приближении течение в слое Кнудсена описывается линейризованным уравнением Больцмана

$$\xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = L(\varphi), \quad f = f_{00}(1 + \varphi), \quad f_{00} = \frac{n_0}{(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp(-\xi^2/2RT_0) \quad (2.1)$$

где $T_0 = \text{const}$ — температура поверхности, а L — линейризованный интеграл столкновений, удовлетворяющий соотношению симметрии

$$\int f_{00} \psi L(\chi) d\xi = \int f_{00} \chi L(\psi) d\xi \quad (2.2)$$

Граничное условие рассеяния для функции $\varphi(\xi_i, x_i)$ в этом приближении ставится на шероховатой поверхности (средний уровень этой поверхности можно считать плоскостью, Фиг. 1, б)

$$H_- \left[f_{00} \varphi(\xi \mathbf{n}) + \int H_+' f_{00}' \varphi'(\xi' \mathbf{n}) R(\xi' \rightarrow \xi) d\xi' \right] = 0 \quad (2.3)$$

$$H_{\pm} \equiv H_{\pm}(\xi \mathbf{n}), \quad H_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$H_{\pm}' \equiv H_{\pm}(\xi' \mathbf{n}), \quad H_+(-x) = H_-(x), \quad H_+(x) + H_-(x) = 1$$

Здесь \mathbf{n} — местная нормаль к профилю шероховатой поверхности, внешняя по отношению к области, занятой газом. Ядро рассеяния $R(\xi' \rightarrow \xi)$ удовлетворяет условию взаимности (детального баланса) [2, 3]

$$H_- H_+' [(\xi' \mathbf{n}) f_{00}' R(\xi' \rightarrow \xi) + (\xi \mathbf{n}) f_{00} R(-\xi \rightarrow -\xi')] = 0 \quad (2.4)$$

На внешней границе кнудсеновского слоя функция φ должна переходить в функцию распределения, соответствующую течению вязкого теплопроводного газа.

3. Вследствие предполагаемой неізотропности поверхности матрица коэффициентов скольжения не будет пропорциональна единичному тензору δ_{ij} . Докажем, что матрица α_{ij} симметрична, опираясь на свойства симметрии (2.2), (2.4), поскольку прямая ссылка на принцип Онсагера [4] в этом случае неосновательна — справедливость последнего установлена лишь в термодинамическом пределе. При доказательстве воспользуемся теоремой Грина [2] для двух решений φ_1, φ_2 стационарного линейризованного уравнения Больцмана (2.1), удовлетворяющих граничному условию (2.3) на поверхности твердого тела и, быть может, разным условиям на бесконечности. Введем наряду с функциями $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$ функцию $\varphi_2(-\xi) = \varphi_2(\xi)$. Тогда, поскольку $L(-\xi, \varphi(-\xi)) = L(\xi, \varphi(\xi))$, функция φ_2 удовлетворяет сопряженному уравнению Больцмана и сопряженному граничному условию

$$\xi_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = -L(\varphi_2) \quad (3.1)$$

$$H_+ \left[f_{00} \varphi_2(\xi \mathbf{n}) + \int H_- f_{00}' \varphi_2'(\xi' \mathbf{n}) R(-\xi' \rightarrow -\xi) d\xi' \right] = 0 \quad (3.2)$$

Умножая уравнение (2.1) на φ_2 , а уравнение (3.1) на φ_1 , складывая и интегрируя их по ξ с весом f_{00} , получим в силу (2.2) и результатов [3, 5]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \xi_i f_{00} \varphi_1 \varphi_2 d\xi = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \xi_i f_{00} \varphi_1(\xi) \varphi_2(-\xi) d\xi = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим замкнутую геометрическую поверхность $S = S_g + S_w$, частично совпадающую с поверхностью твердого тела (S_w), а частично проходящую в газе (S_g). Проинтегрировав (3.3) по объему газа, заключенному внутри поверхности S , получим

$$\begin{aligned} & \int_{S_g + S_w} dx_S \int (\xi \mathbf{n}) f_{00} \varphi_1 \varphi_2 (H_+ + H_-) d\xi = \\ & = \int_{S_g} \dots + \int_{S_w} dx_w \int \{ [(\xi \mathbf{n}) f_{00} \varphi_1(\xi) H_-] \varphi_2(\xi) + [(\xi \mathbf{n}) f_{00} \varphi_2(\xi) H_+] \varphi_1(\xi) \} d\xi = 0 \end{aligned}$$

Это соотношение преобразуем с учетом граничных условий (2.3), (3.2)

$$\begin{aligned} & \int_{S_g} \dots - \int_{S_w} dx_w \iint H_- H_+'(\xi' \mathbf{n}) f_{00}' R(\xi' \rightarrow \xi) \varphi_1' \varphi_2 d\xi d\xi' - \\ & - \int_{S_w} dx_w \iint H_+ H_-'(\xi' \mathbf{n}) f_{00}' R(-\xi' \rightarrow \xi) \varphi_2' \varphi_1 d\xi d\xi' = 0 \end{aligned}$$

Меняя местами в последнем интеграле переменные, получим

$$\int_{S_g} \dots - \int_{S_w} dx_w \iint H_- H_+' \varphi_1' \varphi_2 [(\xi' \mathbf{n}) f_{00}' R(\xi' \rightarrow \xi) + (\xi \mathbf{n}) f_{00} R(-\xi \rightarrow -\xi')] d\xi d\xi' = 0$$

Отсюда вследствие соотношения взаимности (2.4) имеем

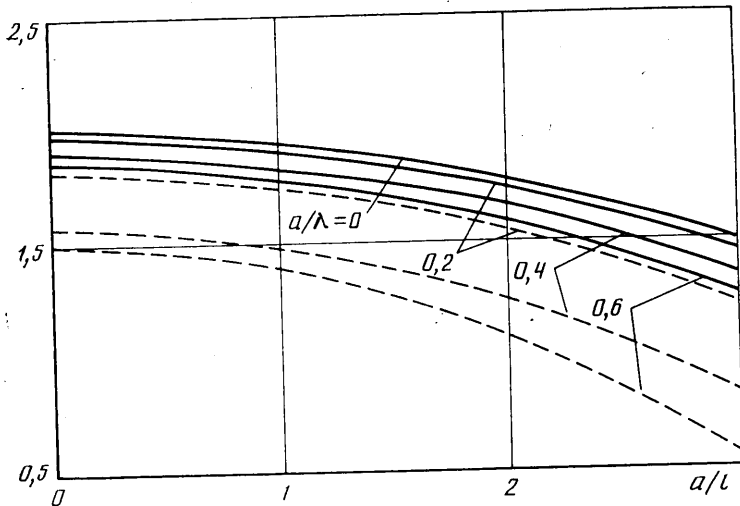
$$\int_{S_g} dx_S \int (\xi \mathbf{n}) f_{00} \varphi_1(\xi) \varphi_2(-\xi) d\xi = 0 \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) позволяет доказать симметрию матрицы α_{ij} . Чтобы не усложнять задачу вопросом усреднения условий скольжения по различным участкам шероховатой поверхности, наложим условие периодичности на ее форму. Пусть λ_1, λ_2 — периоды по осям e_1, e_2 (фиг. 1, б).

Потребуем, чтобы при удалении от поверхности напряжения в двух течениях, описываемых функциями распределения φ_1, φ_2 , стремились соответственно к p_{n1}, p_{n2} . При этом, так как поверхность не предполагается изотропной, в каждом из этих течений помимо продольных скоростей скольжения $u_{11} = \alpha_{11} p_{n1}$ и $u_{22} = \alpha_{22} p_{n2}$ возникнут, вообще говоря, поперечные скорости скольжения $u_{21} = \alpha_{21} p_{n1}$ и $u_{12} = \alpha_{12} p_{n2}$.

Для доказательства соотношения симметрии $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ рассмотрим поверхность S_R , состоящую из четырех фиксированных боковых граней, отстоящих друг от друга на расстоянии λ_1, λ_2 , и верхнего торца Σ_3 , удаляемого на бесконечность. Вследствие дополнительного предположения о периодичности шероховатой поверхности интеграл по боковым граням (фиг. 1, б) в равенстве (3.4) обратится в нуль. Таким образом

$$\int_{\Sigma_3} \int f_{00} \xi_S \varphi_1(\xi) \varphi_2(-\xi) d\xi = 0$$



Фиг. 2

Поскольку $x_{3z} \rightarrow \infty$, то, учитывая асимптотический (гильбертов) вид функций Φ_1, Φ_2 в гидродинамической области течения [2], получим

$$\Phi_1 \sim \left\{ \xi_1 u_{11} + \xi_2 u_{21} - \frac{1}{\mu} p_{n1} [x_3 \xi_1 - \xi_1 \xi_2 A(|\xi|)] + o(x_3^{-1}) \right\} (RT_0)^{-1}$$

$$\Phi_2 \sim \left\{ \xi_1 u_{12} + \xi_2 u_{22} - \frac{1}{\mu} p_{n2} [x_3 \xi_2 - \xi_2 \xi_3 A(|\xi|)] + o(x_3^{-1}) \right\} (RT_0)^{-1}$$

$$\int_{\Sigma_3} \frac{a}{\mu} (u_{21} p_{n2} - u_{12} p_{n1}) dx_z = \frac{a}{\mu} (u_{21} p_{n2} - u_{12} p_{n1}) \Sigma_3 = 0$$

Здесь μ — коэффициент вязкости, A — известная функция модуля скорости, появляющаяся в методе Чепмена — Энскога; a — константа.

Таким образом доказано соотношение взаимности

$$u_{21} p_{2n} = u_{12} p_{1n}$$

откуда непосредственно имеем соотношение симметрии

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \quad (3.5)$$

Укажем некоторые следствия симметрии коэффициентов α_{ij} . Из симметрии матрицы коэффициентов скольжения следует, что существуют по крайней мере два направления (если только два, то взаимно ортогональных), таких, что при действии напряжения трения вдоль них поперечного скольжения не возникает. В системе координат, связанной с этими направлениями, матрица α_{ij} диагональна. Если диагональные элементы равны, то это означает, что при течении около такой поверхности поперечного скольжения не возникает ни при какой ориентации вектора $p_{n\tau}$.

4. Для примера были вычислены коэффициенты скольжения около поверхности, шероховатость которой задавалась бороздками синусоидального профиля (фиг. 1, в). В этом случае направления, вдоль которых не возникает поперечного скольжения, очевидны в силу симметрии — вдоль и поперек бороздок.

Влияние кнудсеновского слоя определяется отношением амплитуды шероховатости a к средней длине свободного пробега l . Характерный угол наклона поверхности бороздок задается отношением амплитуды к периоду λ . Форма поверхности задана в виде $y = a/\pi \sin(2\pi x/\lambda)$.

Задача решалась приближенно вариационным методом [2, 6] при диффузном законе отражения молекул от поверхности. Пробная функция задавалась в виде, соответствующем движению вязкого газа как сплошной среды.

Результаты расчетов приведены на фиг. 2, где построены графики зависимостей коэффициентов скольжения при продольном обтекании бороздок $\alpha_{11}/\rho(2R)^{1/2}$ (сплошные линии) и при поперечном обтекании $\alpha_{22}/\rho(2RT)^{1/2}$ (штриховые линии) от отношений a/l и a/λ . Коэффициенты скольжения уменьшаются при возрастании a/l , так как при $a/l \rightarrow \infty$ течение становится полностью гидродинамическим и при этом коэффициенты скольжения вдоль средней поверхности должны быть отрицательными. То, что $\alpha_{11} > \alpha_{22}$, означает, что сопротивление движению газа вдоль бороздок меньше,

чем поперек. Значения α_{11} и α_{22} при $a/\lambda \rightarrow 0$, $a/l \rightarrow 0$ стремятся к обычному скалярному коэффициенту скольжения.

На вопрос о влиянии шероховатости поверхности на характеристики течения газа в кнудсеновском слое несколько лет назад указал одному из авторов М. Н. Коган. Приносим ему искреннюю благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.-Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
4. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 456 с.
5. Waldmann L. Reciprocity and boundary conditions for transport-relaxation equations. — Z. Naturforsch., 1976, В. 31a, № 12, p. 1439–1450.
6. Фридлиндер О. Г. Вариационный метод в динамике разреженного газа. — Тр. ЦАГИ, 1981, вып. 2111, с. 63–77.

Москва

Поступила в редакцию
5.II.1985

УДК 533.6.07.11

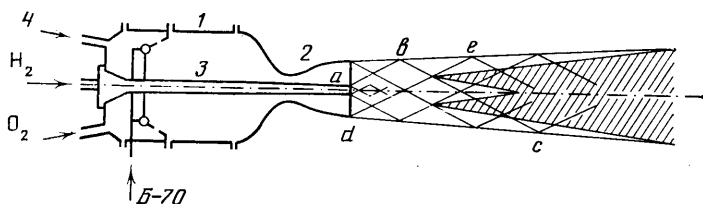
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ КОАКСИАЛЬНЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ РЕАГИРУЮЩИХ СТРУЙ

БАРАНОВСКИЙ С. И., ЛЕВИН В. М., ТУРИЦЕВ А. И.

При сверхзвуковом истечении коаксиальных струй центральная струя, как правило, даже в расчетном режиме не бывает изобарической, а при изменении режима работы установки степень нерасчетности может значительно отличаться от единицы. Структура такого течения, особенно в случае, когда одна из струй представляет собой поток газообразного топлива, изучена недостаточно. Это объясняется в первую очередь серьезными трудностями при измерении параметров в сверхзвуковой высокотемпературной среде. Поэтому практически отсутствует информация о распределении статического давления в поле течения, а имеющиеся результаты измерения полного давления [1, 2] оказываются явно недостаточными для выявления структуры течения, а тем более для сравнения с результатами численных расчетов [1].

Настоящая работа, являющаяся продолжением экспериментальной программы исследования изобарических коаксиальных струй [2], в первую очередь была направлена на уточнение деталей структуры течения главным образом с помощью измерения статического давления в поле течения струи с ее одновременной визуализацией. Показано, что характер осевого распределения статического давления и задержка воспламенения определяются характеристиками внешней струи и практически не зависят от степени нерасчетности внутреннего сопла и расхода топлива через него. Самовоспламенение топлива центральной струи происходит в зоне, где не только состав, но и температура достигают значений, соответствующих пределам воспламенения.

1. Экспериментальная установка для исследования коаксиальных струй (фиг. 1) состоит из огневого подогревателя воздуха 1 и сверхзвукового сопла 2, соосно которому установлено центральное тело 3. Центральное тело заканчивается сверхзвуковым соплом $M_1=1,47$. Число Маха внешнего сопла с учетом центрального тела $M_2=2,52$. Диаметр внутреннего сопла $d_1=11,6$ мм, внешнего $d_2=70$ мм, толщина кромки внутреннего сопла 0,2 мм. Неравномерность поля скорости на срезе внешнего сопла не превышало 3%, толщина погранслоя: с внешней стороны 4,5 мм, со стороны центрального тела 4 мм, у центральной струи 0,9 мм. Через центральное тело подавался водород с температурой $T_1^*=273$ К, через внешнее сопло — продукты сгорания бен-



Фиг. 1