МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1987

УДК 532.526

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВО ВНЕШНЕЙ ОБЛАСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ УРАВНЕНИЯ ОРРА — ЗОММЕРФЕЛЬДА С УЧЕТОМ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

ПЕРШУКОВ В. А.

В настоящее время появилось большое количество публикаций, посвященных исследованию гидродинамической устойчивости непараллельных течений на основе модифицированного уравнения Орра – Зоммерфельда [1–4]. Учет дополнительных слагаемых, обусловленных наличием в потоке поперечной составляющей скорости и ускорения, может приводить не только к заметному количественному расхождению в расчетах по сравнению с полученными на основе обычного уравнения Орра – Зоммерфельда, но и к качественно новым результатам (незамкнутость нейтральных кривых для течения на проницаемой поверхности при сильном вдуве [4]). Ниже для автомодельного градиентного обтекания поверхности (течение Фокнера – Скэн) построено асимптотическое решение уравнения Орра – Зоммерфельда, справедливое во внешней области течения пограничного слоя. На основе полученного решения показана непрерывность спектра собственных значений при неограниченном возрастании скорости распространения возмущений. Для обычного уравнения Орра – Зоммерфельда непрерывный переход спектра через значение скорости распространения возмущений $C_r=1$ (что совпадает со скоростью внешнего потока) невозможен [5].

Рассмотрим обтекание градиентным потоком $u_e \sim x^m$ плоской поверхности, которая в общем случае может быть проницаема ($v_w \sim x^{(m-1)/2}$ – скорость вдува). Уравнения пограничного слоя имеют автомодельное решение

$$\frac{u_x}{u_e}=f'(\eta);\qquad \frac{u_y}{u_e}=-\sqrt{\frac{m+1}{2\,\mathrm{Re}_x}}\left(f+\frac{m-1}{m+1}\eta f'\right)$$

$$\eta=\frac{y}{x}\sqrt{\frac{m+1}{2}\mathrm{Re}_x};\qquad \mathrm{Re}_x=\frac{u_e x}{\nu} \tag{1}$$

$$f'''+ff''+\beta(1-f'^2)=0;\qquad \beta=\frac{2m}{m+1}$$

$$\eta=0,\quad f=-f_w,\quad f'=0;\quad \eta=\infty,\quad f'=1;\quad f_w=\frac{v_w}{u_e}\sqrt{\frac{2\,\mathrm{Re}_x}{m+1}}$$

Здесь f_w – параметр вдува.

Для рассматриваемого течения уравнение Орра – Зоммерфельда, учитывающее непараллельность потока и граничные условия на стенке, имеет вид

$$\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=i\alpha\sqrt{(2-\beta)\mathrm{Re}_x}[(f'-C)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-f'''\varphi]-$$

$$-(f+(\beta-1)\eta f')(\varphi'''-\alpha^2\varphi')+((2\beta-1)f''+(\beta-1)\eta f''')\varphi',$$

$$\eta=0,\qquad \varphi=0,\qquad \varphi'=0 \tag{2}$$

При определении граничных условий на бесконечности построим асимптотическое решение уравнения (2). В этом случае из (1) следует $f=\eta+B$, $f'=1$, $f''=0$, $f'''=0$. С учетом выписанных соотношений асимптотический вид уравнения (2) при

$\eta\to\infty$ и $\beta>0$ записывается так:

$$\varphi^{IV}-\frac{2\alpha^2}{\beta^2}\varphi''+\frac{\alpha^4}{\beta^4}\varphi=\frac{i\alpha\sqrt{(2-\beta)\,\mathrm{Re}_x(1-C)}}{\beta^2}\left(\varphi''-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\varphi\right)-\frac{\xi}{\beta}\left(\varphi'''-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\varphi'\right) \tag{3}$$

где дифференцирование проводится по координате $\xi=\beta\eta+B$.

Существенным отличием (3) от асимптотического вида обычного уравнения Орра – Зоммерфельда является переменность коэффициентов, что качественным образом сказывается на его свойствах. Понизим порядок уравнения (3), сделав замену

$$p=\varphi''-(\alpha/\beta)^2\varphi; \qquad p''+\frac{\xi}{\beta}p'-\gamma p=0; \qquad \gamma=(\alpha^2+i\alpha\sqrt{(2-\beta)\,\mathrm{Re}_x(1-C)})/\beta^2 \tag{4}$$

Исследуем поведение функции p при $\xi\to\infty$. Переводя $\xi=\infty$ в начале координат, получаем

$$z^4p''+(2z^3+z/\beta)p'-\gamma p=0 \tag{5}$$

где $z=1/\xi$.

Из вида уравнения (5) следует, что $z=0$ является иррегулярной особой точкой и, следовательно, решение его можно представить в виде [6]

$$p=\exp(\lambda z^{-\nu})z^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{6}$$

Параметры λ и ν определяются из требования отсутствия растущих членов в уравнении (5) при $z\to 0$; $\nu=2$, $\lambda^2+\lambda/2\beta=0$, из чего следует существование двух решений.

При $\lambda=0$, подставляя степенное разложение (6) в (5) и приравнивая показатели при последовательных степенях, определим коэффициенты при четных степенях ряда. При этом все нечетные члены обращаются в нуль

$$\sigma=-\beta\gamma; \qquad a_{2k+2}=\frac{(\sigma+2k)(\sigma+2k+1)}{(\sigma+2k+2)\beta^{-1}+\gamma}a_{2k} \tag{7}$$

где $k=0, 1, 2,\ldots$

Из выражений (7) следует, что ряд (6) является сходящимся при $z\to 0$. Таким образом, полученное решение (4) имеет вид

$$p\simeq a_0\left[\xi^{\beta\gamma}+\frac{(\sigma+2)(\sigma+3)}{(\sigma+4)\beta^{-1}+\gamma}\xi^{\beta\gamma-1}+\ldots\right] \tag{8}$$

Оставляя главный член разложения в (8), получим частное решение уравнения (3) $\varphi\sim\xi^{\beta\gamma}$.

Построенное решение является растущим при любых значениях действительной части C_r и действительном α, что делает необходимым исключение его из дальнейшего рассмотрения.

Аналогичным образом строится решение при $\lambda=-{}^1/_2\beta$. В этом случае коэффициенты ряда (6) и показатель степени определяются соотношениями

$$\sigma=1-\beta\gamma; \qquad a_{2k+2}=\frac{(\sigma+2k)(\sigma+2k+1)}{(\sigma+2k-1)\beta^{-1}+\gamma}a_{2k} \tag{9}$$

где $k=0, 1, 2,\ldots$

Из формул (9) следует сходимость ряда при $z\to 0$.

Частное решение уравнения (4) в этом случае имеет вид

$$p\sim\xi^{\beta\gamma-1}\exp\left(-\frac{1}{2\beta}\xi^2\right)+\ldots \tag{10}$$

Из (10) следует, что соответствующее решение уравнения (3) записывается следующим образом:

$$\varphi\sim\exp\left(\frac{-\beta\eta^2}{2}+\alpha\eta\right)\eta^{\beta\gamma-2}$$

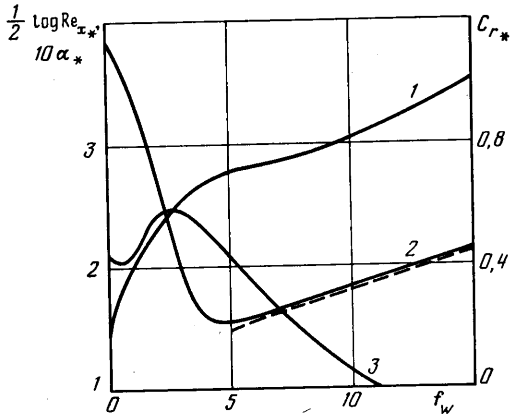
Суммируя полученные решения, запишем общее решение уравнения (3), затухающее на бесконечности

$$\varphi\sim c_1\exp(-\alpha\eta)+c_2\exp\left(\frac{-\beta\eta^2}{2}+\alpha\eta\right)\eta^{\beta\gamma-2} \tag{11}$$

Из вида решения (11) следует непрерывность спектра собственных чисел при переходе через $C_r=1$. Более того, в силу квадратичности показателя степени в экспоненте при c_2 второе решение может быть отброшено по причине более быстрого по сравнению с $\exp(-\alpha\eta)$ затухания. Таким образом, граничные условия для уравнения (2) могут быть записаны в виде

$$\eta=\infty, \qquad \varphi''-\alpha^2\varphi=0, \qquad \varphi'+\alpha\varphi=0$$

В качестве примера на фигуре приведены значения критических параметров нейтральной устойчивости (*1* – C_{r*}, *2* – Re_{x*}, *3* – α_*) течения на проницаемой поверх-



ности при $\beta=0{,}5$ (что соответствует обтеканию передней критической точки проницаемой сферы). Видно, что при возрастании параметра вдува f_w происходит неограниченное увеличение C_{r*}. Этот результат связан, по всей видимости, с уменьшением влияния критического слоя ($C_{r*}=f'(\eta_*)$) на рост возмущений и свидетельствует об отличном от вязкого (естественного в теории обычного уравнения Орра – Зоммерфельда) механизме возникновения неустойчивости. Прямым подтверждением невязкого механизма потери устойчивости является справедливость асимптотического решения уравнения (2) при сильном вдуве (штриховая линия), полученного без учета вязкости [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaster M.* On the effects of boundary-layer growth on flow stability.– J. Fluid Mech., 1974, v. 66, pt 3, p. 465–480.
2. *Wazzan A. R., Taghavi H. K., Keltner G.* Effect of boundary-layer growth on stability of in compressible flat plate boundary layer with pressure gradient.– Phys. Fluids, 1974, v. 17, № 9, p. 1655–1660.
3. *Saric W. S., Hayfeh A. H.* Nonparallel stability of boundary-layer flows.– Phys. Fluids, 1975, v. 18, № 8, p. 945–950.
4. *Ерошенко В. М., Зайчик Л. И.* Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984. 274 с.
5. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
6. *Найфэ А. Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
7. *Ерошенко В. М., Зайчик Л. И., Першуков В. А.* Расчет характеристик устойчивости пограничного слоя со вдувом при наличии отрицательного градиента давления.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 60–64.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1985