УДК 532.59

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ВЕТРОВОЛНОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ШЕЛЬФЕ

ДАВЫДОВ Л. М.

Для прогноза распространения примеси, качества воды на шельфе необходимо знать динамику водных масс и водообмен. Но гидродинамика шельфовой зоны и открытой части морей и озер существенно различаются из-за большой крутизны дна, сложного строения береговой линии, большой ролью ветровых волн, их обрушения [1]. В [2, 3] была показана важная роль, которую играют поверхностные волны и их обрушение для околобереговых течений и дан вывод осредненных по глубине уравнений гидродинамики. Для областей шельфа, отдаленных от береговой линии, также необходимо учитывать взаимодействие волн с дном и течениями, которые будут существенно трехмерными.

В настоящей работе дан вывод уравнений гидродинамики для осредненных по периоду волны ветроволновых течений в трехмерной постановке.

Рассмотрим ветроволновое турбулентное течение на шельфе. В дальнейшем пренебрежем взаимодействием поверхностных волн с турбулентностью и в целях упрощения рассмотрим волны с длиной волны λ, частотой n, волновым числом $k=2\pi/\lambda$, амплитудой a. В реальном случае имеет место спектр волн, но ввиду наличия резкого максимума в спектре ветровых волн можно выделить волну, имеющую характерную длину λ.

Так как свободная поверхность и дно морей и озер имеют сложную пространственную структуру и переменны во времени, целесообразно перейти к безразмерной по вертикали координате $x_4=(x_3-x_{3b})/h$, так что на поверхности $x_4=1$, на дне $x_4=0$.

Система уравнений гидродинамики для потока со свободной поверхностью в системе координат t, x_1, x_2, x_4 имеет вид

$$\frac{\partial hu_i}{\partial t}+\frac{\partial hu_iu_j}{\partial x_j}=-gh\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}-\frac{h}{\rho}\frac{\partial p_н}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_н}{\partial x_4}\left(\frac{\partial x_{3b}}{\partial x_i}+x_4\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x_4}\left(K\frac{\partial u_i}{\partial x_4}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu_j}{\partial x_j}=0,\qquad u_4=\frac{dx_4}{dt}=\frac{\partial x_4}{\partial t}+u_i\frac{\partial x_4}{\partial x_i}$$

где $i=1,\ 2$; $j=1,\ 2,\ 4$; $p_н$ – негидростатическая часть давления, h, ζ, x_{3b} – глубина, отметки свободной поверхности и дна, x_j, u_j – ортогональная система координат и скорости, x_3 – вертикальная координата, p – давление, K – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости, $u_4=0$ на поверхности и дне.

При замене переменных в вязком члене учтена только его главная часть.

Можно предположить, что основной вклад в негидростатическую часть давления вносят волны и вкладом крупномасштабных течений в $p_н$ можно пренебречь.

Представим скорость u_i в виде суммы среднего за период волны значения U_i и волновых возмущений первого u_i' и второго u_i'' порядков относительно крутизны волны ak. Аналогично можно представить и другие гидродинамические параметры.

Волновые решения возьмем из потенциальной теории волн на воде. Учитывая, что для произвольной функции $f(x_3)$ имеет место следующее соотношение:

$$f(x_3)=f(x_4H)+\frac{x_4h'}{H}\frac{\partial f(x_4H)}{\partial x_4}+\ldots$$

будем иметь

$$\zeta'=a\cos\chi,\quad \langle\zeta''\rangle=0$$

$$u_i'=\frac{k_i}{k}\frac{na\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{sh}\psi}\cos\chi,\qquad \langle u_i''\rangle=\frac{k_ina^2x_4\operatorname{sh}\varphi}{2\operatorname{sh}\psi} \tag{2}$$

$$u_3'=\frac{na\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\psi}\sin\chi,\qquad \langle u_3''\rangle=0$$

$$p_н'=\frac{\rho ga\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\psi}\cos\chi,\qquad \langle p_н''\rangle=\frac{\rho n^2a^2\operatorname{sh}\varphi}{2\operatorname{sh}\psi}\left(x_4-\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\psi}\right)$$

где k_i – компоненты волнового вектора, $\chi=k_ix_i-nt$, $H=\langle h\rangle$, $\varphi=kHx_4$, $\psi=kH$, $\langle\ \rangle$ означают осреднение за период волны.

Для волновых решений u_4', $\langle u_4''\rangle$ из определения u_4 имеем

$$Hu_4'=an\left(\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\psi}+x_4\right)\sin\chi,\qquad \langle u_4''\rangle=0 \tag{3}$$

С точностью до малых второго порядка относительно крутизны волны

$$\langle hu_j\rangle=HU_j+H\langle u_j''\rangle+\langle h'u_j'\rangle$$

$$\langle hu_iu_j\rangle=HU_iU_j+H(U_i\langle u_j''\rangle+\langle u_i'u_j'\rangle+U_j\langle u_i''\rangle)+U_j\langle u_i'h'\rangle+U_i\langle u_j'h'\rangle \tag{4}$$

$$\langle hu_iu_j\rangle=HU_i^\circ U_j^\circ+H\langle u_i'u_j'\rangle,\quad U_i^\circ=\langle hu_i\rangle/H$$

Аналогично можно получить

$$\left\langle h\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\right\rangle=H\frac{\partial\langle\zeta\rangle}{\partial x_i}+\left\langle h'\frac{\partial h'}{\partial x_i}\right\rangle,\qquad \left\langle h\frac{\partial p_\text{н}}{\partial x_i}\right\rangle=H\frac{\partial\langle p_\text{н}\rangle}{\partial x_i}+\left\langle h'\frac{\partial p_\text{н}'}{\partial x_i}\right\rangle$$

$$\left\langle\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial p_\text{н}}{\partial x_4}\right\rangle=\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial\langle p_\text{н}''\rangle}{\partial x_4}+\left\langle\frac{\partial h'}{\partial x_i}\frac{\partial p_\text{н}'}{\partial x_4}\right\rangle,\quad \left\langle\frac{\partial x_{3b}}{\partial x_i}-\frac{\partial p_\text{н}}{\partial x_4}\right\rangle=\frac{\partial x_{3b}}{\partial x_i}\frac{\partial\langle p_\text{н}''\rangle}{\partial x_4} \tag{5}$$

Осредняя систему (1) по периоду волны и используя соотношения (2)–(5), получим систему уравнений движения и неразрывности для ветроволновых течений

$$\frac{\partial HU_i^\circ}{\partial t}+\frac{\partial HU_i^\circ U_j^\circ}{\partial x_j}+gH\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x_4}\left(K\frac{\partial U_i^\circ}{\partial x_4}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{k_ik_mEH\operatorname{ch}^2\varphi}{k\operatorname{sh}\psi\operatorname{ch}\psi}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[E\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\operatorname{ch}\psi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_4}-\frac{\psi\operatorname{sh}^2\varphi}{\operatorname{sh}\psi}\right)\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\operatorname{ch}\psi}\left[Ek\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_4R}{\partial x_4}+\frac{\partial x_{3g}}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_4}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_4}\frac{\partial E}{\partial x_i}\right] \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial HU_j^\circ}{\partial x_j}=0,\qquad R=\operatorname{sh}\varphi\left(x_4-\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{sh}\psi}\right) \tag{7}$$

где $m=1$, 2; $\theta(x_4)=x_4\operatorname{ch}\varphi$ для $0\leqslant x_4\leqslant 1-\varepsilon$ в области $1-\varepsilon<x_4\leqslant 1$ монотонно уменьшается от $\theta(1-\varepsilon)$ до нуля, ε – малая величина порядка a/H, $E={}^1/_2ga^2$ – энергия волн. Такое определение θ связано с тем, что в потенциальной теории волн на воде граничное условие ставится не на самой свободной поверхности.

Правая часть уравнения движения (6) представляет собой волновые напряжения. При интегрировании системы (6), (7) по x_4 от 0 до 1 получаются уравнения мелкой воды с радиационными напряжениями Лонге – Хиггенса.

Продифференцируем (7) по времени (6) по x_i. Интегрируя полученное уравнение по x_4 от 0 до 1 и исключая общие члены, получим

$$\frac{\partial^2H}{\partial t^2}-\int_0^1\frac{\partial^2HU_i^\circ U_m^\circ}{\partial x_i\,\partial x_m}dx_4-g\frac{\partial}{\partial x_i}\left(H\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial(\tau_{ni}-\tau_{bi})}{\partial x_i}-\frac{\partial^2S_{im}}{\partial x_i\,\partial x_m}=0,$$
$$S_{im}=E\frac{c_g}{c}\frac{k_ik_j}{k^2}+\frac{E}{2}\left(\frac{2c_g}{c}-1\right)\delta_{im} \tag{8}$$

Здесь S_{im} – радиационные напряжения Лонга – Хиггенса, δ_{im} – единичный тензор, $c_g=\nabla_kn$, $c=(n/k^2)\mathbf{k}$ – групповая и фазовая скорости волн, τ_{ni}, τ_{bi} – напряжения трения на поверхности и на дне.

Для определения параметров волн воспользуемся уравнениями сохранения энергии поверхностных волн и условием сохранения волновых гребней [4]

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E(c_g+U_i^\circ)}{\partial x_i}+S_{im}\frac{\partial U_i^\circ}{\partial x_m}=T_n-T_g,\qquad \frac{\partial k_i}{\partial t}+\frac{\partial(n+k_iU_j^\circ)}{\partial x_j}=0$$

Скорости порождения энергии поверхностных волн T_n за счет ветра и ее диссипации T_g задаются по [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лонгинов В. В.* Динамика береговой зоны бесприливных морей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 379 с.
2. *Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.* Radiation stress and mass transport in gravity waves.— J. Fluid Mech., 1962, v. 13, № 4, p. 481—504.
3. *Longuet-Higgins M. S.* Longshore currents generated by obliquely incident sea waves.— J. Geophys. Res., 1970, v. 75, № 33, p. 6778—6789.
4. *Whitham G. B.* Mass, momentum and energy flux in water waves.— J. Fluid Mech., 1962, v. 12, № 1, p. 135—147.
5. *Hasselman K., Ross D. B., Müller P., Sell W.* A parametric wave prediction model.— J. Phys. Oceanogr., 1976, v. 6, № 2, p. 200—228.

Москва

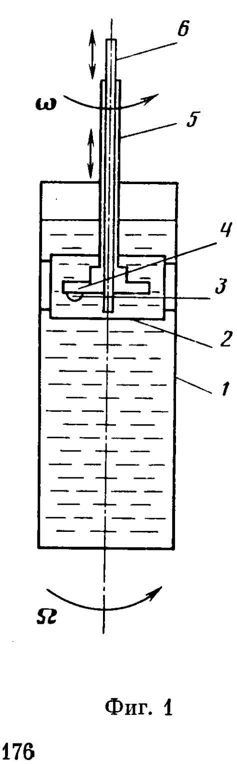
Поступила в редакцию
26.XI.1985

УДК 532.59:532.527

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

ВЛАДИМИРОВ В. А., МАКАРЕНКО В. Г., ТАРАСОВ В. Ф.

Вращающаяся жидкость способна поддерживать внутренние волновые движения — инерционные волны, что служит основным проявлением «гироскопической» природы движений, которая обусловливает также своеобразный характер турбулентности и вторичных режимов во вращающихся потоках [1—3]. Наличие инерционных волн определяет важные свойства таких течений, как вращающиеся атмосферы планет, концентрированные вихри в атмосфере (ураганы, смерчи) и вихри в технических устройствах (вихревые камеры, циклонные топки и т. п. [1—4]). Классической и глубоко разработанной в теории инерционных волн является задача о собственных колебаниях вращающейся жидкости, заключенной в замкнутый резервуар [1, 5—7]. Экспериментальные исследования осесимметричных собственных мод в цилиндрическом сосуде представлены в [8, 9]. Результаты экспериментального изучения других типов инерционных волн приведены в [10, 11].



Фиг. 1

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию свойств неосесимметричных волн в заполняющей цилиндрический сосуд твердотельно вращающейся жидкости. Использовался метод резонансной генерации требуемой моды, не приводящий к перестройке основного течения. Показано, что резонансная генерация собственной моды колебаний является существенно нестационарным процессом, начальный этап которого находится в хорошем согласии с линейной теорией. Установлено, что при достижении критической амплитуды рост волны прекращается и происходит нелинейный распад ее первоначальной структуры.

1. Эксперименты по исследованию инерционных волн проводились на установке, схема которой приведена на фиг. 1. Заполненный водой прозрачный цилиндрический сосуд *1* закреплялся в вертикальном положении на вращающемся столе. Жестко связанная с сосудом верхняя крышка *2* была эластичной, и возбуждение волн осуществлялось с помощью деформирования ее одной или несколькими полусферами *3*, прикрепленными к диску *4*, соединенному с трубчатым валом *5*. Ось вращения вала генератора волн *3*, *4*, *5* совпадала с осью вращения цилиндрического сосуда.

Опыты осуществлялись следующим образом. Цилиндрический сосуд с жидкостью приводился во вращение с постоянной угловой скоростью Ω. После того как в жидкости достигалось состояние стационарного твердотельного вращения, центральная область, прилегающая к оси вращения, визуализировалась.

Для этого в исследуемый объем жидкости через не-